دولة ليبيا
وزارة التعليم
مركز المناهج التعليمية والبحوث التربوية

الرياضيات

للصف الأول من مرحلة التعليم الثانوي

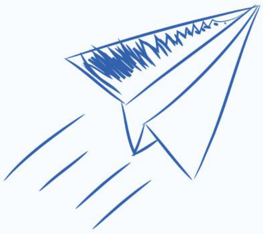
الدرس الاول

المدرسة الليبية بفرنسا ـ تور

العام الدراسي:

1441 / 1442 هـ . 2020 / 2021 م.

المجموعات Sets



في نهاية هذا الفصل يكون الطالب قادراً على أن:

- يَصل إلى مفهوم المجموعة.
- يَستخدم العمليات على المجموعات لحل التمارين.
- يُعرف العلاقة الثنائية.
- يُميز بين العلاقة والدالة.

مقدمة:

سنقدم في هذا البند العناصر الأساسية المتعلقة بمفهوم المجموعة، وسنتناول بإيجاز دراسة معنى المجموعات وكتابة المجموعات والمجموعات المنتهية والمجموعات غير المنتهية والمجموعات المتساوية والمجموعات المتكافئة.

1-1 مفهوم المجموعة Set Concept :

عبارة عن أي تجمع من الأشياء تسمى عناصر يمكن تحديدها هل تنتمي إلى المجموعة أم لا.

ملحوظة: الأشياء التي تتكون منها المجموعة تسمى عناصر

الأمثلة الآتية توضح معنى المجموعة:

(أ) مجموعة الأعداد الفردية المحصورة بين 11 ، 20 .

(ب) مجموعة عوامل العدد 8 .

(جـ) مجموعة الأعداد الصحيحة بين 1 ، 10 تقبل القسمة على 12 .

(د) مجموعة الأحرف المكونة لكلمة " إفريقيا".

(د) مجموعة الأعداد الزوجية الموجبة

ملحوظة: يرمز للمجموعة بقوسين من هذا النوع { }

نلاحظ من الأمثلة السابقة:

(1) المجموعة أ = { 19, 17, 15, 13 }

(2) المجموعة ب = { 8 , 4 , 2 , 1 }

(3) المجموعة جـ = { } أو ϕ

(4) المجموعة د = { أ ، ف ، ر ، ي ، ق ، ي ، أ }

(5) المجموعة هـ = { 2 , 4 , 6 , 8 , 10 ,.... }

من الأمثلة السابقة يمكن ملاحظة الأتي:

1. هناك مجموعات تحتوى على عدد نهائي من العناصر تسمي مجموعة منتهية مثل المجموعات أ ، ب ، د .

2. هناك مجموعات تحتوى على عدد لا نهائي من العناصر وتسمى مجموعة لا نهائية مثل المجموعة هـ .

3. هناك مجموعات لا تحتوى على عناصر وتسمى المجموعة الخالية مثل المجموعة جـ.

4. نلاحظ انه قد يتكرر أكثر من عنصر فى المجموعات، فمثلا في المثال (د) نجد أن الحرفين " أ ، ي" تكررا في المجموعة، وبصفة عامة أتفق على عدم تكرار العناصر في المجموعة وبذلك تكون المجموعة { أ ، ف ، ر، ي ، ق ، ي ، أ } تساوي المجموعة { أ ، ف ، ر، ي ، ق}.

5. هناك طريقتان لكتابة المجموعة، طريقة القائمة أو الحصر وهي عبارة عن كتابة عناصر المجموعة مثل أ = { 5 ، 10 ، 15 ، 20 ، ... } وطريقة الوصف أو القاعدة وهي عبارة عن كتابة جملة تصف عناصر المجموعة مثل :

ب = { س : س عدد طبيعي أكبر من 10 } .

6. هناك مجموعات أعداد غير منتهية محددة برمز تسمى مجموعات الأعداد مثل:

- مجموعة الأعداد الطبيعية (ط) " مجموعة العد" = { 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، ... } .
- مجموعة الأعداد الصحيحة (ص) = { 0 ، ± 1 ، ± 2 ، ± 3 ... }
- مجموعة الأعداد القياسية ن = { $\frac{أ}{ب}$ ، أ ، ب ∈ ص ، ب ≠ 0 } .

ملحوظة:
عناصر المجموعة متمايزة فلا داعي لتكرار أي عنصر من عناصرها.

ملحوظة:
ترتيب عناصر المجموعة ليس له أهمية (تأثير) .

1-1-1 المجموعات المتساوية Equal Sets :

يقال عن المجموعتين أ ، ب بأنها متساويتان إذا كانت أ ⊆ ب ، ب ⊆ أ

ونعبر عن ذلك بالرمز أ = ب أي أن :

أ = ب ⟺ أ ⊆ ب ، ب ⊆ أ

> ملحوظة:
> المجموعات المتساوية هي التى تحتوي على نفس العناصر.

2-1-1 المجموعات المتكافئة Equivalent Sets :

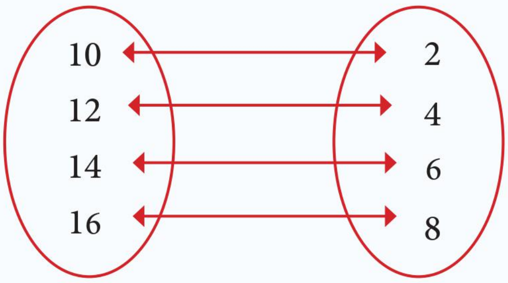
يقال للمجموعتين أ ، ب بأنها متكافئة إذا وجد تناظر بين عناصر المجموعة الأولى وعناصر المجموعة الثانية وبذلك تكون المجموعتين متكافئتين إذا كان عدد عناصرهما متساويًا أي انه إذا كانت:

أ = { 2 ، 4 ، 6 ، 8 } نجد أن: ں (أ) = 4

ب = { 10 ، 12 ، 14 ، 16 } نجد أن : ں (ب) = 4

> ملحوظة:
> المجموعات المتكافئة هي التى تحتوي على نفس العدد من العناصر.

أي أنه يمكن إيجاد تناظر بين عناصر المجموعتين أ ، ب. كما في الشكل 1-1



شكل 1-1

3-1-1 الإنتماء وعدم الإنتماء Affiliation and non-Affiliation :

نقول أن ليبيا عضو (عنصر) في مجموعة الدول المنتجة للنفط بمعنى أن ليبيا تنتمي إلى مجموعة الدول المنتجةللنفط وتكتب بالصورة الرمزية كما يلي:

ليبيا ∈ { الدول المنتجة للنفط}

والرمز ∈ يعني انتماء العنصر إلى المجموعة فمثلا إذا كانت أ = { 1 ، 3 ، 15 } فإن 3 ∈ أ

وتقرأ 3 تنتمي إلى أ، ولكن 2 ∉ أ لأن العدد 2 ليس عنصرا في أ وتقرأ 2 لا تنتمي إلى أ .

4-1-1 المجموعات الجزئية Subsets :

إذا كانت جميع عناصر المجموعة أ تنتمي إلى المجموعة ب وكانت أ ≠ ب يقال في هذه الحالة أن المجموعة أ مجموعة جزئية فعلية من المجموعة ب وتكتب أ ⊂ ب. وفي حالة أ = ب يقال بأن أ مجموعة جزئية من المجموعة ب وتكتب أ ⊆ ب ، أما إذا كانت أ ليست مجموعة جزئية أو ليست مجموعة جزئية فعلية من المجموعة ب وتُكتب أ ⊄ ب .

مثال 1:

في كل حالة من الحالات الآتية أيا من المجموعات جزئية أم لا.

1) أ = { 1 ، 2 ، 3 } ب = { 1 ، 5 ، 6 ، 7 ، 8 }

2) س = { 1 ، 5 } ص = { 1 ، 5 }

3) ع = { 1 ، 3 ، 5 ، 7 ، 9 ، ... } ط = { 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 ... }

4) م = { 1 ، 2 ، 4 ، 6 ، 8 ، ... } ن = { 2 ، 4 ، 6 ، 8 ، ... }

الحل:

من التعريف السابق للمجموعات الجزئية نجد أن:

1) أ ⊄ ب. 2) س ⊆ ص.

3) ع ⊂ ط. 4) م ⊄ ن

تنبيه

- ∈ الرمز ∈ يربط بين عنصر ومجموعة، أما الرمز ⊂ يربط بين مجموعتين.
- المجموعة التي لا تحتوي على أي عنصر بالمجموعة تسمى المجموعة الخالية ويرمز بالرمز ∅ { }.

عدد المجموعات الجزئية لمجموعة معطاة:

ملحوظة:
المجموعة الخالية تعتبر مجموعة جزئية من أي مجموعة.

نلاحظ من المجموعة أ = { 2 } فإن عدد المجموعات الجزئية لهذه المجموعة هي { 2 }، ∅ أي أن :

$$2 \to \{2\} \ni \qquad 2 \to \emptyset \not\ni$$

وإذا كانت المجموعة ب = { 2 ، 5 } فإن حسب الرسم التخطيطي السابق يكون عدد المجموعات الجزئية كالآتي:

$$\{5 ، 2\} \ni \quad \{2\} \not\ni \quad \longleftarrow \{2\} \ni \longleftarrow 2$$
$$\{5\} \ni \quad \varnothing \not\ni \quad \longleftarrow \varnothing \not\ni \longleftarrow 2$$

ملحوظة:
المجموعة الأصلية تعتبر مجموعة جزئية للمجموعة نفسها .

قاعدة : إذا كان عدد عناصر المجموعة = ن فإن عدد المجموعات الجزئية = $2^{ن}$

وبذلك يكون عدد المجموعات الجزئية هو: {{2 ، 5 } ، { 2 } { 5 } ، {∅}} وتسمى مجموعة المجموعات الجزئية لأي مجموعة من غير خالية بقوة المجموعة ونرمز لها بالرمز ق (س) فمثلًا:

إذا كانت أ = {2}

فإن ق (أ) = { {2} ، ∅ }

وإذا كانت ب = { 2 ، 5 } فإن:

ق (ب) = {{ 2 ، 5 } ، {2} ، {5} ، ∅ }

وإذا كانت جـ = { -1 ، 3 ، 6 } فإن:

ق (جـ) = {{ -1 ، 3 ، 6 } ، { -1 ، 3 } ، { -1 ، 6 } ، { 3 ، 6 } {-1} ، {3} ، {6} ، ∅ }

ويمكن تعريف ق (أ) = { **س** : س عدد طبيعي أكبر من أ } .

لاحظ الفرق بين ∅ ، {∅} ، {0}

فالمجموعة الأولى هي المجموعة الخالية ، الثانية مجموعة تحتوي على عنصر اسمه ∅ الثالثة مجموعة تحتوي على عنصر اسمه الصفر

5-1-1 المجموعات الشاملة The Universal sets :

إذا كانت كل المجموعات في مسألة ما هي مجموعات جزئية من مجموعة ش~ فإن ش~ تسمى مجموعة شاملة فمثلا إذا كانت :

أ = مجموعة طلبة تخصص (فيزياء-رياضيات) في كلية العلوم.

ب = مجموعة طلبة تخصص (أحياء-كيمياء) في كلية العلوم.

ش~ = مجموعةجميع الطلبة بكلية العلوم.

ملحوظة:
المجموعة الشاملة هي المجموعة التي تضم جميع العناصر الداخلة في اعتبارنا في مسألة معينة.

فإن في هذه المسألة تكون ش~ المجموعة الشاملة وذلك لأن أ ⊂ ش~ ، ب ⊂ ش~

2-1 العمليات على المجموعات الجزئية Operation on sets:

1-2-1 عملية الاتحاد:

إذا كانت أ ، ب مجموعتين فإن:

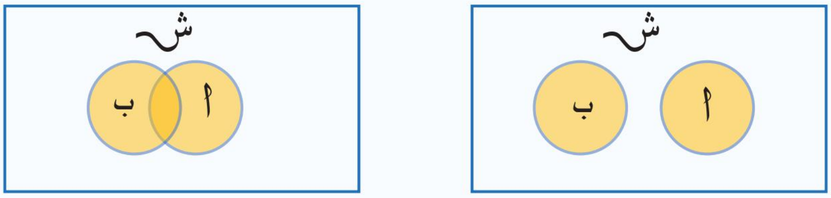
أ ∪ ب = { س : س ∈ أ أو س ∈ ب } فمثلا ...

إذا كانت أ = { 1 ، 2 ، -5 } ، ب = { 2 ، 7 ، $\sqrt{2}$ } **فإن:**

أ ∪ ب = { 1 ، 2 ، -5 ، 7 ، $\sqrt{2}$ }

كذلك إذا كانت أ = {س، ص،ع} ، ب = { ل ، م } فإن: أ ∪ ب = { س ، ص ،ع ، ص ، م }

يمكن توضيح عملية الاتحاد بأشكال فن كالأتي كما في الشكل(1-2) حسب المنطقة المظللة توضح اتحاد المجموعتين أ ، ب.



شكل 1-2

2-2-1 عملية التقاطع:

إذا كانت أ ، ب مجموعتين فإن:

أ ∩ ب = { س : س ∈ أ أو س ∈ ب } فمثلا ...

إذا كانت أ = { 2 ، 4 ، 5 ، 6 ، 8 } ، ب = { -2 ، -4 ، 5 ، 6 ، -7 } **فإن:**

أ ∩ ب = { 5 ، 6 }

كذلك نلاحظ أن:

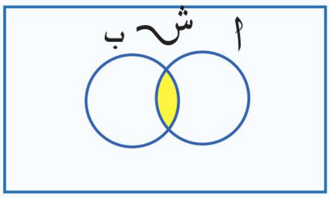
ص ∩ ك = { 0 ، 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، .... }

حيث ص مجموعة الأعداد الصحيحة، ك مجموعة الأعداد الكلية، أي أن:

ك = { 0 ، 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، .... }

ويمكن تمثيل عملية التقاطع بأشكال فن كما فى الشكل (1-3) حيث المنطقة المظللة تمثل تقاطع المجموعتين.

أ ∩ ب



شكل 1-3

3-2-1 عملية الفرق:

إذا كانت أ ، ب مجموعتين فإن:

أ - ب = { س : س ∈ أ أو س ∉ ب } فمثلا ...

إذا كانت أ = { 1 ، 2 ، 5 ، 6 } ، ب = { 5 ، 6 ، -7 ، 9 } فإن:

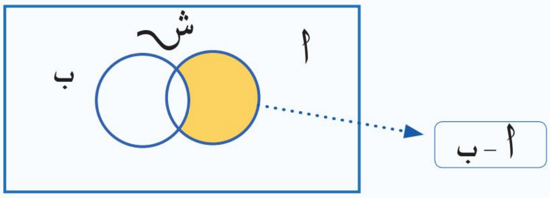
أ - ب = { 1 ، 2 }

كذلك نلاحظ أن:

ك - ط = { 0 }

ويمكن توضيح عملية الفرق بأشكال فن كما في الشكل (1-4) حيث المنطقة المظللة توضح أ - ب.

ملحوظة: في عملية الفرق نبحث عن العناصر الموجودة في المجموعة الأولى وغير موجودة في المجموعة الثانية.



شكل 1-4

3-2-1 عملية التكميل:

إذا كانت أ مجموعة، ش المجموعة الشاملة فإن :

عملية التكميل للمجموعة (أ) أي المجموعة المكملة للمجموعة (أ) تعني جميع العناصر التي إلى المجموعة الشاملة ش ولا تنتمي للمجموعة أ وتعرف على أنها:

أ/ = { س : س ∈ ش أو س ∉ أ } فمثلا ...

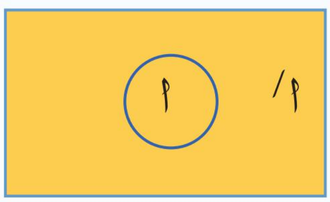
إذا كانت أ = { 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 } ،

ش = {1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 ، 6 ، 7 ، 8 ، 9 ، 10} فإن:

أ/ = { 6 ، 7 ، 8 ، 9 ، 10}

ويمكن توضيح عملية الفرق بأشكال فن كما في الشكل (1-5)

ملحوظة:
1. أ/ = ش - أ
2. أ ∩ أ/ = ∅
3. أ ∪ أ/ = ش



شكل 1-5

مثال 2:

إذا كانت أ مجموعة، ش = { 1 ، 2 ، 3 ، ... ، 10 }

أ = { 3 ، 5 ، 8 }

ب = { 3 ، 7 ، 6 }

جـ = { 2 ، 5 ، 7 ، 8 }

فأوجد: أ/ ، ب/ ، جـ/ ، جـ - ب ، أ/ - ب/

الحل:

أ/ = { 1 ، 2 ، 4 ، 6 ، 7 ، 9 ، 10 }

ب/ = { 1 ، 2 ، 4 ، 5 ، 8 ، 9 ، 10 }

جـ/ = { 1 ، 3 ، 4 ، 6 ، 9 ، 10 }

جـ - ب = { 2 ، 5 ، 8 }

أ/ - ب/ = { 6 ، 7 }