دولة ليبيا
وزارة التعليم
مركز المناهج التعليمية والبحوث التربوية

الرياضيات

للسنة الثالثة من مرحلة التعليم الثانوي
القسم العلمي

الدرس الخامس

المدرسة الليبية بفرنسا ـ تور

العام الدراسي
1441 / 1442 هـ - 2020 / 2021 م

المتطابقات المثلثية
Trigonometric Identities

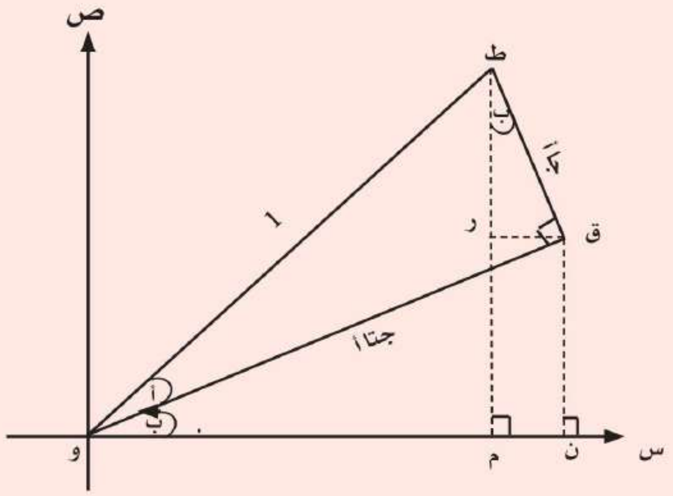
2-1 تعريف الزوايا المركبة:

نعلم أن جا $30^\circ = \frac{1}{2}$ ، إذن، ما قيمة جا $(30^\circ+30^\circ)$؟ هل هي ضعف جا 30°، أي أن القيمة تساوي 1 ؟ علي كلٍ ليست هذه هي المشكلة. أصغر زاوية موجبة θ جيبها يساوي 1 قياسها 90° إذن جا 60° ليست ضعف جا 30°. هذا واضح إذا راجعنا من العمل السابق أن ص = جا θ ليس خطًا مستقيما. هذا يعني أن قيم جا θ لا تزيد خطيًا كلما تزيد θ. بالمثل، ص = ظا θ ، ص = جتا θ ليستا دالتين خطيتين أيضا .

مما سبق، من المفيد أن تعرف العلاقة بين جا 30°، جا $(30^\circ+30^\circ)$ أي جا 60° لمزيد من التعميم سوف ندرس العلاقة بين النسب المثلثية لأي زاويتين أ ، ب والنسب المثلثية للزاوية المركبة (أ + ب)
سوف ندرس ست نتائج في هذا الموضوع، تسمى،

جا (أ + ب) ، جا (أ − ب)، جتا (أ + ب)، جتا (أ - ب)، ظا (أ+ ب)، ظا (أ − ب)

2-1-1 جا (أ + ب)



الشكل 2-1

و ق ط مثلث قائم الزاوية حيث ق ($\angle$ و ق ط) = 90°

طول و ط = 1 وحدة طولية، ق ($\angle$ ق و ط) = أ انظر شكل (2-1)

المثلث و ق ط دار عكس حركة عقارب الساعة، حول و بزاوية ب، كما هو موضح.

ط م، ق ن عمودان علي محور س، ق ر عمودي علي ط م

بالدوران، $\angle$ ق ط ر = $\angle$ ب

في Δ و ق ط، ق ط = جا أ، و ق = جتا أ لأن و ط = 1

في Δ و ق ن، ق ن = و ق جا ب = جتا أ جا ب

إذن في Δ و ط م، جا (أ + ب) = $\frac{\text{ط م}}{1}$ ،

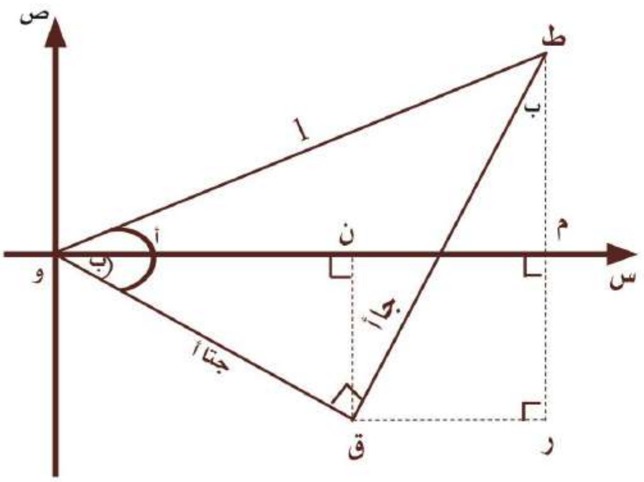
= ط ر + ر م

= ط ر + ق ن

= جا أ جتا ب + جتا أ جا ب

$\therefore$ جا (أ + ب) = جا أ جتا ب + جتا أ جا ب

2-1-2 جا (أ – ب)



الشكل 2 - 2

و ق ط مثلث قائم الزاوية حيث إن ∠ و ق ط = 90°، طول و ط يساوي 1 وحدة طولية،

(∠ ق و ط) = أ انظر شكل (2-2)

المثلث و ق ط دار في اتجاه حركة عقارب الساعة حول و بزاوية ب إلى وضعها الحالي كما هو موضح. ط م، ق ن عمودان على محور س.

ط م مد إلى ر بحيث يكون عموديا على ق ر

في Δ و ق ط، ق ط = جا أ،

و ق = جتا أ لأن و ط = 1

في Δ ق ط ر، ط ر = ق ط جتا ب = جا أ جتا ب

في Δ و ق ن، ق ن = و ق جا ب = جتا أ جا ب

∴ في Δ و ط م، (∠ ط و م) = (أ - ب)

جا (أ - ب) = $\frac{\text{ط م}}{1}$ ،

= ط ر - ر م

= ط ر - ق ن

= جا أ جتا ب - جتا أ جا ب

∴ جا (أ – ب) = جا أ جتا ب - جتا أ جا ب

3-1-2 جتا (أ + ب)

راجع شكل (1 - 2)

في Δ و ق ن، و ن = و ق جتا ب = جتا أ جتا ب،

في Δ ق ط ر، ق ر = ق ط جا ب = جا أ جا ب،

في Δ و ط م، جتا (أ + ب) = $\frac{\text{و م}}{1}$ ،

= و ن - ن م

= و ن - ق ر

= جتا أ جتا ب - جا أ جا ب

∴ جتا (أ + ب) = جتا أ جتا ب - جا أ جا ب

2-1-4 جتا (أ – ب)

راجع شكل (2-2)

في Δ و ق ن...... و ن = و ق جتا ب = جتا أ جتا ب

في Δ ق ط ر...... ق ر = ق ط جا ب = جا أ جا ب

في Δ و ط م...... جتا (أ - ب) = $\frac{\text{و م}}{1}$ ،

= و ن + ن م

= و ن + ق ر

= جتا أ جتا ب + جا أ جا ب

∴ جتا (أ - ب) = جتا أ جتا ب + جا أ جا ب

2-1-5 ظا (أ + ب)

∵ جا (أ + ب) = جا أ جتا ب + جتا أ جا ب .... (1)

∵ جتا (أ + ب) = جتا أ جتا ب - جا أ جا ب .... (2)

بقسمة (1) على (2)

$$\frac{\text{جا (أ + ب)}}{\text{جتا (أ + ب)}} = \frac{\text{جا أ جتا ب + جتا أ جا ب}}{\text{جتا أ جتا ب - جا أ جا ب}}$$

⇦ ظا (أ + ب) = $\frac{\text{ظا أ + ظا ب}}{\text{1 - ظا أ ظا ب}}$

بقسمة كل من البسط و المقام على (جتا أ جتا ب)

ظا (أ + ب) = $\frac{\text{ظا أ + ظا ب}}{\text{1 - ظا أ ظا ب}}$

2-1-6 ظا (أ – ب)

بالمثل:

ظا (أ – ب) = $\frac{\text{جا أ جتا ب - جتا أ جا ب}}{\text{جتا أ جتا ب + جا أ جا ب}}$

= $\frac{\text{ظا أ - ظا ب}}{\text{1 + ظا أ ظا ب}}$

ظا (أ – ب) = $\frac{\text{ظا أ – ظا ب}}{\text{1 + ظا أ ظا ب}}$

بتجميع النتائج الستة، نحصل على الزاوية المركبة أو صيغة الجمع.

جا (أ ± ب) = جا أ جتا ب ± جتا أ جا ب

جتا (أ ± ب) = جتا أ جتا ب ∓ جا أ جا ب

ظا (أ ± ب) = $\frac{\text{ظا أ ± ظا ب}}{\text{1 ∓ ظا أ ظا ب}}$

تسمى هذه الصيغ متطابقات مثلثية. وهي صحيحة لجميع قياسات الزوايا الحادة.
وهي أيضا صحيحة لقياسات جميع الزوايا.

مثال 1:

استخدم صيغة الزاوية المركبة لإيجاد الآتي بدلالة قياسات زوايا حادة :

(أ) جا $210°$

(ب) جتا $420°$

(جـ) ظا $(180 + أ)°$ ، بفرض أن $0 < أ < 90°$

(د) جتا $(-س)°$ بفرض أن $0 < س < 90$

الحل:

(أ) جا $210°$ = جا $(180° + 30°)$

= جا $180°$ جتا $30°$ + جتا $180°$ جا $30°$

= - جا $30°$

(ب) جتا $420°$ = جتا $(360 + 60)°$

= جتا $360°$ جتا$60°$ - جا $360°$ جا $60°$

= جتا $60°$

(جـ) ظا $(180 + أ)°$ = $\frac{ظا 180° + ظا أ°}{1 - ظا 180° ظا أ}$

= $\frac{ظا أ°}{1 - 0}$

= ظا أ°

(د) جتا $(-س)°$ = جتا $(0 - س)°$

= جتا $0°$ جتا $س°$ + جا $0°$ جا $س°$

= جتا $س°$

مثال2:

إذا كان جا أ = $\frac{5}{13}$ ، جا ب = $\frac{4}{5}$ ، فأوجد قيمة كل من:

جا (أ + ب)، جتا (أ - ب)، ظا (أ + ب)،

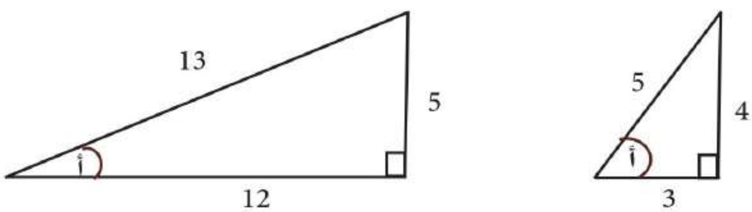
عندما تكون:

(i) أ ، ب زاويتان حادتان .

(ii) أ زاوية حادة، ب زاوية منفرجة .

ارسم مثلثات قائمة لإيجاد القيم للنسب المثلثية لكل من أ ، ب .

حدد الإشارات الموجبة أو السالبة لهذه النسب حسب الأرباع التي تقع فيها هذه الزوايا .



الشكل 2-3

الحل:

(i) جا (أ + ب) = جا أ جتا ب + جتا أ جا ب

$$\frac{4}{5} \times \frac{12}{13} + \frac{3}{5} \times \frac{5}{13} =$$

$$\frac{48 + 15}{65} =$$

$$\frac{63}{65} =$$

جتا (أ − ب) = جتا أ جتا ب + جا أ جا ب

$$\frac{4}{5} \times \frac{5}{13} + \frac{3}{5} \times \frac{12}{13} =$$

$$\frac{20 + 36}{65} =$$

$$\frac{56}{65} =$$

ظا (أ + ب) = $\dfrac{\text{ظا أ + ظا ب}}{\text{1 - ظا أ ظا ب}}$

$$\frac{\frac{4}{3} + \frac{5}{12}}{\frac{4}{3} \times \frac{5}{12} - 1} =$$

$$\frac{63}{16} = \frac{9}{4} \times \frac{21}{12} =$$

(ii) ب زاوية منفرجة، هذا يعني أن ب تقع في الربع الثاني، ظا ب، جتا ب كلاهما سالب

جا (أ + ب) = جا أ جتا ب + جتا أ جا ب

$$\frac{4}{5} \times \frac{12}{13} + \left(\frac{3}{5}-\right) \times \frac{5}{13} =$$

$$\frac{48+15-}{65} =$$

$$\frac{33}{65} =$$

جتا (أ − ب) = جتا أ جتا ب + جا أ جا ب

$$\frac{4}{5} \times \frac{5}{13} + \left(\frac{3}{5}-\right) \times \frac{12}{13} =$$

$$\frac{20+36-}{65} =$$

$$\frac{16}{65} - =$$

ظا (أ + ب) = $\dfrac{\text{ظا أ + ظا ب}}{\text{1 - ظا أ ظا ب}}$

$$\frac{\frac{4-}{3} + \frac{5}{12}}{\frac{4-}{3} \times \frac{5}{12} - 1} =$$

$$\frac{33}{56} - = \frac{9}{4} \times \frac{11}{12} - =$$