دولة ليبيا
وزارة التعليم
مركز المناهج التعليمية والبحوث التربوية

الرياضيات

للصف الأول من مرحلة التعليم الثانوي

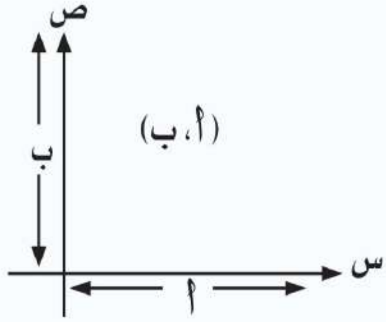
الدرس الثالث

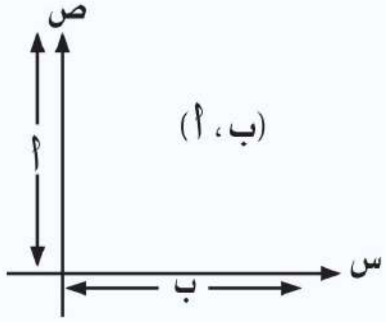
المدرسة الليبية بفرنسا ـ تور

العام الدراسي:
1441 / 1442 هـ . 2020 / 2021 م.

1-5 الضرب الكارتيزي :

فيما سبق درسنا الثنائيات المرتبة وعرفنا أن الثنائي المرتب (أ ، ب)، يعني نقطة في المستوى تبعد قيمة أ على المحور السيني من نقطة الأصل، وقيمة ب على المحور الصادي من نقطة الأصل. وتجدر الإشارة إلى هناك اختلافا بين المجموعة {ب ، أ} وبين الثنائي المرتب (أ ، ب) فالمجموعة {ب ، أ} تساوي المجموعة {أ ، ب} ولكن (أ ، ب) $\neq$ (ب ، أ)، لأن النقطة التي تمثلها (أ ، ب) لا تنطبق على النقطة التي تمثلها (ب ، أ).





تعريف:

حاصل الضرب الكارتيزي للمجموعتين أ ، ب عبارة عن مجموعة جميع الثنائيات المرتبة، أي أن:

أ × ب = {(س ، ص) ، س $\in$ أ ، ص $\in$ ب}

مثال (12):

إذا كان أ = {1 ، 2 ، 3} ، ب = {-2 ، -1} ، أوجد: (أ × ب) ، (ب × أ)

أ × ب = {(1 ، -2)، (1 ، -1)، (2 ، -2)، (2 ، -1)، (3 ، -2)، (3 ، -1)}

ب × أ = {(-2 ، 1)، (-2 ، 2)، (-2 ، 3)، (-1 ، 1)، (-1 ، 2)، (-1 ، 3)}

لاحظ أن: (أ × ب) $\neq$ (ب × أ)

مثال (13): إذا كان أ = {$\sqrt{2}$ ، 1 ، 3} فأوجد $أ^2$ ؟

الحل:

أ × أ = $أ^2$ = {(س ، ص) ، س $\in$ أ ، ص $\in$ أ}

$أ^2$ = {($\sqrt{2}$ ، $\sqrt{2}$)، ($\sqrt{2}$ ، 1)، ($\sqrt{2}$ ، 3)، (1 ، $\sqrt{2}$)، (1 ، 1)، (1 ، 3)، (3 ، $\sqrt{2}$)، (3 ، 1)، (3 ، 3)}

وأيضا نلاحظ من دراستنا السابقة أنه إذا كان عدد عناصر المجموعة أ هو ن وعدد عناصر المجموعة ب هو م فإن عدد عناصر أ × ب هو ن م:

فمن المثال (12) نجد ان:

عدد عناصر المجموعة أ هو: ن = 3 وعدد عناصر المجموعة ب هو م = 2

كذلك عدد عناصر المجموعة أ × ب = 6

أي أن عدد عناصر المجموعة أ × ب = ن × م = 3 × 2 = 6

ومن المثال (2) نجد ان عدد عناصر $أ^2$ هو 3 × 3 = 9

مثال (14) :

أوجد ط × ك حيث:

ط = { 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، ... }

ك = { 0 ، 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، ... }

الحل:

ط × ك = { (1 ، 0) ، (1 ، 1) ، (1 ، 2) ، (1 ، 3) ... (2 ، 0) ، (2 ، 1) ، (2 ، 2) ، (2 ، 3) ، ... }

وبذلك نلاحظ أن عدد عناصر المجموعة ط × ك غير منته.

مثال (15) :

أوجد حاصل الضرب الكارتيزي للمجموعتين:

أ = { 1 ، 2 } ، ب = ∅

الحل:

حيث أن: أ × ب = { (س ، ص): س ∈ أ ، ص ∈ ب }

حيث أن المجموعة ب خالية، في هذه الحالة يكون : أ × ب = ∅

مثال (16) :

إذا كانت أ = { 1 ، 2 ، 3 } ، ب = { 1 ، 5 } ، فأوجد:

(أ × ب) ∩ (ب × ب)

(أ × أ) ∪ (ب × ب)

(أ × ب) ∪ (ب × ب)

الحل:

أ × ب = { (1 ، 1) ، (1 ، 5) ، (2 ، 1) ، (3 ، 1) ، (3 ، 5) }

ب × ب = { (1 ، 1) ، (1 ، 5) ، (5 ، 1) ، (5 ، 5) }

(أ × ب) ∩ (ب × ب) = { (1 ، 1) ، (1 ، 5) }

أ × أ = { (1 ، 1) ، (2 ، 1) ، (1 ، 3) ، (1 ، 2) ، (2 ، 2) ، (2 ، 3) ، (3 ، 1) ، (3 ، 2) ، (3 ، 3) }

(أ × ب) ∩ (ب × ب) = { (1 ، 1) ، (1 ، 2) ، (1 ، 3) ، (2 ، 1) ، (2 ، 2) ، (2 ، 3) ، (3 ، 1) ، (3 ، 2) ، (3 ، 3) ، (1 ، 5) ، (5 ، 1) ، (5 ، 5) }

مما سبق نلاحظ الآتي:

1. لأي مجموعتين أ × ب يكون أ × ب ≠ ب × أ .
2. في حالة أ ، ب منتهيان فإن المجموعة أ × ب منتهية.
3. في حالة أ ، ب مجموعتان غير منتهتين فإن المجموعة أ × ب غير منتهية.
4. إذا كانت المجموعة أ أو المجموعة ب خالية فإن أ × ب = $\varnothing$.
5. إذا كانت أ = ب فإن فإن أ × ب تكتب أ^2 ، ب^2.
6. حيث أن حاصل الضرب الكارتيزي لمجموعتين أ ، ب عبارة عن مجموعة فإن جميع العمليات السابقة والتي سبق دراستها على المجموعات يمكن تطبيقها على الضرب الكارتيزي.

6-1 العلاقات الثنائية Binary Relations:

تعرف العلاقات الثنائية من المجموعات أ إلي المجموعة ب بأنها مجموعة جزئية من أ × ب ونرمز لها بالرمز ع : أ ← ب وبذلك يمكن التعبير عن العلاقات كما ذكرنا في المجموعات بطريقتين هما:

(أ) طريقة القائمة وتشمل على كل أو بعض الثنائيات المرتبة المكونة للعلاقة.

(ب) طريقة الوصف وتشمل علي صيغة أو قاعدة تحدد الثنائيات المرتبة التي تنتمي للعلاقة .

مثال(17):

إذا كانت أ = { 1 ، 2 ، 3 } ، ب = { 5 ، 6 } ، فأوجد:

فأوجد بطريقة القائمة العلاقات الثنائية الأتية :

ع$_1$ = { (س ، ص) : ص= س + 3 }

ع$_2$ = { (س ، ص) : س ⩽ ص}

ع$_3$ = { (س ، ص) : س > ص }

الحل:

أ × ب = { (1 ، 5) ، (1 ، 6) ، (2 ، 5) ، (2 ، 6) ، (3 ، 5)، (3 ، 6) }

∴ ع$_1$ = { (2 ، 5) ، (3 ، 6) }

ع$_2$ = { (1 ، 5) ، (1 ، 6) ، (2 ، 5) ، (2 ، 6) ، (3 ، 5)، (3 ، 6) }

ع$_3$ = $\varnothing$

مثال (18):

إذا كانت العلاقة الثنائية ع = { (1 ، 1) ، (2 ، 2) ، (3 ، 3) ، (4 ، 4) } أكتب العلاقة بطريقة الوصف ؟

الحل:

حيث أن س =ص لجميع عناصر (س ، ص) ∈ ع

فإن ع = { (س ، ص) : س = ص }

ملاحظة:

إذا كانت المجموعة أ = المجموعة ب، في هذه الحالة نقول إن ع علاقة من أ إلي أ أي ع: أ ← ب

1-6-1 تساوي علاقتين Equal of two Relations:

بما أن العلاقة الثنائية عبارة عن مجموعة، إذن ينطبق على تساوي العلاقتين تعريف تساوي مجموعتين ، وبالتالي يمكن القول بأن $ع_1$ ، $ع_2$ تحتويان علي الثنائيات المرتبة عينها .

مثال(19):

إذا كانت أ = { 6 ، 7 ، 8 } بين ما إذا كانت العلاقة الاتية والتي معرفة علي أ متساوية أم لا:

$ع_1$ = { (س ، ص) : س = ص }

$ع_2$ = { (س ، ص) : س > ص }

$ع_3$ = { (س ، ص) : س ⩾ ص - 1 }

الحل:

أ × ب = { (6 ، 6) ، (6 ، 7) ، (6 ، 8) ، (7 ، 6) ، (7 ، 7)، (7 ، 8)، (8 ، 6) ، (8 ، 7)، (8 ، 8) }

∴ $ع_1$ = { (6 ، 6) ، (7 ، 7)، (8 ، 8) }

$ع_2$ = { (6 ، 7) ، (6 ، 8) ، (7 ، 8) }

$ع_3$ = { (6 ، 7) ، (6 ، 8) ، (7 ، 8) }

نلاحظ أن $ع_1 \neq ع_2$ ولكن $ع_2 = ع_3$

2-6-1 نطاق ومدي العلاقة Domain and Range of Relation:

عند تعريف العلاقة الثنائية ع وجدنا أن العلاقة الثنائية عبارة مجموعة من الثنائيات المرتبة، ومن ثم يمكن تحديد المجموعة التي تحتوي على جميع العناصر التي تظهر كمركبة أولى من الثنائيات المرتبة التى تنتمي للعلاقة: ع: أ ← ب تسمي هذه المجموعة بنطاق العلاقة ع .

أي أن نطاق ع = {س ∈ أ : يوجد ص ∈ ب ، حيث (س ، ص) ∈ ع }

ويمكن تعريف مدى العلاقة على أنه المجموعة التي تحتوي على جميع العناصر التي تظهر كمركبة ثانية من الثنائيات المرتبة التى تنتمي للعلاقة ع: أ ← ب.

ويستعمل الترميز (نط ع) لتدل نطاق العلاقة ويستعمل الترميز (مد ع) ليدل على مدى العلاقة ع ، فمن البديهي أن يكون نط ع ⊆ أ، مد ع ⊆ أ.

حيث المجموعة ب تسمى بالنطاق المصاحب للعلاقة.

مثال(20) :

إذا كانت العلاقة:

ع = { (1 ، 1) ، (2 ، 2) ، (2 ، 4) ، (3 ، 5) ، (4 ، 8) } أوجد نطاق ومدي العلاقة ع.

الحل:

نطاق ع = {س ∈ أ ، يوجد ص ∈ ب حيث (س ، ص) ∈ ع}

مدى ع = {ص ∈ ب ، يوجد س ∈ أ حيث (س ، ص) ∈ ع}

نط ع = { 1 ، 2 ، 3 ، 4 }

مد ع = { 1 ، 2 ، 4 ، 5 ، 8 }

مثال (21):

إذا كانت أ = { 1 ، 2 ، 3 } ، ب = { 1 ، 2 ، 6 }

والعلاقة ع = {(س ، ص) : س + ص = 3}

معرفة من أ إلى ب ، أكتب عناصر العلاقة ع ثم أوجد نطاقها ومداها.

الحل:

باعتبار أن:

أ × ب = { (1 ، 1) ، (1 ، 2) ، (1 ، 6) ، (2 ، 1) ، (2 ، 2) ، (2 ، 6) ، (-3 ، 1) ، (-3 ، 2) ، (-3 ، 6) }

لذلك فإن:

ع = { (1 ، 2) ، (2 ، 1) ، (-3 ، 6) }

نط ع = { 1 ، 2 ، -3 }

مد ع = { 1 ، 2 ، 6 }

مثال (22):

إذا كانت ع = {(س ، ص) : س^2 + ص^2 = 25} ، المعرفة على مجموعة الأعداد الحقيقية ح أي:

ع : ح ← ح أوجد نطاق ومدى ع .

الحل:

نط ع = [-5 ، 5]

مد ع = [-5 ، 5]

ملخص :

1. المجموعة: هي أن تجمع من الاشياء المتميزه والمعرفة تعريفا جيداً.

2. أنواع المجموعات:

   i. منتهية: (محدودة): يمكن حصر (عدّ) عناصرها.

   ii. غير منتهية: (غير محدودة): لا يمكن حصر (عدّ) عناصرها.

   iii. خالية: لا تحتوي علي العناصر ويرمز لها بالرمز $\varnothing$ أو $\{\ \}$.

3. العمليات على المجموعات :-

   i. التقاطع $(أ \cap ب) = \{س : س \in أ \text{ و } س \in ب\}$.

   ii. الاتحاد $(أ \cup ب) = \{س : س \in أ \text{ أو } س \in ب\}$.

   iii. الاتحاد $(أ - ب) = \{س : س \in أ ، س \notin ب\}$.

   iv. التكميل $(أ^{/}) = \{س : س \in ش ، س \notin أ\}$.

4. عدد المجموعات الجزئية لأي مجموعة عدد عناصرها (ن) تساوي $2^{ن}$.

5. الضرب الكاريتزي $أ \times ب = \{(س،ص) : س \in أ ، ص \in ب\}$.