دولة ليبيا
وزارة التعليم
مركز المناهج التعليمية والبحوث التربوية

الرياضيات

للصف الأول من مرحلة التعليم الثانوي

الدرس الرابع

المدرسة الليبية بفرنسا ـ تور

العام الدراسي:
1441 / 1442 هـ . 2020 / 2021 م.

الأسس والأعداد غير القياسية واللوغاريتمات
Indices and Irrational Numbers Logarithms

جدوال لوغاريتمية

إن الهدف من الأسس (الجمع أسس) هو تبسيط كتابة وحساب الأعداد الكبيرة جدا أو الصغيرة جدا، وهذا تماما ما كان يصبو إليه العالم الاسكتلندي "جون نابير". حين اخترع اللوغاريتمات (أو الأس).

جون نابير

ولأنه كان أول من استخدم العلامة العشرية في شكلها الحديث فكان أساس اللوغاريتمات التي اخترعها 10 على سبيل المثال: $2713 = (10)^{3.43345}$ كتبت على الصورة اللوغاريتمية الآتية: لو 2713= 3.43345

وكذلك $3.6 = (10)^{0.55630}$ كتبت على الصورة اللوغاريتمية الآتية: لو 3.6= 0.55630

وقد نظم نابير لوغاريتمه في جدوال يسهل تتبعها ولضرب 2713 و 3.6، يجب البحث في جدول اللوغاريتمات لايجاد لوغاريتم ، وعندئذ يتم جمع العددين $0.55630 + 3.43345$ وعند قراءة المجموع 3.98975 من جدول اللوغاريتمات نحصل على العدد المطلوب وهو 9769 ، كانت طريقة العمل هذه لاستخراج نواتج الأعداد مفيدة للغاية في الماضي لأن الآلات الحاسبة لم تكن متاحة.

في نهاية هذا الفصل سوف تكون قادرا على أن:

- تكتب العدد على صورة أسية باستخدام أساس معطى.
- تعادل أي كمية مرفوعة للأس صفر بالعدد 1 .
- تطبق قوانين الأسس الخمسة.
- تطبق قاعدة الأس الصغرى.
- تعبر عن الأعداد ذات الأسس السالبة كأعداد ذات أسس موجبة.
- تطبق قوانين الأسس الكسرية.
- تحل معادلات تتضمن أسسا.
- تعريف العدد عير القياسي.
- تطبيق قوانين العمليات.
- حل المعادلة التي تشمل جذور.
- تعريف اللوغاريتم وعلاقة الأسس باللوغاريتم.
- تطبق قوانين اللوغاريتمات.
- حل المعادلات الأسية باستخدام اللوغاريتمات.

1-1 الأسس Indices

العدد المضروب في نفسه أي عدد من المرات يمكن ببساطة كتابته باستخدام الأسس على سبيل المثال...

$$2 \times 2 \times 2 = 2^3$$

$$3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^5$$

$$د \times د \times د \times د = د^4$$

بصفة عامة: $أ^{س} = \underbrace{أ \times أ \times أ .... \times أ}$

إلى **س** من العوامل لكل **س** = 1 ، 2 ، 3 ، ....

أس

$$8 = 2^3$$

أساس

تسمى 2^3 الصورة الأسية (والعدد 2 هو الأساس) للعدد 8 .

بصفة عامة:

إذا كان $أ^{س} = ن$، فإن $أ^{س}$ هي الصورة الأسية لـ ن حيث أ هي الأساس، س هي الأس أو القوة الجبرية

مثال 1 :

(أ) عبر عن كل مما يأتي كناتج ضرب عوامل أولية:

(i) 2^4 (ii) $س^5$ حيث س عدد أولي.

(ب) أكتب كلا مما يأتي في الصورة الأسية.

(i) $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$ (ii) د × د × د × د

(جـ) أكتب 9×9 في الصورة الأسية باعتبار:

(i) الأساس 9 (ii) الأساس 3.

(د) أكتب 625 في الصورة الأسية مستخدما الأساس 5.

الحل:

(أ) (i) $2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2$

(ii) $س^5 = س \times س \times س \times س \times س$

(ب)

(i) $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^6$

(ii) $د \times د \times د \times د = د^4$

(جـ) (i) $9 \times 9 = 9^2$

(ii) $9 \times 9 = (3 \times 3) \times (3 \times 3)$

$= 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^4$

$\therefore\ 9 \times 9 = 3^4$ للأساس (3)

(د) $625 = 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 5^4$

تمرين (2 - أ)

(1) أكتب كلا مما يأتي في صورة ناتج حاصل ضرب عوامل أولية.

(أ) 3^5 (ب) 5^3 (جـ) 2^6 (د) $س^3$ (هـ) $ص^5$

(2) أكتب كلا مما يأتي في الصورة الأسية.

(أ) $2 \times 2 \times 2 \times 2$ (ب) $10 \times 10 \times 10 \times 10$

(هـ) ط × ط × ط × ط × ط × ط (د) أ × أ × أ × أ

(3) أكتب $9 \times 9 \times 9$ في الصورة الأسية مستخدما .

(أ) الأساس 9. (ب) الأساس 3 .

(4) أكتب الأتي في الصورة الأسية مستخدما الأساس الموجود بين القوسين.

(أ) 125 (الأساس 5) (ب) 64 (الأساس 4) (جـ) 49 (الأساس 4)

(جـ) 1000 (الأساس 10) (هـ) 216 (الأساس 6) (و) 256 (الأساس 2)

2-2 قوانين الأسس Laws of Indices

عندما تكون الأعداد في صورة أسية فإنها لا تكون أبسط في كتابتها فحسب ولكنها تكون أيضا أبسط في استخدامها في الحسابات. إن قوانين الأسس التالية تستخدم في العمليات الحسابية التي تتضمن الضرب والقسمة.

1-2-2 القانون الأول للأسس First Laws of Indices

لقد رأينا أن: $2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2$

ولهذا $2^2 = 2 \times 2$

$$2^2 \times 2^4 = (2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2 \times 2)$$
$$= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$$
$$= 2^6$$
$$\therefore\ 2^2 \times 2^4 = 2^{(2+4)}$$
$$= 2^6$$

مثال 2:

بسط كلا مما يأتي معطيا إجابتك في صورة أسية:

(أ) $5^3 \times 5^2$ (ب) $3^5 \times 3^3$

الحل:

(أ)

$$5^3 \times 5^2 = (5 \times 5 \times 5) \times (5 \times 5)$$
$$= 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5$$
$$= 5^5$$
$$5^3 \times 5^2 = 5^{(3+2)}$$
$$= 5^5$$

(ب)

$$3^5 \times 3^3 = (3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3) \times (3 \times 3 \times 3)$$
$$= 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$$
$$= 3^8$$
$$3^5 \times 3^3 = 3^{(5+3)}$$
$$= 3^8$$

لاحظ أنه في كل مثال: كلا العددين الناتجين لهما نفس الأساس يمكن استخدام نفس الطريقة عندما يكون الأساس غير معلوم

مثال 3:

اختصر كلا من الأتي معطيا إجابتك في الصورة الأسية:

(أ) $أ^2 \times أ^5$ (ب) $د \times د^4$

الحل:

(أ) $أ^2 \times أ^5 = \underbrace{(أ \times أ)}_{\text{عاملان}} \times \underbrace{(أ \times أ \times أ \times أ \times أ)}_{5\ \text{عوامل}}$

$= \underbrace{أ \times أ \times أ \times أ \times أ \times أ \times أ}_{(5+2)\ \text{عوامل}}$

$أ^2 \times أ^5 = أ^{(5+2)} = أ^7$

(ب) $د \times د^4 = د^1 \times د^4$

$= د \times د \times د \times د = د$

$د^1 \times د^4 = د \times د^4 = د^{(4+1)} = د^5$

القانون الأول للأسس:

عندما نضرب الأعداد أو المجاهيل المكتوبة في صورة أسية والتي لها نفس الأساس في بعضها البعض تجمع الأسس ولهذا:

$أ^{س} \times أ^{ص} = أ^{(س+ص)}$

ملحوظة:
لا تحفظ هذاالقانون
تذكر هذه الصورة للقانون

مثال 4:

اختصر كلا من الأتي معطيا إجابتك في الصورة الأسية:

(أ) $5^3 \times 5^4$ (ب) $أ^7 \times أ^5$

ملحوظة:
استخدم القانون الأول للأسس.

الحل:

(أ) $5^3 \times 5^4 = 5^{(4+3)} = 5^7$

(ب) $أ^7 \times أ^5 = أ^{(5+7)} = أ^{12}$

تمرين (2 - ب)

استخدم القانون الأول للأسس في اختصار الأتي:

(أ) $2^3 \times 2^2$ (ب) $3^2 \times 3^2$ (جـ) $2^4 \times 2^5$ (د) $م^2 \times م^4$

(هـ) $أ^6 \times أ^{10}$ (و) $س^5 \times س^7$ (ز) $ع^7 \times ع^7$

يستخدم القانون الأول للأسس في تبسيط الحدود الأكثر تعقيدا، ويجب أن نتذكر دائما أن هذا القانون ينطبق فقط على الأعداد التي يعبر عنها بنفس الأساس فقط.

مثال 3:

اختصر كلا من الأتي معطيا إجابتك في الصورة الأسية:

(أ) $س^2 ص^3 \times س^3 ص^4$ (ب) $2 س^3 ص^2 \times 3 س ص^4$

الحل:

(أ) $س^2 ص^3 \times س^3 ص^4 = س^2 \times ص^3 \times س^3 \times ص^4$

$= (س^2 \times س^3) \times (ص^3 \times ص^4)$

$= س^{(2+3)} \times ص^{(3+4)}$

$= س^5 \times ص^7$

$= س^5 ص^7$

ملحوظة:

تجمع الأساسات المتشابهة معا.

تجمع الأرقام والأساسات المتشابهة معا.

(ب) $2 س^3 ص^2 \times 3 س ص^4 = 2 \times س^3 \times ص^2 \times 3 \times س \times ص^4$

$= (2 \times 3) \times (س^3 \times س) \times (ص^2 \times ص^4)$

$= 6 \times س^{(3+1)} \times ص^{(2+4)}$

$= 6 \times س^4 \times ص^6$

$= 6 س^4 ص^6$

2-2-2 القانون الثاني للأسس Second Laws of Indices

في صورة عوامل: $3^6 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$ ، $3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3$

$$\therefore \frac{3^6}{3^4} = \frac{3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3}{3 \times 3 \times 3 \times 3} = 3 \times 3 = 3^2$$ عكس الصيغة

لاحظ أن الأس 2 فى الإجابة هو الفرق بين الأس 6 والأس 4 في المقام والبسط على التوالي:

$$\therefore \frac{3^6}{3^4} = 3^{(6-4)} = 3^2$$

وبالمثل: $\text{م}^4 = \text{م} \times \text{م} \times \text{م} \times \text{م}$ و $\text{م}^1 = \text{م}$

$$\therefore \frac{\text{م}^4}{\text{م}} = \frac{\text{م} \times \text{م} \times \text{م} \times \text{م}}{\text{م}} = \text{م} \times \text{م} \times \text{م}$$

الأس الذي رفعت إليه في الإجابة هو الفرق بين أس البسط وأس المقام.

$$\therefore \frac{\text{م}^4}{\text{م}} = \text{م}^{(4-1)} = \text{م}^3$$

القانون الثاني للأسس:

عندما نقسم الأعداد أو المجاهيل المكتوبة في الصورة الأسية ويكون لها نفس الأساسات اللاصفرية ، فإن أس الكمية يحسب بطرح أس المقام من أس البسط:

$$\text{أ}^{\text{س}} \div \text{أ}^{\text{ص}} = \text{أ}^{(\text{س}-\text{ص})} \text{ ، } \text{أ} \neq 0$$

ملحوظة:
لا تحفظ هذاالقانون
تذكر هذه الصورة للقانون

ملحوظة:
استخدم القانون الثاني للأسس.

مثال 6:

(أ) $\frac{2^7}{2^2}$ (ب) $\text{م}^8 \div \text{م}^5$

الحل:

(أ) $\frac{2^7}{2^2} = 2^{(7-2)} = 2^5$

(ب) $\text{م}^8 \div \text{م}^5 = \text{م}^{8-5} = \text{م}^3$

تمرين (2 - هـ)

(1) اختصر الآتي:

(أ) $\frac{\text{س}^2\,\text{ص}^3}{\text{س}^2\,\text{ص}^2}$ (ب) $\frac{\text{أ}^6\,\text{ص}^7}{\text{أ}^4\,\text{ص}^3}$ (جـ) $\frac{\text{ن}^5\,\text{هـ}^{10}}{\text{ن}^2\,\text{هـ}^4}$

(د) $\frac{\text{هـ}^4\,\text{د}^7}{\text{هـ}^3\,\text{د}^6}$ (هـ) $\frac{\text{ذ}^{14}\,\text{ت}^8}{\text{ذ}^9\,\text{ت}^5}$ (و) $\frac{\text{ص}^4\,\text{ع}^{15}}{\text{ص}\,\text{ع}^3}$

(2) استخدم القانون الأول والثاني في اختصار الآتي:

(أ) $\frac{2^3\times 2^6}{2^2}$ (ب) $\frac{3^3\times 3^7}{3^5}$ (جـ) $\frac{2^6\times 2^{15}}{2^{12}}$

(د) $\frac{2\times 2^2\times 2^8}{2^5}$ (هـ) $\frac{3\times 3^3\times 3^{10}}{3^7}$ (و) $\frac{2^4\times 2^2\times 2^8}{2\times 2^{12}}$

(ز) $\frac{3\times 3^9\times 3^7}{3^5\times 3^{11}}$

(3) اختصر الآتي:

(أ) $\frac{\text{س}^2\times\text{س}^2}{\text{س}^4}$ (ب) $\frac{\text{أ}^7\times\text{أ}^5}{\text{أ}^9}$ (جـ) $\frac{\text{ت}^5\times\text{ت}^3}{\text{ت}^4}$

(د) $\frac{\text{أ}^5\times\text{أ}^6}{\text{أ}^8}$ (هـ) $\frac{3\text{ن}^3\times 5\text{ن}^2}{\text{ن}^4}$ (و) $\frac{6\text{س}^3\times 2\text{س}^5}{3\text{س}^3}$

(ز) $\frac{\text{ت}^3\times\text{ت}^9}{\text{ت}^4\times\text{ت}^6}$ (ح) $\frac{\text{ن}^5\times\text{ن}^8}{\text{ن}^2\times\text{ن}^4}$

3-2-2 قاعدة الأس الصفري Zero Index Rule

أوجد المقدار $\frac{2^3}{2^3}$ مستخدما القانون الثاني للأسس.

$\frac{2^3}{2^3} = 2^{(3-3)} = 3^0$ في صورة العوامل: $\frac{2^3}{2^3} = \frac{2\times 2\times 2}{2\times 2\times 2} = 1$

$\therefore\ 2^0 = 1$

وبالمثل:

$$\text{أ}^5 \div \text{أ}^5 = \frac{\text{أ}^5}{\text{أ}^5} = \text{أ}^{(5-5)} = \text{أ}^0$$

ولكن:

$$\text{أ}^5 \div \text{أ}^5 = \frac{\text{أ}\times\text{أ}\times\text{أ}\times\text{أ}\times\text{أ}}{\text{أ}\times\text{أ}\times\text{أ}\times\text{أ}\times\text{أ}} = 1$$

$\therefore\ \text{أ}^0 = 1$

قاعدة الأس الصفري إذا رفع عدد غير صفري أو مجهول للقوة الجبرية صفر فتكون . الإجابة 1 ولهذا:

$$\text{أ}^0 = 1 \ ،\ \text{أ} \neq 0$$

مثال 8: احسب قيمة:

(أ) $م^0$ (ب) $4أ^0$

ملحوظة:
استخدم قاعدة الأس الصفري

الحل:

(أ) $م^0 = 1$ (ب) $4أ^0 = 4 \times 1 = 4$

تمرين (2 – و)

(1) 3^0 (2) 5^0 (3) 7^0 (4) $ط^0$

(5) $س^0$ (6) $3ص^0$ (7) $5د^0$

4-2-2 القانون الثالث للأسس Third Law of Indices

تأمل التعبير $(3^2)^3$ بمعنى "تكعيب 3 تربيع"

في صورة العوامل: $(3^2)^3 = 3^2 \times 3^2 \times 3^2$

3 عوامل

$= 3^{(2+2+2)} = 3^6$

ملحوظة:
استخدم القانون الأول للأسس.

ولذلك في تقدير قيمة $(3^2)^3$ ضربنا في الحقيقة الأسس

وبالمثل:

$(أ^3)^4$ تعنى (تكعيب مرفوعة لأس 4)

في صورة العوامل: $(أ^3)^4 = أ^3 \times أ^3 \times أ^3 \times أ^3$

4 عوامل

$= أ^{(3+3+3+3)} = أ^{(4\times3)} = أ^{12}$

استخدم القانون الثالث للأسس.

القانون الثالث للأسس:

عندما نرفع الأعداد أو المجاهيل المكتوبة في صورة أسية ويكون لها نفس الأساس إلى قوة جبرية أخرى، تضرب الأسس ولهذا:

$$(أ^{س})^{ص} = أ^{(س\times ص)} = أ^{س ص}$$

لا تحفظ هذاالقانون
تذكر هذه الصورة للقانون

مثال 9: عبر عن كل ما يأتي فى أبسط صورة:

(أ) $(3^4)^3$ (ب) $(و^6)^5$

الحل:

(أ) $(3^4)^3 = 3^{(4\times3)} = 3^{12}$ (ب) $(و^6)^5 = و^{(4\times3)} = و^{30}$

يمكن استخدام القوانين السابقة للأسس في مجموعات مؤتلفة لتبسيط التعبيرات الأكثر تعقيدا وتذكر الأتي:

1- يمكن استخدام قوانين الأسس فقط عندما تكون الأعداد أو المجاهيل معبرا عنها بنفس الأساس.

2- يجب تبسيط التعبيرات الموجودة داخل الأقواس قبل استخدام قوانين أخرى للأسس.

مثال 10: عبر عن كل من الأتي في أبسط صورة:

(أ) $(أ^3)^2 \times أ^5$ (ب) $ب^{10} \div (ب^2)^5$

(جـ) $(س^4)^2 \times (س^2)^3$ (د) $\frac{(ص^3)^4}{(ص^2)^5}$

الحل:

(أ) $(أ^3)^2 \times أ^5 = أ^{(3\times2)} \times أ^5$

$= أ^6 \times أ^5$

$= أ^{(6+5)} = أ^{11}$

(ب) $ب^{10} \div (ب^2)^5 = ب^{10} \div ب^{(2\times5)}$

$= ب^{10} \div ب^{10}$

$= ب^{(10-10)}$

$= ب^0 = 1$

(جـ) $(س^4)^2 \times (س^2)^3 = س^{(4\times2)} \times س^{(2\times3)}$

$= س^8 \times س^6$

$= س^{(8+6)} = س^{14}$

(د) $\frac{(ص^3)^4}{(ص^2)^5} = \frac{ص^{(3\times4)}}{ص^{(2\times5)}}$

$= \frac{ص^{12}}{ص^{10}} = ص^{12} \div ص^{10}$

$= ص^{(12-10)} = ص^2$