دولة ليبيا
وزارة التعليم
مركز المناهج التعليمية والبحوث التربوية

الرياضيات

للسنة الثالثة من مرحلة التعليم الثانوي
القسم العلمي

الدرس الاول

المدرسة الليبية بفرنسا ـ تور

العام الدراسي
1441 / 1442 هـ - 2020 / 2021 م

المصفوفات والمحددات
Limitations and Matrices

1-1: المحددات Limitations

ظهرت المحددات في البداية مرتبطة بحل المعادلات الخطية الآنية، فمثلا إذا رغبنا في نقطة تقاطع المستقيمين:

$$\text{أ}_1\text{س} + \text{ب}_1\text{ص} = \text{جـ}_1 \quad \cdots\cdots \quad (i)$$

$$\text{أ}_2\text{س} + \text{ب}_2\text{ص} = \text{جـ}_2 \quad \cdots\cdots \quad (ii)$$

فإننا نحاول أن نجد زوجا من الأعداد س ، ص يُحققان المعادلتين في آن واحد وإحدى الطرق لذلك بضرب المعادلة (i) في ب_2 والثانية في $-\text{ب}_1$.

$$\text{أ}_1\text{ب}_2\text{س} + \text{ب}_1\text{ب}_2\text{ص} = \text{ب}_2\text{جـ}_1 \quad \cdots\cdots \quad (i')$$

$$-\text{أ}_2\text{ب}_1\text{س} - \text{ب}_1\text{ب}_2\text{ص} = -\text{ب}_1\text{جـ}_2 \quad \cdots\cdots \quad (ii')$$

بالجمع...

$$\text{أ}_1\text{ب}_2\text{س} - \text{أ}_2\text{ب}_1\text{س} = \text{ب}_2\text{جـ}_1 - \text{ب}_1\text{جـ}_2$$

$$\boxed{\text{س} = \frac{\text{ب}_2\text{جـ}_1 - \text{ب}_1\text{جـ}_2}{\text{أ}_1\text{ب}_2 - \text{أ}_2\text{ب}_1}} \quad \cdots\cdots \quad ①$$

وبضرب المعادلة (i) في $-\text{أ}_2$ ، والمعادلة (ii) أ_1 .

$$-\text{أ}_1\text{أ}_2\text{س} - \text{أ}_2\text{ب}_1\text{ص} = -\text{أ}_2\text{جـ}_1 \quad \cdots\cdots \quad (i'')$$

$$\text{أ}_1\text{أ}_2\text{س} + \text{أ}_1\text{ب}_2\text{ص} = \text{أ}_1\text{جـ}_2 \quad \cdots\cdots \quad (ii'')$$

بالجمع...

$$\text{أ}_1\text{ب}_2\text{ص} - \text{أ}_2\text{ب}_1\text{ص} = \text{أ}_1\text{جـ}_2 - \text{أ}_2\text{جـ}_1$$

$$\boxed{\text{ص} = \frac{\text{أ}_1\text{جـ}_2 - \text{أ}_2\text{جـ}_1}{\text{أ}_1\text{ب}_2 - \text{أ}_2\text{ب}_1}} \quad \cdots\cdots \quad ②$$

جميع الحقوق محفوظة لـ مركز المناهج التعليمية والبحوث التربوية ـ ليبيا

من ①،② نجد أنهما الثنائي الوحيد من الأعداد الذي يحقق المعادلتين (i) (ii)

بشرط أن يكون: $\text{أ}_1\text{ب}_2 - \text{أ}_2\text{ب}_1 \neq 0$. والتعبير $\text{أ}_1\text{ب}_2 - \text{أ}_2\text{ب}_1$ يُمكن كتابته رمزيا بالشكل التالي:

$$\text{م}_2 = \begin{vmatrix} \text{أ}_1 & \text{ب}_1 \\ \text{أ}_2 & \text{ب}_2 \end{vmatrix}$$

والذي يسمى محددا من الرتبة الثانية لأنه يحتوي على سطرين أفقيين (صفين) وعمودين بين خطين رأسيين والكميات أ_1 ، ب_1 ، أ_2 ، ب_2 التي يتكون منها المحدد تعرف بالعناصر (مكونات المحدد) والعناصر تعرف بالعناصر القطرية ويعرف التعبير ($\text{أ}_1\text{ب}_2 - \text{أ}_2\text{ب}_1$) بأنه قيمة المحدد م_2 ، وعلى ذلك فإن:

$$\begin{vmatrix} \text{أ}_1 & \text{ب}_1 \\ \text{أ}_2 & \text{ب}_2 \end{vmatrix} = \text{أ}_1\text{ب}_2 - \text{أ}_2\text{ب}_1$$

مثال1:

احسب قيمة كل من المحددات الأتية:

(i) $\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -7 \end{vmatrix}$ (ii) $\begin{vmatrix} \text{أ}+\text{ب} & \text{ب} \\ -\text{ب} & \text{أ}-\text{ب} \end{vmatrix}$ (iii) $\begin{vmatrix} \text{قاهـ} & \text{ظا}^2\text{هـ} \\ 1 & \text{قاهـ} \end{vmatrix}$

الحل:

(i) $\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -7 \end{vmatrix} = (2 \times -7) - (3 \times -4) = -2$

(ii) $\begin{vmatrix} \text{أ}+\text{ب} & \text{ب} \\ -\text{ب} & \text{أ}-\text{ب} \end{vmatrix} = (\text{أ}+\text{ب})\,(\text{أ}-\text{ب}) - (-\text{ب} \times \text{ب}) = (\text{أ}^2 - \text{ب}^2) + \text{ب}^2$

$\therefore$ قيمة المحدد $= \text{أ}^2$

(iii) $\begin{vmatrix} \text{قاهـ} & \text{ظا}^2\text{هـ} \\ 1 & \text{قاهـ} \end{vmatrix} = (\text{قا}^2\text{هـ} - \text{ظا}^2\text{هـ}) = 1$

مثال2:

إذا كانت $\begin{vmatrix} 3\text{س} & -\text{س} \\ 2\text{س} & 5\text{س} \end{vmatrix} = \text{أس}^2$ فأوجد قيمة أ ، $\text{س} \neq 0$

الحل:

$(3\text{س} \times 5\text{س}) - (2\text{س} \times -\text{س}) = \text{أس}^2$

$15\text{س}^2 + 2\text{س}^2 = \text{أس}^2 \Leftarrow$

$17\text{س}^2 = \text{أس}^2$ بقسمة المعادلة على س^2

$\therefore \text{أ} = 17$

جميع الحقوق محفوظة لـ مركز المناهج التعليمية والبحوث التربوية ـ ليبيا

مثال3:

حل المعادلات الأتية:

(i) $\begin{vmatrix} \text{س} & -1 \\ 2 & \text{س} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \text{س} & 3 \\ 2 & \text{س} \end{vmatrix} = 2$

(ii) $\begin{vmatrix} \text{س} & 5 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{س} & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$

(iii) $\begin{vmatrix} \text{س}^3 & -4 \\ 2 & 2-\text{س} \end{vmatrix} = -1$

الحل:

(i) $(\text{س}^2 + 2) + (\text{س} - 6) = 2$ ⇦ $(\text{س}^2 + \text{س} - 6) = 0$

$(\text{س} + 3)(\text{س} - 2) = 0$

إما: $\text{س} + 3 = 0 \quad \therefore \quad \text{س} = -3$

أو: $\text{س} - 2 = 0 \quad \therefore \quad \text{س} = 2$

مجموعة الحل هي: $\{-3 \text{ ، } 2\}$

(ii) $2\text{س} + 15 = -\text{س} + 3$ ⇦ $3\text{س} = -12$ ... بالقسمة على 3

$\text{س} = -4$

مجموعة الحل هي: $\{-4\}$

على الطالب إيجاد قيمة س التي تحقق المعادلة في الفقرة (iii)

جميع الحقوق محفوظة لـ مركز المناهج التعليمية والبحوث التربوية ـ ليبيا

2-1 : محدد الرتبة الثالثة:

وهي على الصورة:

$$\begin{vmatrix} \text{أ}_{31} & \text{أ}_{21} & \text{أ}_{11} \\ \text{أ}_{32} & \text{أ}_{22} & \text{أ}_{12} \\ \text{أ}_{33} & \text{أ}_{23} & \text{أ}_{13} \end{vmatrix} = \text{م}_3$$

لها تسعة عناصر مرتبة في ثلاثة (صفوف) وثلاثة (أعمدة) لكل عنصر في المحدد دلالتان على الصورة $\text{أ}_{\text{ر ى}}$
حيث ر يمثل الصف، ى يمثل العمود.

فالعنصر أ_{32} يكون في الصف الثاني والعمود الثالث

أي أن: ر = 2 ، ى = 3

و العنصر أ_{13} يكون في الصف الثالث والعمود الأول

أي أن: ر = 3 ، ى = 1

3-1 : العوامل المرافقة لعناصر محدد من الرتبة الثالثة:

(المحددات الصغرى والعوامل المرافقة لعناصر محدد)

إذا أخذنا أي عنصر فى المحدد م_3 وليكن العنصر $\text{أ}_{\text{ر ى}}$ الذي يقع في الصف ر والعمود ى فإن:

1- المحدد من الرتبة الثانية ينشأ عند حذف الصف ر و العمود ى يسمى المحدد الأصغر للعنصر $\text{أ}_{\text{ر ى}}$ ونرمز له بالرمز $\text{م}_{\text{ر ى}}$.

2- إذا ضربنا المحدد الأصغر $\text{م}_{\text{ر ى}}$ $(-1)^{\text{ر+ى}}$ فإن الكمية الناتجة وهي: $(-1)^{\text{ر+ى}}\text{م}_{\text{ر ى}}$ وتسمى بالعامل المرافق للعنصر $\text{أ}_{\text{ر ى}}$.

فمثلا في المحدد: $\text{م}_3 = \begin{vmatrix} \text{أ}_{31} & \text{أ}_{21} & \text{أ}_{11} \\ \text{أ}_{32} & \text{أ}_{22} & \text{أ}_{12} \\ \text{أ}_{33} & \text{أ}_{23} & \text{أ}_{13} \end{vmatrix}$

المحددات الصغر والعوامل المرافقة لعناصر الصف الأول هي كما يلي:

❶ بالنسبة للعنصر أ_{11}: المحدد الأصغر $\text{م}_3 = \begin{vmatrix} \text{أ}_{32} & \text{أ}_{22} \\ \text{أ}_{33} & \text{أ}_{23} \end{vmatrix}$ والعامل المرافق $= (-1)^{1+1}\text{م}_{11}$

❷ بالنسبة للعنصر أ_{21}: المحدد الأصغر $\text{م}_{21} = \begin{vmatrix} \text{أ}_{32} & \text{أ}_{12} \\ \text{أ}_{33} & \text{أ}_{13} \end{vmatrix}$ العامل المرافق $= (-1)^{2+1}\text{أ}_{21}\text{م}_{21}$

❸ بالنسبة للعنصر أ_{31}: المحدد الأصغر $\text{م}_{31} = \begin{vmatrix} \text{أ}_{22} & \text{أ}_{12} \\ \text{أ}_{23} & \text{أ}_{13} \end{vmatrix}$ العامل المرافق $= (-1)^{3+1}\text{م}_{31}$

❹ بالنسبة للعنصر أ_{32}: المحدد الأصغر $\text{م}_{32} = \begin{vmatrix} \text{أ}_{21} & \text{أ}_{11} \\ \text{أ}_{13} & \text{أ}_{13} \end{vmatrix}$ العامل المرافق $= (-1)^{3+2}\text{م}_{32}$

جميع الحقوق محفوظة لـ مركز المناهج التعليمية والبحوث التربوية ـ ليبيا

إيجاد قيمة المحدد من الرتبة الثالثة:

إن قيمة المحدد $م_3$ لأحد الصفوف أو أحد الأعمدة نحصل عليها من العلاقة:

$$\text{مجـ}\ (-1)^{ر+ع}\ أ_{رع}\ م_{رع}$$

فتكون قيمة المحدد $م_3$ بالنسبة للصف الأول (مثلا):

$$م_3 = (-1)^{1+1} أ_{11} م_{11} + (-1)^{2+1} أ_{21} م_{21} + (-1)^{3+1} أ_{31} م_{31}$$

وتكون قيمة المحدد $م_3$ بالنسبة للعمود الأول (مثلا):

$$م_3 = (-1)^{1+1} أ_{11} م_{11} + (-1)^{1+2} أ_{12} م_{12} + (-1)^{1+3} أ_{13} م_{13}$$

وهكذا نجد أنه يمكن حساب قيمة المحدد $م_3$ باختيار أحد الصفوف أو أحد الأعمدة (بقصد التبسيط) و يطلق عادة على عملية ايجاد قيمة المحدد (بالمفكوك) وتأخذ الرمز Δ (أي قيمة المحدد).

ويمكن الاستدلال على الإشارة المستخدمة في العوامل المرافقة لعناصر المحدد $م_3$ من الشكل التالي:

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

يمكن التعبير عن المفكوك بطرق مختلفة كمجموع ثلاثة محددات صغرى من الرتبة الثانية كل منها مضروب في عنصر من صف أو عمود.

$$م_3 = أ_{11} \begin{vmatrix} أ_{22} & أ_{32} \\ أ_{32} & أ_{33} \end{vmatrix} - أ_{21} \begin{vmatrix} أ_{12} & أ_{32} \\ أ_{13} & أ_{33} \end{vmatrix} - أ_{31} \begin{vmatrix} أ_{12} & أ_{32} \\ أ_{13} & أ_{32} \end{vmatrix}$$

مثال4:

أثبت أن المعادلة $\begin{vmatrix} س & ص & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$ تمثل خطا مستقيما يمر بالنقطتين (1 ، 0) ، (-1 ، 2)

الحل: بفك المحدد وفقا للعوامل المرافقة لعناصر الصف الأول ومساواة النتيجة بالصفر نحصل على:

$$س \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - ص \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$س (2 - 0) - ص (-1 - 1) + (0 - 2) = 0$

$2س + 2ص - 2 = 0$ .... بالقسمة على 2

أو أن : $س + ص - 1 = 0$

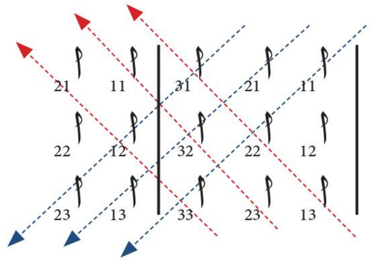
وهذه المعادلة هي معادلة خط مستقيم ومن الواضح أن النقطتين (1 ، 0) ، (-1 ، 2) تحققان المعادلة.

جميع الحقوق محفوظة لـ مركز المناهج التعليمية والبحوث التربوية ـ ليبيا

كما يمكن الحصول على قيمة المحدد من الرتبة الثالثة باتباع الخطوات:

نعيد كتابة عناصر المحدد وعلى يسارها نكتب العمودان الأول والثاني.
ثم من الجمع لحواصل ضرب العناصر الواقعة على الخطوط.
من اليمين إلى اليسار والطرح من هذا المجموع،
مجموع حواصل ضرب العناصر الواقعة على الخطوط من اليسار إلى اليمين ويمثل بالشكل:

مجموع حواصل ضرب العناصر من اليسار إلى اليمين



مجموع حواصل ضرب العناصر من اليمين إلى اليسار

أي أن قيمة المحدد تكون:

(مجموع حواصل ضرب العناصر من اليمين إلى اليسار) - (مجموع حواصل ضرب العناصر من اليسار إلى اليمين).

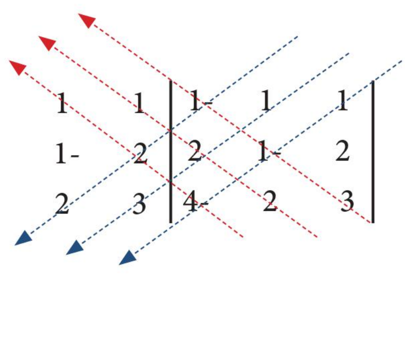
مثال5:

أوجد قيمة كل من:

$$\begin{vmatrix} 4 & 2- & 1 \\ -\text{جتا}^2\text{س} & \text{جا}^2\text{س} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \text{(ii)} \qquad \begin{vmatrix} 1- & 1 & 1 \\ 2 & 1- & 2 \\ 4- & 2 & 3 \end{vmatrix} \text{(i)}$$

الحل:

(i)



$$7 = (1-) - (6) = \Delta$$

(i) **يترك للطالب.**

جميع الحقوق محفوظة لـ مركز المناهج التعليمية والبحوث التربوية ـ ليبيا