دولة ليبيا
وزارة التعليم
مركز المناهج التعليمية والبحوث التربوية

الرياضيات

للسنة الثالثة من مرحلة التعليم الثانوي
القسم العلمي

الدرس الرابع

المدرسة الليبية بفرنسا ـ تور

العام الدراسي

1441 / 1442 هـ - 2020 / 2021 م

10-1: محورة المصفوفة Matrix of Determinant

إذا كانت ف مصفوفة من النوع م × ن وقمنا بتحوير على المصفوفة ، أي وضعنا الصفوف أعمدة والعكس، فإننا نحصل على مصفوفة من النوع ن × م تسمى محورة المصفوفة ف ويرمز لها بالرمز ف/.

أي أنه

إذا كانت: ف = $[$ أ$_{ر و}]_{م \times ن}$ (حيث: ر = 1، 2، ... ، م ، و = 1، 2، ... ، ن)

فإن: ف/ = $[$ أ$_{ر و}]_{ن \times م}$ (حيث: و = 1، 2، ... ، ن ، ر = 1، 2، ... ، م)

تذكر

محورة (محورة) أ = أ ⇐ (أ/)/ = أ

محورة (أ+ب) = محورة أ + محورة ب

⇐ (أ+ب)/ = أ/ + ب/

محورة (أب) = محورة ب + محورة أ

⇐ (أب)/ =ب/ أ/

مثال 16 : إذا كان: ل = $\begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ ، م = $\begin{bmatrix} 3 & 1- \\ 0 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ حل المعادلة: س/ + 2ل/ = م

حيث س/ محورة المصفوفة س ، ل/ محورة المصفوفة ل .

الحل :

$$س^{/} + 2 \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}^{/} = \begin{bmatrix} 3 & 1- \\ 0 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\Leftarrow \quad س^{/} + \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 8 & 6 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1- \\ 0 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$

بإضافة المعكوس الجمعي للمصفوفة لطرفي المعادلة $\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 8 & 6 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$

$$\therefore \; س^{/} + \underline{O} = \begin{bmatrix} 3 & 1- \\ 0 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 8 & 6 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \; س^{/} = \begin{bmatrix} 3- & 3- \\ 8- & 5- \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$ حيث $\underline{O}$ هي المصفوفة الصفرية

$$\therefore \; س = (س^{/})^{/} = \begin{bmatrix} 3 & 5- & 3- \\ 1 & 8- & 3- \end{bmatrix}$$

11- المصفوفة المثلثية العلوية Upper Triangular Matrix

هي مصفوفة مربعة بها مثلث صفري أسفل القطر الرئيسي مثل:

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 9 & 4 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

القطر الرئيسى

ملحوظة:
شرط المثلثية العلوية :
$أ_{رى} = 0$ عندما $ر > ى$

12- المصفوفة المثلثية السفلية Lower Triangular Matrix

هي مصفوفة مربعة بها مثلث صفري أعلى القطر الرئيسي مثل:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 0 & 2- & 8 \\ 1 & 3 & 9 \end{bmatrix}$$

القطر الرئيسى

ملحوظة:
شرط المثلثية السفلية :
$أ_{رى} = 0$ عندما $ر < ى$

13- المصفوفة المتماثلة Symmetrical Matrix

هي مصفوفة مربعة عناصرها متماثلة حول القطر الرئيسي بنفس الإشارة أي أن المصفوفة تساوي محورتها مثل:

$$\begin{bmatrix} \boxed{9-} & 4 & 3 \\ 8 & 2 & 4 \\ 5 & 8 & \boxed{9-} \end{bmatrix}$$

القطر الرئيسى

ملحوظة:
في المصفوفة المتماثلة:
$أ = أ^{/}$ أو $أ_{رى} = أ_{ىر}$

مثال 17 : إذا كانت: $أ = \begin{bmatrix} ص & 2س & 5 \\ 16 & 9 & 8 \\ 3 & 4ع & 2ع + 1 \end{bmatrix}$

الحل :

أوجد قيم س ، ص ، ع التي تجعل المصفوفة أ متماثلة.

2 س $= 8 \longrightarrow$ س $= 4$

4ع $= 16 \longrightarrow$ ع $= 4$

2ع $+ 1 =$ ص $\xrightarrow{ع = 4} 2 \times 4 + 1 =$ ص

$\therefore$ ص $= 9$

مثال 18 :

إذا كانت المصفوفة ب = $\begin{bmatrix} \text{س}^2 - 1 & 4 \\ 8 & 3 \end{bmatrix}$ متماثلة أوجد قيمة س .

الحل :

$\text{س}^2 - 1 = 3$

$\text{س}^2 = 4$

$\text{س} = \pm 2$ $\quad\quad$ $\text{س} = |2|$

14. المصفوفة ملتوية التماثل «عكسية التماثل»

Skew Symmetric Matrix

هي مصفوفة مربع قطرها الرئيسي أصفار وباقي عناصرها متماثلة حول القطر الرئيسي بعكس الإشارة أي أن المصفوفة= - محورتها مثل:

$$\text{أ} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ \boxed{-4} & 0 & -3 \\ 0 & \boxed{4} & -2 \end{bmatrix}$$

ملحوظة:
في المصفوفة ملتوية التماثل يكون:
$\text{أ} = -\text{أ}'$
أو $\text{أ} + \text{أ}' = 0$
$\text{أ}_{\text{ر ى}} = \text{أ}_{\text{ى ر}}$

مثال 19 :

أوجد قيم أ ، ب ، ج ، ى التي تجعل المصفوفة التالية ملتوية التماثل.

$$\begin{bmatrix} \text{ج} + \text{ى} & 3 & \text{أ} - \text{ب} \\ \text{ب} - \text{ى} & 0 & \text{أ} \\ 3\text{ب} + \text{ج} & -6 & 8 \end{bmatrix}$$

الحل :

أ = -3 ، أ = ب ، ب = -3 ج

∴ ب = -3 ، ج = 1

ب - ى = + 6

ى = ب - 6

ى = -9

تذكر أن...
أ - ب = 0
أو 3ب + ج = 0
لأنها من عناصر القطر الرئيسي

تذكر

في المصفوفة ملتوية التماثل تكون العناصر متماثلة حول القطر الرئيسي الذي يتكون من أصفار ولكن بتغير إشارات العناصر... أثبت ذلك.

ضع في ذاكرتك دائما

إذا كانت أ أية مصفوفة مربعة فإن:

1- (أ + أ/) مصفوفة متماثلة

مصفوفة + محورتها = مصفوفة متماثلة

2- (أ × أ/) مصفوفة متماثلة

مصفوفة × محورتها = مصفوفة متماثلة

3- (أ − أ/) مصفوفة ملتوية التماثل

مصفوفة − محورتها = مصفوفة ملتوية متماثلة

4- يمكن كتابة المصفوفة أ كمجموع مصفوفتين إحداهما متماثلة والأخرى ملتوية التماثل.

⇦ أ = س + ص

حيث : س = $\frac{1}{2}$ (أ + أ/)، ص = $\frac{1}{2}$ (أ − أ/) ، حيث أ/ مكملة المصفوفة أ

مثال 20 :

(i). أوجد المصفوفة ب بحيث: ب ر ى = أ ى ر لكل قيم ر ، ى .

(ii). أوجد المصفوفة جـ بحيث: جـ = $\frac{1}{2}$ (أ + ب) .

(iii). أوجد المصفوفة ى بحيث: ى = $\frac{1}{2}$ (أ − ب) .

(iv). تحقق من أن: أ = جـ + ى . وماذا تلاحظ ؟

حيث: ب = $\begin{bmatrix} 10 & 5 & 2- \\ 3- & 4 & 3 \\ 2 & 1- & 1- \end{bmatrix}$

الحل :

(i) ب ر ى = أ ى ر ⟵ ب = أ/ .

أي أن المصفوفة ب = محورة المصفوفة أ .

ب = $\begin{bmatrix} 10 & 3 & 2- \\ 3- & 4 & 3 \\ 2 & 3- & 1- \end{bmatrix}$

(i). جـ = $\frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 10 & 5 & 2- \\ 3- & 4 & 3 \\ 2 & 1- & 1- \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1- & 3 & 2- \\ 1- & 4 & 5 \\ 2 & 3- & 10 \end{bmatrix}\right)$

جـ = $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 9 & 8 & 4- \\ 4- & 8 & 8 \\ 2 & 4- & 9 \end{bmatrix}$ ∴ فهي مصفوفة متماثلة.

(ii). د = $\frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 10 & 5 & -2 \\ -3 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 3 & -2 \\ -1 & 4 & 5 \\ 2 & -3 & 10 \end{bmatrix} \right)$

د = $\begin{bmatrix} -11 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 11 \end{bmatrix}$ ∴ فهي مصفوفة ملتوية التماثل.

(iii). جـ + د = $\frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} -11 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 11 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 & 8 & -4 \\ -4 & 8 & 8 \\ 2 & -4 & 9 \end{bmatrix} \right)$

جـ + د = $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -2 & 6 & -4 \\ -2 & 8 & 10 \\ 2 & -6 & 20 \end{bmatrix}$

جـ + د = $\begin{bmatrix} -1 & 3 & -2 \\ -1 & 4 & 5 \\ 2 & -3 & 10 \end{bmatrix}$ = أ

جـ = $\frac{1}{2}$ (أ + أ′) ∴ وهي متماثلة.

د = $\frac{1}{2}$ (أ − أ′) ∴ وهي ملتوية متماثلة.

جـ + د = $\frac{1}{2}$ (أ + أ′) = $\frac{1}{2}$ (أ − أ′) ∴ جـ + د = أ.