دولة ليبيا
وزارة التعليم
مركز المناهج التعليمية والبحوث التربوية

الرياضيات

للسنة الثانية بمرحلة التعليم الثانوي
القسم العلمي

الاسبوع الرابع

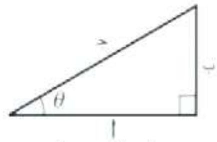
المدرسة الليبية بفرنسا ـ تور

العام الدراسي:
1441 / 1442 هـ . 2020 / 2021 م.

2 قواعد الجيب وجيب التمام والإتجاهات

قواعد الجيب، وجيب التمام ،والإتجاهات

Sunc and Cosinc Rulc and Bcarings

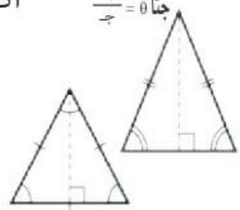


$حـ^2 + أ^2 + ب^2$

ظا $\theta = \frac{ب}{أ}$

جا$\theta = \frac{ب}{جـ}$

جتا$\theta = \frac{أ}{جـ}$



رأينا في الصف الأول ثانوي كيفية استخدام نظرية فيتاغورس والدوال المثلثية لحل المثلثات قائمة الزاوية .وحل المثلث يعني إيجاد أطوال الأضلاع وقياسات الزاويا غير المعلومة .وإذا كان المثلث لا يوجد به زاوية قائمة أو كان متساوي الساقين أو متساوي الأضلاع فأنه ليس من الملائم استخدام نضرية فيتاغورس والدوال المثلثية لحلها

اكتشف لنفسك قواعد جديدة لحل المثلثات العامة من الأنشطة في هذا الفصل

في نهاية هذا الفصل سوف تكون قادراً على

* استخدام قاعدة الجيب وقاعدة جيب التمام لحل المثلثات التى ليست قائمة

* تطبيق الصيغة :المساحة = $\frac{1}{2}$أ ب جا حـ

للحصول على المساحة .وقياسات الزوايا .أو أطوال الأضلاع لمثلث

*إيجاد نقطة من نقطة أخرى

*حل المسائل عن الإتجاهات

لدراسة النسبة بين طول الضلع وجيب الزاوية المقابلة له

(أ) استخدام لوحة الرسم الهندسي (GSP)

الخطوات	العمل

1 - **لولوح البرنامج انقر على أيقونة** (GSP) **من على سطح المكتب**

2 – **أنقر أداة** Straightedge لاختيار أداة Line segment (•—•) .

3 - **استخدم أداة** Line segment **لرسم المثلث أ، ب ، جـ**

4 – **استخدم أداة النص** Text لتعنون الرؤوس **أ.ب.جـ**

5 - **مستخدماً أداة** Selection Arrow **أظهر الضلع أ ب أنقر** Measure **من** Menu Bar **وأختر** length **سوف يظهر** ($\overline{mAB}$ =) **على الشاشة.** **كرر العملية للأضلاع ب جـ ، حـ أ**

6 - **استحدم أداة الأسهم المختارة وبالضغط على مفتاح** Shift **لإسفل انقر على النقاط ا ، ب ، حـ على التوالي قبل رفع مفتاح** Shift .

7 - **أنقر للقياس من المسطرة الصغيرة وأختر الزاوية أ ب جـ سوف تظهر على الشاشة مثل " ق (أ ب حـ) = ").**

8 - كرر الخطوات 6 ، 7 للزوايا أ حـ ب ، ب أ حـ .

9 - انقر للقياس من المسطرة الصغيرة واختر الحساب ، (سوف تظهر الحاسبة على الشاشة)

10 - انقر على

ق $\overline{\text{أب}}$ (من الشاشة الرئيسية) و / (أعلى شاشة الحاسب)

الدوال (على شاشة الحاسب) واختر جيب [ق $\widehat{\text{أحـب}}$ (على الشاشة الرئيسية)]

(على شاشة الحاسب) و O K (على شاشة الحاسب)

11 - كرر الخطوات 9 ، 10 لـ ق $\overline{\text{ب حـ}}$ ، ق $\widehat{\text{ب أ حـ}}$

ماذا تلاحظ عن النسب

$$\frac{\text{(ق } \overline{\text{أ ب}}\text{)}}{\text{جا(ق } \widehat{\text{أ حـ ب}}\text{)}} \qquad \frac{\text{(ق } \overline{\text{ب حـ}}\text{)}}{\text{جا(ق } \widehat{\text{ب أ حـ}}\text{)}} \qquad \frac{\text{(ق } \overline{\text{حـ أ}}\text{)}}{\text{جا(ق } \widehat{\text{أ ب حـ}}\text{)}}$$

12 – استخدم أداة Selection Arrow لسحب النقط أ ،ب ،حـ لتغيير أحجام الأضلاع والزوايا .

ماذا تلاحظ عن النسب المعطاة في الخطوة 11 ؟

ملحوظة:

مرشد سريع للأدوات الأساسية في GSP معطاة بالأسفل

أيقونة اختيار السهم لاختيار نقطة أو خط

أيقونة النقطة لرسم نقطة

أيقونة البوصلة لرسم دائرة

أيقونة الرسم المعتدل لرسم خط مستقيم

أيقونة نص لكتابة عنوان لمنطقة خط الخ

(ب) باستخدام الفرجار والمنقلة ، والمسطرة (30 دقيقة)

أ – ارسم المثلث أ ب حـ ،أ ب = 6سم، ب حـ = 7 سم ، حـ أ = 8سم ، قس الزوايا أ ، ب ،حـ . واحسب .

(أ) $\frac{\text{أب}}{\text{جا حـ}}$ (ب) $\frac{\text{ب حـ}}{\text{جا أ}}$ (حـ) $\frac{\text{حـ أ}}{\text{جا حـ}}$

2 - كرر النشاط 1 حيث أب = 10.6 سم ، ب حـ = 7. 2 سم ، وحـ أ = 9.3 سم

1-2 قاعدة الجيب Sine Rule

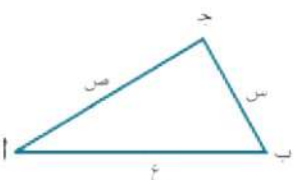
التعميم بالاستقراء

الناتج من الأنشطة يمكن تعميمه بالإستنباط

$$= \frac{\text{أ ب}}{\text{جا حـ}} = \frac{\text{ب حـ}}{\text{جا أ}} = \frac{\text{حـ أ}}{\text{جا ب}}$$

هنا يسمى صيغة الجيب أو قاعدة الجيب

تكون هذه القاعدة أسهل للتذكر إذا أعدنا تسمية أضلاع المثلث مثل أ ، ب، حـ حيث س المقابل للزاوية $\hat{\text{أ}}$ ، ص المقابل للزاوية $\hat{\text{ب}}$ ،ع المقابل للزاوية $\hat{\text{حـ}}$.ومن ثم نجد.

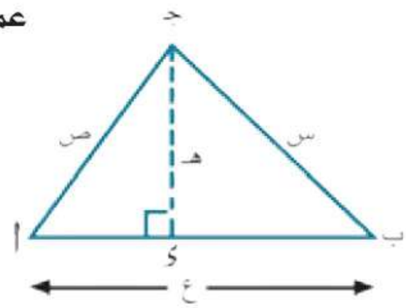


$$\frac{\text{س}}{\text{جا أ}} = \frac{\text{ص}}{\text{جا ب}} = \frac{\text{ع}}{\text{جا حـ}} \quad \text{أو} \quad \frac{\text{جا أ}}{\text{س}} = \frac{\text{جا ب}}{\text{ص}} = \frac{\text{جا حـ}}{\text{ع}}$$

تنطبق تلك القاعدة على أي مثلث ولكنها تستخدم لحساب الأطوال وقياسات الزوايا في المثلثات والتي لا تحتوي على زاوية قائمة .إذا كان المثلث به زاوية قائمة فمن الأسهل استخدام دوال الجيب وجيب التمام أو الظل مثل الموضح في الصف الأول ثانوي .

سوف نتقدم الأن لبرهنة قاعدة الجيب

اعتبر المثلث العام أ ب حـ والذي ليس مثلث قائم الزاوية بإسقاط عمود من حـ ليقابل $\overline{\text{أ ب}}$ في د نجد مثلثين قائمي الزاوية.



معتبراً حـى = هـ

في $\triangle$ أ ى حـ $\quad$ جاأ = $\frac{\text{هـ}}{\text{ص}}$

$\therefore$ هـ = ص جا أ .... (1)

في $\triangle$ ب ى حـ . $\quad$ جاب = $\frac{\text{هـ}}{\text{س}}$

$\therefore$ هـ = س جاب .... (2)

من معادلة 1 ، 2 نجد أن :

س جاب = ص جا أ

$\therefore \quad \frac{\text{س}}{\text{جا أ}} = \frac{\text{ص}}{\text{جاب}}$

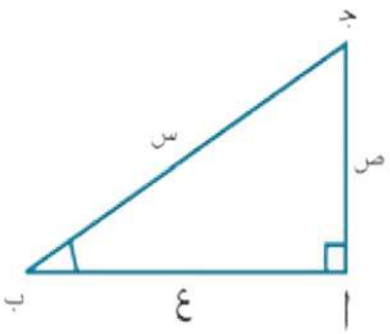
الاستنتاج

بالمثل بإسقاط عمود من أ على $\overline{\text{ب حـ}}$ يمكن إثبات أن

$$\frac{\text{ص}}{\text{جاب}} = \frac{\text{ع}}{\text{جاحـ}}$$

وعليه نحصل على قاعدة الجيب :

$$\frac{\text{س}}{\text{جا أ}} = \frac{\text{ص}}{\text{جاب}} = \frac{\text{ع}}{\text{جاحـ}}$$



تأمل المثلث حيث الزاوية أ = 90°

بمعنى $\frac{\text{جاب}}{\text{ص}} = \frac{\text{جا أ}}{\text{س}}$

$$\text{نجد أن } \frac{\text{جاب}}{\text{ص}} = \frac{\text{جا}\,90^\circ}{\text{س}}$$

$$\text{بمعنى } \frac{\text{جاب}}{\text{ص}} = \frac{1}{\text{س}}$$

$$\text{نجد جاب} = \frac{\text{ص}}{\text{س}}$$

والتي تمثل دالة الحيب لزاوية $\measuredangle$ ب

ملحوظة
لاحظ أن جا $90^\circ = 1$

ونجد من ذلك أن للمثلث قائم الزاوية ، يكون من الأسهل إستخدام دالة الجيب عند استحدام قاعدة الجيب

نلاحظ أن في المعادلة

$$\frac{\text{س}}{\text{جا}\,\text{أ}} = \frac{\text{ص}}{\text{جاب}}$$

يوجد أربعة متغيرات س ، ص ، أ ، ب . لحل أي منهم نحتاج معرفة القيم الثلاث الأخرى . لذلك يمكن استخدام قاعدة الجيب لحل المثلث بمعلومية :

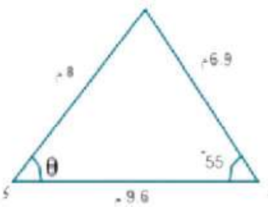
إما (أ) قياسا زاويتين وضلع

أو (ب) ضلعين وزاوية ليست محصورة (بمعنى الزاوية لا تكون بين الضلعين المعطيين)

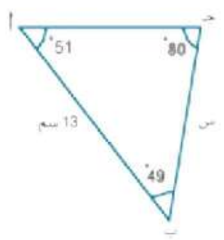
مثال 1 :

أوجد طول الضلع غير المعلوم وقياس الزاوية المشار إليها في كل من المثلثين

(ب)



(أ)



ملحوظة:
الممارسة العامة : تقرب الأضلاع لثلاثة أرقام معنوية والزوايا لرقم عشري

الحل :

(أ) $\frac{\text{س}}{\text{جا}\,\text{أ}} = \frac{\text{ص}}{\text{جاحـ}}$

(ب) $\frac{\text{جاى}}{\text{م}} = \frac{\text{جار}}{\text{ل}}$

$\therefore \quad \frac{\text{س}}{\text{جا } 51^\circ} = \frac{13}{\text{جا } 80^\circ}$

$\therefore \quad \text{س} = \frac{13 \times \text{جا } 51^\circ}{\text{جا } 80^\circ} = 10.3$ سم

(لأقرب ثلاث أرقام معنوية)

$\therefore \quad \frac{\text{جا } \theta}{6.9} = \frac{\text{جا } 55^\circ}{8}$

$\therefore \quad \text{جا } \theta = \frac{6.9 \times \text{جا } 55^\circ}{8} = 0.7065$

$\therefore \quad \theta = 45.0^\circ$ (لأقرب رقم عشري)

أنشطة

لدراسة العلاقة بين جتاحـ = $\frac{س^2 + ص^2 - ع^2}{2س ع}$ في المثلث أ ب حـ

(أ) بإستخدام الرسومات الهندسية (GSP) (ساعة)

ملحوظة:
هذا النشاط يمكن تأذيته بإستخدام برنامج هندسة حركية أو باستخدام البرجل .أو المنقلة ، والمسطرة والطريقتان مشروحتان

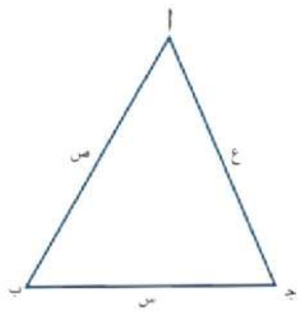
الخطوات	العمل
1 -	لدخول البرنامج انقرمرتين على أيقونة (GSP) على سطح المكتب
2 -	أنقر أداة Straightedge لاختيار أداة Line segment ( ) .
3 -	استخدم أداة Line Segment لرسم المثلث أ ب جـ
4 -	استخدم أداة Text للإشارة على الرؤوس أ.ب.جـ
5 -	استخدم أداة Selection Arrow و الضلع الأكبر ب حـ أنقر على المسطرة الصغيرة للقياس واختر الطول (" ق ب حـ = " . سوف تظهرعلى الشاشة) كرر العملية للأصلاع أحـ ، أ ب .
6 -	استخدم الأداة Selection Arrow . واضغط على مفتاح المسافات لأسفل انقر على النقاط أ ، حـ ،ب . على التوالي قبل رفع مفتاح المسافات .
7 -	انقر القياس من الـ Menu Bar واختر الزاوية ا حـ ب سوف تظهر على الشاشة مثل ق (أ ب حـ) =).
8 -	انقر القياس من الـ Menu Bar وأختر(الحساب الآلة الحاسبة على الشاشة) .
9 -	انقر على الدوال (تظهر على الشاشة) اختر جتا [ق ∠ أحـ ب . (على الشاشة الرئيسية](على شاشة الألة. و OK (على شاشة الألة) (جتا ق ∠ أ حـ ب =) سوف تظهر على الشاشة الرئيسية)
10 -	انقر القياس من الـ Menu Barو اختر الحساب
11 -	انقر على (على شاشى الألة). ق $\overline{ب حـ}$ على الشاشة الرئيسية

2 ، ^ (على شاشة الألة) + (على شاشة الألة).
ن(حـ أ) (على الشاشة الرئيسية)
2 ، ^ (كل على شاشة الالة) - (على شاشة الألة)
ن (أب) (على الشاشة الرئيسية)
2 ، ^ (كل على شاشة الألة)
[(على شاشة الألة / (على شاشة الآلة)]
، 2 (كل على شاشة الآلة)
ن(ب حـ) (على الشاشة الرئيسية)
❖ (على شاشة الآلة)
ن حـ أ (على الشاشلة الرئيسية)
] (على شاشة الالة) ، و
OK (على شاشة الآلة)

ماذا تلاحظ عن القيم التي تحصلت عليها من الخطوات 9، 11 ؟

12 - **استخدم أداة** Selaction aarrow لسحب النقط $أ_1$ أو $ب_1$ أو حـ **لتغير أطوال الأضلاع وقياسات الزوايا . ماذا تلاحظ في القيم التي تحصلت عليها من الخطوات 9 ، 11 ؟**

(ب) بإستخدام البرجل والمنقلة ،والمسطرة (30 دقيقة)



1 - **ارسم مثلث أ ب حـ الذي فيه س = 8 سم ، ص = 6 سم ،ع = 7 سم ، أوجد قياس ∠حـ احسب**

(أ) **جتا حـ** (ب) $\frac{س^2 + ص^2 - ع^2}{2\ س\ ص}$

ماذا تلاحظ ؟

2 - **كرر النشاط أ مع س = 6.5 سم ، ص = 8.5 سم ، ع = 10 سم**

2-2 قاعدة جيب التمام

Cosine Rule

التعميم بالاستقراء

يمكن تعميم النتيجة من النشطة بالاستقراء :

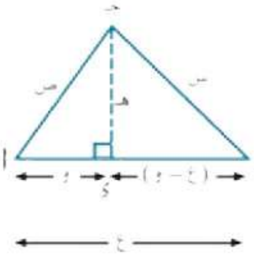
$$\text{جتا ب} = \frac{س^2 + ص^2 - ع^2}{2\ س\ ص}$$

وهذا يسمى قاعدة جيب التمام أو صيغة جيب التمام

وبالمثل $\text{جتا حـ} = \frac{س^2 + ع^2 - ص^2}{2\ س\ ع}$ ، $\text{جتا أ} = \frac{ص^2 + ع^2 - س^2}{2\ ص\ ع}$

نستحدم هذه القاعدة عندما نعرف الأضلاع الثلاثة في مثلث ونريد ايجاد الزاوية

بإعادة الترتيب جتا$\text{أ} = \dfrac{ص^2 + ع^2 - س^2}{2\ ص\ ع}$



لدينا 2ص ع **جتا** أ $= ص^2 + ع^2 - س^2$

بمعنى $س^2 = ص^2 + ع^2 - 2$ ص ع **جتا** أ

بالمثل $ص^2 = س^2 + ع^2 - 2$س ع **جتا** ب

وكذلك $ع^2 = س^2 + ص^2 - 2$س ص **جتا** حـ

وهذه صياغة اخرى لقاعدة جيب التمام تستخدم عندما نعرف ضلعين في المثلث وقياس الزاوية بينهما ونريد ايجاد طول الضلع الثالث . نتقدم الأن لإثبات قانون جيب التمام

اعتبر المثلث أ ب حـ مثلثاً عاماً ليس قائم الزاوية لإسقاط عمود من حـ ليقابل أ ب في ء نجد مثلثين قائمي الزاوية .

حـ ء = هـ ، أ ء = و ، ب ء = ع - و

بتطبيق تظرية فيثاغورث على $\triangle$ أ ء حـ ، نجد هـ $^2 + و^2 = ص^2$

$\therefore$ **هـ**$^2 = ص^2 - و^2$ ....(1)

بتطبيق تظرية فيثاغورث على $\triangle$ ب ءحـ ،نجد أن هـ $^2 + (ع - و)^2 = س^2$

$\therefore$ **هـ**$^2 = س^2 - (ع - و)^2$ ....(2)

من معادلة (1) (2) تجد أن :

$س^2 - (ع - و)^2 = ص^2 - و^2$

$\therefore س^2 = ص^2 - و^2 + (ع - و)^2$

$= ص^2 - و^2 + ع^2 + و^2 - 2ع\ و$

$\therefore س^2 = ص^2 + ع^2 - 2ع\ و$ ....(3)

بما أن (و) عادة مجهولة . يجب التعبير عنها بدلالة أطوال الأضلاع وقياسات الزوايا في المثلث أ ب حـ .

في $\triangle$ أ ب حـ ، جتا أ $= \dfrac{و}{ص}$

$\therefore$ **و = ص جتا** أ

الاستنتاج

بالتعويض و= ص جتا أ في (3) **يعطي** $س^2 = ص^2 + ع^2 - 2$ص ع **جتا** أ **بالمثل بإسقاط أعمدة من أ . حـ للأضلاع المقابلة نستطيع إثبات أن**

$ص^2 = س^2 + ع^2 - 2$س ع جتا ب ، $ع^2 = س^2 + ص^2 - 2$س ص **جتا** حـ

لاحظ وجود أربعة متغيرات في كل من قواعد جيب التمام .

لحل أي منهما نحتاج معرفة قيم الثلاثة الأخرى .

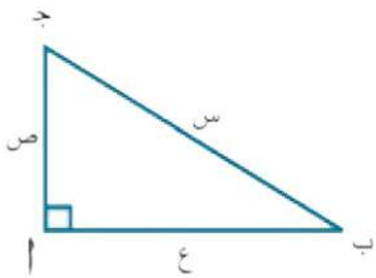
لذلك .

$$\text{س}^2 = \text{ص}^2 + \text{ع}^2 - 2\text{ص ع جتا أ}$$
$$\text{ص}^2 = \text{س}^2 + \text{ع}^2 - 2\text{س ع جتا ب}$$
$$\text{ع}^2 = \text{س}^2 + \text{ص}^2 - 2\text{س ص جتا حـ}$$

نستخدم لإيجاد طول الضلع الثالث عند إعطاء ضلعين وقياس الزاوية المحصورة (الزاوية المتكونة بين هذين الضلعين) . في حين

$$\text{جتا أ} = \frac{\text{ص}^2 + \text{ع}^2 - \text{س}^2}{2\text{ ص ع}}$$
$$\text{جتا ب} = \frac{\text{س}^2 + \text{ع}^2 - \text{ص}^2}{2\text{ س ع}}$$
$$\text{جتا حـ} = \frac{\text{س}^2 + \text{ص}^2 - \text{ع}^2}{2\text{ س ص}}$$

تستخدم لإيجاد قياس الزاوية عند إعطاة أطوال أضلاع المثلث الثلاثة تأمل مثلثاً فيه قياس $\angle \text{أ} = 90°$



بتطبيق $\text{س}^2 = \text{ص}^2 + \text{ع}^2 - 2\text{ص ع جتا أ}$

نجد أن $\text{س}^2 = \text{ص}^2 + \text{ع}^2 - 2\text{ص ع جتا } 90°$.

بمعنى $\text{س}^2 = \text{ص}^2 + \text{ع}^2 - 2\text{ص ع (صفر)}$.

$\therefore$ $\text{س}^2 = \text{ص}^2 + \text{ع}^2$ **(نظرية فيثاغورث)**

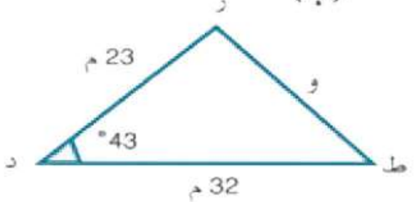
جتا 90° = 0

هذه ليست مفاجأة حيث مستخدم نظرية فيثاغورث لإثبات قاعدة جيب التمام،وعليه فإن نظرية فيثاغورث حالة خاصة من قاعدة جيب التمام ، ولذا نستخدم في المثلث قائم الزاوية نظرية فيثاغورث والدوال المثلثية بدلاً من قانون جيب التمام .

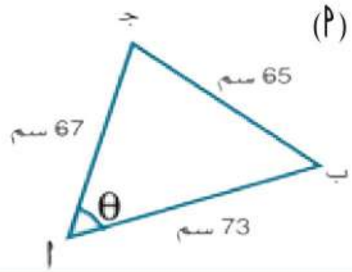
مثال 2 :

أوجد قياس الزاوية غير المعلومة وطول الضلع المشار إليه في المثلثات الأتية

(ب)



(أ)



الحل :

(أ) $\text{جتا}\,\theta = \dfrac{\text{ص}^2 + \text{ع}^2 - \text{س}^2}{2\,\text{ص}\,\text{ع}} = \dfrac{67^2 + 73^2 - 65^2}{2 \times 67 \times 73} = 0.5718$

> **ملحوظة:**
> اعمل لأربعة ارقام معنوية
> أعط الإجابات محتوية الزوايا مقربة لأقرب رقم عشري
> أعط الإجابات متضمنة الأطوال لثلاثة أرقام معنوية

$\therefore\ \theta = 55.1^\circ$ (لإقرب رقم عشري)

(ب) $\text{د}^2 = \text{ط}^2 + \text{ر}^2 - 2\text{ط}\,\text{ر}\,\textbf{جتا}\,\text{د}$

$\text{و}^2 = 23^2 + 32^2 - 2 \times 23 \times 32 \times \textbf{جتا}\,43^\circ$

$= 476.45$

$\therefore\ \text{و} = 21.8$ م (**لأقرب ثلاثة أرقام معنوية**)

مثال 3 :

أوجد أكبر زاوية في المثلث الذي أضلاعه س = 4 ، ص = 8 ، ع = 6

الحل:

أكبر زاوية في $\triangle$ وهي التي تقابل أكبر ضلع وهو ص

$\therefore\ \textbf{جتا}\,\text{ص} = \dfrac{\text{س}^2 + \text{ع}^2 - \text{ص}^2}{2\,\text{س}\,\text{ع}} = \dfrac{16 + 36 - 64}{2 \times 4 \times 6} = -0.25$

$\therefore\ \text{ص} = 140.5^\circ$