دولة ليبيا
وزارة التعليم
مركز المناهج التعليمية والبحوث التربوية

الرياضيات

للسنة الثالثة من مرحلة التعليم الثانوي
القسم العلمي

الدرس الثالث

المدرسة الليبية بفرنسا ـ تور

العام الدراسي
1441 / 1442 هـ - 2020 / 2021 م

8-1 : العمليات على المصفوفات:

♦ **عمليتي الجمع والطرح:**

يشترط لجمع أو طرح أي مصفوفتين أن تكونا من نفس النوع حيث بجمع أو بطرح كل عنصر مع نظيره في المصفوفة الأخرى.

> **لاحظ أن:**
> 1-جمع المصفوفات عملية إبدالية.
> 2-طرح المصفوفات ليست عملية إبدالية.

مثال11: إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} 8 & 9 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}$

أوجد أ + ب ، ب + أ ، أ - ب ، ب - أ

الحل:

$$\text{أ} + \text{ب} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -5 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 & 9 \\ 8 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 11 \\ 3 & 11 \end{bmatrix}$$

$$\text{ب} + \text{أ} = \begin{bmatrix} 8 & 9 \\ 8 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -5 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 11 \\ 3 & 11 \end{bmatrix}$$

$$\text{أ} - \text{ب} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -5 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8 & 9 \\ 8 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -7 \\ -13 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\text{ب} - \text{أ} = \begin{bmatrix} 8 & 9 \\ 8 & 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -5 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 13 & 3 \end{bmatrix}$$

مثال12: إذا كانت: س + $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

أوجد المصفوفة س

الحل:

$$\text{س} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\text{س} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -6 & 3 \end{bmatrix}$$

المعكوس الجمعي للمصفوفات:

إذا كان أ ، ب مصفوفتان معرفة عليهما عملية الجمع وكان أ + ب = صفر فإن ب تسمى المعكوس الجمعي للمصفوفة أ حيث ب = -أ مثال ذلك:

$$\begin{bmatrix} 3 & -4 & -2 \\ -4 & 2 & -5 \end{bmatrix} = \text{أ}- \Leftarrow \begin{bmatrix} -3 & 4 & 2 \\ 4 & -2 & 5 \end{bmatrix} = \text{أ}$$

حيث أ + (-أ) = $\underline{0}$

ملحوظة

لكل مصفوفة معكوس جمعي وينتج بعكس إشارة المصفوفة الأصلية فمثلا:

$$\begin{bmatrix} -5 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} = \text{أ}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} = \text{أ}-$$

1-9 : قابلية الضرب لمصفوفتين:

لتكن أ مصفوفة من نوع م×ن ، ب مصفوفة من نوع ك×ل فنقول أن المصفوفتين أ، ب قابلتين للضرب على الصورة أ ب ، إذا كان ن = ك.

عدد أعمدة أ = عدد صفوف ب

ويكون حاصل ضرب المصفوفة أ فى المصفوفة ب من نوع م × ل وذلك بإهمال العدد المشترك الذي يدل على عدد أعمدة أ وعدد صفوف ب.

لاحظ أن ... أ ، ب يكون غير معرف لما ن ≠ ك.

أمثلة توضيحية:

(i) إذا كانت أ مصفوفة من نوع 1×3 ، ب مصفوفة من نوع 3×1.

فإن أ ب = جـ، حيث جـ مصفوفة من نوع 3×3

(ii) إذا كانت أ مصفوفة من نوع 4×2 ، ب مصفوفة من نوع 3×4.

فإن أ ب = جـ، حيث جـ مصفوفة من نوع 3×2

(iii) إذا كانت أ مصفوفة من نوع 3×2 ، ب مصفوفة من نوع 2×1.

فإن أ ب غير معرفة لأن عدد أعمدة أ ≠ عدد صفوف ب ، ويمكن تمثيل عملية ضرب المصفوفتين ف$_1$ ، ف$_2$ على النحو التالي: حيث:

$$\begin{bmatrix} \text{أ}_{\text{ن}1} & \cdots & \text{أ}_{21} & \boxed{\text{أ}_{11}} \\ \text{أ}_{\text{ن}2} & \cdots & \text{أ}_{22} & \text{أ}_{12} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \text{أ}_{\text{م}\text{ن}} & \cdots & \text{أ}_{\text{م}2} & \text{أ}_{\text{م}1} \end{bmatrix} = \text{ف}_1$$

$$\begin{bmatrix} \text{ب}_{\text{ن}1} & \cdots & \text{ب}_{21} & \text{ب}_{11} \\ \text{ب}_{\text{ن}2} & \cdots & \text{ب}_{22} & \text{ب}_{12} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \text{ب}_{\text{م}\text{ن}} & \cdots & \text{ب}_{\text{م}2} & \text{ب}_{\text{م}1} \end{bmatrix} = \text{ف}_2$$

$$\begin{bmatrix} \text{ب}_{\text{ن}1} & \cdots & \text{جـ}_{21} & \boxed{\text{جـ}_{11}} \\ \text{ب}_{\text{ن}2} & \cdots & \text{جـ}_{22} & \text{جـ}_{12} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \text{جـ}_{\text{م}\text{ن}} & \cdots & \text{جـ}_{\text{م}2} & \text{جـ}_{\text{م}1} \end{bmatrix} = \text{ف}_1 \text{ف}_2$$

فالعنصر $ج_{11}$ يكون مجموع حواصل ضرب (عناصر الصف الأول من المصفوفة $ف_1$ في عناصر العمود الأول من المصفوفة $ف_2$)

أي أن العنصر $ج_{11} = أ_{11} ب_{11} + أ_{21} ب_{12} + ... + أ_{1ن} ب_{م1}$

فالعنصر $ج_{21}$ يحصل عليه مجموع حواصل ضرب (عناصر الصف الأول من المصفوفة $ف_1$ في عناصر العمود الثاني من المصفوفة $ف_2$)

أي أن العنصر $ج_{21} = أ_{12} ب_{11} + أ_{22} ب_{12} + ... + أ_{2ن} ب_{م1}$

فالعنصر $ج_{22}$ يتكون من مجموع حواصل ضرب (عناصر الصف الثاني من المصفوفة $ف_2$ في عناصر العمود الثاني من المصفوفة $ف_2$)

أي أن العنصر $ج_{22} = أ_{12} ب_{21} + أ_{22} ب_{22} + ... + أ_{2ن} ب_{م2}$

وهكذا نحصل على المصفوفة $ف_3 = ف_2 ف_1$ حيث:

$$ف_3 = \begin{bmatrix} ج_{11} & ج_{21} & ... & ج_{1ن} \\ ج_{12} & ج_{22} & ... & ج_{2ن} \\ ... & ... & ... \\ ... & ... & ... \end{bmatrix}$$

مثال 13 :

إذا كان $\begin{bmatrix} أ \\ ب \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ أوجد قيمتى أ ، ب

الحل:

$$\begin{bmatrix} أ \\ ب \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4أ & 3أ \\ 4ب & 3ب \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ $4أ = -4$ $\quad$ $أ = -1$

$\therefore$ $4ب = 4$ $\quad$ $ب = 1$

مثال 14 :

إذا كان $س \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} + ص \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ أوجد س ، ص

الحل:

$$\begin{bmatrix} 3س \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ص \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 3س + ص \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

من تساوي المصفوفتين نجد أن: $ص = 0$ $\quad \therefore$ $3 س + ص = 1$

$3 س + 0 = 1 \Leftarrow س = \frac{1}{3}$

مثال 15 :

إذا كانت : أ = $\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

أوجد أ ب ، ب أ إن أمكن ذلك.

الحل:

أ ب

$3 \times 2 = 2 \times 2$

الناتج 2×3

أ ب = $\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{أ}_{31} & \text{أ}_{21} & \text{أ}_{11} \\ \text{أ}_{32} & \text{أ}_{22} & \text{أ}_{12} \end{bmatrix}$

حيث :

$\text{أ}_{11} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = 2 \times 2 + 5 \times 2 = 4 + 10 = 14$

$\text{أ}_{21} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 2 \times 0 + 5 \times 1 = 0 + 5 = 5$

وهكذا ...

مما سبق ينتج أن:

أ ب = $\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 & 5 & 14 \\ 23 & 1 & 10 \end{bmatrix}$

ب أ نجد أن عدد الأعمدة لا تسوي عدد الصفوف

$3 \times 2 \neq 3 \times 2$

$\therefore$ لا يمكن الضرب لعدم تحقق الشرط.

مسألة (1) :

إذا كانت أ ، ب مصفوفتين مربعتين على نفس النوع ... فأشرح لماذا ؟

$(أ + ب)^2 \neq أ^2 + 2أب + ب^2$ ← (i)

$(أ + ب)(أ - ب) \neq أ^2 - ب^2$ ← (ii)

$(أب)^2 = أ^2ب^2 \Leftrightarrow أب = بأ$ ← (iii)

بينما $(أب)^2 = أ^2 - ب^2$ دائما .

الحل:

$(أ + ب)^2 = (أ + ب)(أ + ب)$ ← (i)

$= أ^2 + أب + بأ + ب^2$

$\neq أ^2 + 2أب + ب^2$ لأن $أب \neq بأ$

♦ حل آخر:

$(أ + ب)^2 = (أ + ب)(أ + ب)$

$= أ(أ + ب) + ب(أ + ب)$ .... (التوزيع)

$= أ^2 + أب + بأ + ب^2$

$= أ^2 + 2أب + ب^2$ .... (الضرب ليس تبادليا)

$(أ + ب)(أ - ب) = أ^2 - أب + بأ - ب^2$ ← (ii)

$\neq أ^2 - ب^2$ لأن $أب \neq بأ$

أو : $(أ + ب)(أ - ب) = أ(أ - ب) + ب(أ - ب)$

$= أ^2 - أب + بأ - ب^2$

$\neq أ^2 - ب^2$ لنفس الشرط

$(أب)^2 = (أب)(أب) = أ(بأ)ب$ ← (iii)

$(أب)^2 = أ(بأ)ب \quad (*)$

$أ^2ب^2 = أأبب = أ(أب)ب \quad (**)$

وبمقارنة العلاقتين (*) (**) نجد أن:

$(أب)^2 = أ^2ب^2$ إذا وفقط إذا كان نجد : $أب = بأ$

مسألة (2) :

هل التقرير الآتي صحيح (مدعما إجابتك بمثال).

$\text{أ ب} = \underline{0}$ ، $\text{ب} \neq \underline{0}$ ، $\text{ب} \neq \underline{0}$

حيث أ ، ب مصفوفتين مربعتين.

الحل:

التقرير غير صحيح، هناك حالات تكون فيها المصفوفة $\text{أ} \neq \underline{0}$ ،
وكذلك $\text{ب} \neq \underline{0}$ بينما $\text{أ ب} = \underline{0}$ ومثال ذلك.

$$\text{أ} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ ، } \text{ب} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\text{أ ب} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ $\text{أ ب} = \underline{0}$ ، حيث $\text{أ} \neq \underline{0}$ ، $\text{ب} \neq \underline{0}$

مسألة (3) :

إذا كانت $\text{أ} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ **أثبت أن** $\text{أ}^{\text{ن}} = 2^{\text{ن}-1}\text{أ}$ **حيث عدد ن صحيح موجب**

$$\text{أ}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 2\text{أ}$$

$$\text{أ}^3 = 2 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 4\text{أ} = 2^2\text{أ}$$

$$\text{أ}^4 = 4 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 8\text{أ} = 2^3\text{أ}$$

وهكذا ...

$$\text{أ}^{\text{ن}} = 2^{\text{ن}-1}\text{أ}$$