دولة ليبيا
وزارة التعليم
مركز المناهج التعليمية والبحوث التربوية

أسس الإحصــــاء

للسّنة الثّالِثةَ بمرحلة التّعليم الثانوي

(القسم العلمي)

الدرس الخامس

المدرسة الليبية بفرنسا ـ تور

العام الدراسي

1441 / 1442 هـ - 2020 / 2021 م

(1–10) قانون ضرب الاحتمالات:

إذا كان الحدثان **B, A** أي حدثين في فراغ العينة **S**، فإننا نستطيع الحصول على $P(A \cap B)$، أي احتمال ظهور **A** و **B** معـاً في نفس الوقت، كما يلي:

(1–10–1) قانون الضرب لحدثين غير مستقلين:

علمنا أنه عندما يكون الحدثان **B , A** غير مستقلين، والحدث **A** هو الذي تم ظهوره أولاً، فإن الاحتمال الشرطي يحسب كما يلي :

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{\mathrm{P(A)}} \quad ، \quad \mathrm{P(A)} > 0$$

ومـن هـذه الصيغـة نستنتـج الصيغـة الخاصـة بحسـاب

فنجد أن: $P(A \cap B) = \mathrm{P}(A).\ P\ (B/A) \qquad P\ (A) > 0$

وبالتالي نجد انه إذا كان الحدث **A** هو الذي تم ظهوره أولاً، فإن احتمال الحصول على الحدثين **A** و**B** معاً في نفس الوقت يحسب من الصيغة التالية التي يطلق عليها قانون ضرب الاحتمالات لحدثين غير مستقلين:

$$\boxed{P(A \cap B) = \mathrm{P}(A).P\ (B/A) \quad P\ (A) > 0}$$

(1−10−2) قانون الضرب لحدثين مستقلين:

أما إذا كان الحدثان **A , B** مستقلين ، فقد علمنا انه:

$$P(B/A) = P(B)$$

وبالتالي تصبح صيغة قانون ضرب الاحتمالات عندما يكون الحدثان **A, B** مستقلين كما يلي:

$$\boxed{\mathrm{P}(\mathrm{A} \cap B) = P(A).P(B)}$$

ملاحظة:

الحرف **و** مقروناً بمفهوم التقاطع، فالحدث الذي يقصد به ظهور **A** و **B** معاً، يعني ظهور الحدث $\mathrm{A} \cap B$، ونستطيع حساب احتمال حدث من هذا النوع، بتطبيق التعريف التقليدي للاحتمال مباشرة، أي بقسمة عدد عناصر مجموعة التقاطع $\mathbf{n}(\mathrm{A} \cap B)$ على عدد عناصر فراغ العينة **n(S)**، أو باستخدام قانون ضرب الاحتمالات.

مثال)1-32(:

صندوق به **5** كرات بيضاء و**10** كرات خضراء، فإذا سحبنا منه كرتين عشوائيًا، فما احتمال أن تكون الأولى خضراء والثانية بيضاء؟

أ. في حالة السحب مع عدم الإرجـــاع.

ب. في حالــة السحــب مــع الإرجـــاع.

الحل:

نفرض أن:

الحدث **A** هو أن تكون الكرة الأولى خضراء.

الحدث **B** هو أن تكون الكرة الثانية بيضـــــاء.

الاحتمال المطلوب هو:

$$P(A \cap B) = ?$$

أ- **في** حالة أنّ السحب تم مع عدم الإرجاع، تكون الأحداث غير مستقلة، ويحسب الاحتمال المطلوب كما يلي:

$$P(A\cap B) = P(A).P(B/A)$$
$$= \frac{10}{15} \times \frac{5}{14} = \frac{5}{21}$$

ب- **في** حالة أنَّ السحب تم مع الإرجاع، تكون الأحداث مستقلة، ويحسب الاحتمال المطلوب كما يلي:

$$P(A\cap B) = P(A) . P(B)$$
$$= \frac{10}{15} \times \frac{5}{15} = \frac{2}{9}$$

مثال (1-33) :

صندوق به **6** كرات بيضاء و**14** كرة سوداء، فإذا سحبنا منه كرتين عشوائيـًا، فما احتمال أن تكون الكرتان من نفس اللون؟

أ. في حالة السحب مع عدم الإرجاع.

ب. في حالـة السحـب مع الإرجاع.

الحل:

الاحتمال المطلوب هو احتمال أن تكون الكرتان من نفس اللون، أي احتمال أن تكون الكرتان بيضاء أو أن تكون الكرتان سوداء.

نفرض أن:

الحدث W_1 هو أن تكون الكرة الأولى بيضــاء.

الحدث W_2 هو أن تكون الكرة الثانية بيضـــــاء.

الحدث B_1 هو أن تكون الكرة الأولى ســوداء.

الحدث B_2 هو أن تكون الكرة الثانية ســــوداء.

الاحتمال المطلوب هو:

احتمال (W_1 **و** W_2) **أو** (B_1 **و** B_2)، وكما ذكرنا سابقـًا أن حرف **و** يعني تقاطع وحرف **أو** يعني اتحاد، إذن الاحتمال المطلوب هو:

$$P\left((W_1 \cap W_2) \cup (B_1 \cap B_2)\right) = ?$$

وبما أن حدث الحصول على كرتين بيضاء وحدث الحصول على كرتين سوداء، هما حدثان متنافيان، لأنهما لا يمكن أن يظهرا معـًا، وباستخدام قانون جمع الاحتمالات لحدثين متنافيين يكون الاحتمال المطلوب مساويـًا ما يلي:

$$P\left((W_1 \cap W_2) \cup (B_1 \cap B_2)\right) = P(w_1 \cap w_2) + P(B_1 \cap B_2)$$

وبتطبيق قانون الضرب نحصل على الاحتمال المطلوب، حيث:

أ- الاحتمال المطلوب في حالة السحب مع عدم الإرجاع:

$$P((w_1 \cap w_2) \cup (B_1 \cap B_2)) = P(W_1 \cap W_2) + P(B_1 \cap B_2)$$

$$= P(w_1)P(W_2/W_1) + P(B_1)P(B_2/B_1)$$

$$= \left(\frac{6}{20} \times \frac{5}{19}\right) + \left(\frac{14}{20} \times \frac{13}{19}\right) = \frac{30+182}{380} = 0.5578$$

ب- الاحتمال المطلوب في حالة السحب مع الإرجاع:

$$P((w_1 \cap w_2) \cup (B_1 \cap B_2)) = P(W_1 \cap W_2) + P(B_1 \cap B_2)$$

$$= P(W_1)P(W_2) + P(B_1)P(B_2)$$

$$= \left(\frac{6}{20} \times \frac{6}{20}\right) + \left(\frac{14}{20} \times \frac{14}{20}\right) = \frac{36+19}{400} = 0.5800$$

فيما يلي نعرض بعض الأمثلة التي نستعين لحلها بطرق العد المذكورة في بداية هذا الفصل.

مثال)1-34(:

قفل خزنة يتكون من 4 خانات، ولكي يفتح يجب أن يُحدد في كل خانة عدد من الأعداد الصحيحة من 0 إلى 9، فما احتمال سرقة هذه الخزنة؟

الحل:

سنستعين لحل هذا المثال بقاعدة الضرب، فهنا لدينا **4** خانات أي **4** مراحل وكل خانة ممكن أن نضع فيها أي عدد من الأعداد الصحيحة **0**، **1**،...، **9**، أي كل مرحلة ممكن إنجازها بعشرة طرق، وبالتالي فإن $n_1 = 10$ ، $n_2 = 10$ ، $n_3 = 10$ ، $n_4 = 10$ ويكون العدد الكلي للحالات التي يمكن أن نضبط عليها خانات قفل الخزنة (عدد عناصر فراغ العينة) يساوي:

$$n_1n_2n_3n_4 = (10)\ (10)\ (10)\ (10) = 10000$$

أي توجد **10000** حالة يمكن أن نضبط عليها خانات قفل هذه الخزنة، وبالطبع حالة واحدة فقط من هذه الحالات هي التي تفتح قفل الخزنة (الحالة التي يستعملها صاحب الخزنة)، إذن احتمال سرقة هذه الخزنة أي احتمال فتحها هو:

$$\frac{1}{10000} = 0.0001$$

مثال (1-35):

إذا طلبنا من أحد الأشخاص أن يرتب جلو س مدير و 3 مدرسين و 3 طلبة في مقاعد مرقمة من **1** إلى فأحسب ما يلي:

أ- احتمال أن يجلس المدير والمدرسين الثلاثة في المقاعد الأربعة الأولى، ثم الطلبة في المقاعد الباقية.

ب- احتمال ان يجلس المدير في المقعد الأول ثم يجلس المدرسين الثلاثة في المقاعد الثاني والثالث والرابع، ثم يجلس الطلبة في بقية المقاعد.

الحل:

واضح في هذا المثال أننا **نهتم بالترتيب**، وبالتالي طريقة العد التي سنستعين بها لحل هذا المثال، هي **قاعدة التباديل**. فيكون:

عدد الطرق الكلية التي يمكن أن نرتب بها **7** أشخاص في صف = **!7**

أ. الحدث المطلوب احتماله هو أن يجلس المدير والمدرسين الثلاثة في المقاعد الأربعة الأولى، ويجلس الطلبة في بقية المقاعد. فهنا كأن الحدث يتم على مرحلتين:

المرحلة الأولى: يقوم فيها بترتيب المدير والمدرسين الثلاثة في المقاعد الأربعة الأولى ويتم ذلك بعدد من الطرق = **!4**.

المرحلة الثانية: يقوم فيها بترتيب الطلبة الثلاثة في المقاعد الثلاثة الباقية، ويتم ذلك بعدد من الطرق = **!3**.

وبتطبيق قاعدة الضرب نحصل على عدد الطرق التي تحقق الحدث المطلوب (عدد عناصر الفئة الجزئية للحدث) وهو = **(!3) (!4)**.

إذن الاحتمال المطلوب يساوي:

$$\frac{(4!)\ (3!)}{7!} = \frac{1}{35}$$

ب. الحدث المطلوب احتماله هو ان يجلس المدير في المقعد الأول والمدرسين الثلاثة في المقاعد الثاني والثالث والرابع، ويجلس الطلبة في بقية المقاعد، فهنا كأن الحدث يتم على **3** مراحل:

المرحلة الأولى: يقوم فيها بوضع المدير في المقعد الأول، ويتم ذلك بعدد من الطرق = **!1**.

المرحلة الثانية: يقوم فيها بترتيب المدرسين الثلاثة في المقعد الثاني والثالث والرابع، ويتم ذلك بعدد من الطر ق = **!3**.

المرحلة الثالثة: يقوم فيها بترتيب الطلبة الثلاثة في المقاعد الثلاثة الباقية، ويتم ذلك بعدد من الطرق = **!3**

وبتطبيق قاعدة الضرب نحصل على عدد الطرق التي تحقق الحدث المطلوب (عدد عناصر الفئة الجزئية للحدث) وهو = **(!3)(!3)(!1)**.

إذن الاحتمال المطلوب يساوي:

$$\frac{(1!)(3!)(3!)}{7!} = \frac{1}{140}$$

مثال (1-36):

فصل دراسي يحتوي على **8** طالبات **و7** طلبة، فإذا اخترنا عشوائيًا من هذا الفصل مجموعة تتكون من **5** أشخاص (**طبعًا الاختيار تم مع عدم الإرجاع**)، فما احتمال أن تحتوي هذه المجموعة على **3** طالبات وطالبين؟

الحل:

الاحتمال المطلوب هو احتمال اختيار مجموعة تتكون من **3** طالبات وطالبين، وبالطبع نهمل الترتيب، وهذا الاحتمال يساوي **عدد** النتائج التي تحقق هذا الحدث مقسومًا على **العدد** الكلي للنتائج الممكنة.

واضح في هذا المثال أننا نهتم **بالاختيار مع اهمال الترتيب**، وبالتالي طريقة العد التي سنستعين بها لحل هذا المثال هي **قاعدة التوافيق** فيكون:

العدد الكلي للنتائج الممكنة (عدد عناصر فراغ العينة) يساوي العدد الكلي للطرق التي يمكن أن نختار بها **4** اشخاص من **15** شخص **(8+7)**، أي يساوي:

$$C_5^{15} = \frac{15!}{5!\,(15-5)!} = \frac{15 \times 14 \times 13 \times 12 \times 11 \times 10!}{5! \times 10!} = 3003$$

وعدد الطرق التي تحقق الحدث المطلوب يساوي عدد الطرق التي يتم بها اختيار **3** طالبات من **8** طالبات واختيار طالبين من **7** طلبة، أي كأن الاختيار يتم على مرحلتين، وبالتالي فبتطبيق قاعدة الضرب وقاعدة التوافيق، نجد أن عدد الطرق التي تحقق الحدث المطلوب هو:

$$\boldsymbol{C_3^8 \quad C_2^7 = \frac{8!}{3! \times 5!} \times \frac{7!}{2! \times 5!} = 1176}$$

إذن الاحتمال المطلوب هو: $\boldsymbol{= \frac{1176}{3003} = 0.3916}$

ونستطيع حساب الاحتمال المطلوب في خطوة واحدة كما يلي:

الاحتمال المطلوب هو: $\boldsymbol{= \frac{C_3^8 \times C_2^7}{C_5^{15}} = 0.3916}$

ملاحظة:

عندما تتم عملية السحب العشوائي للمفردات بدون إرجاع، نستطيع حساب أي احتمال مطلوب باستخدام قوانين الاحتمالات أو باستخدام قاعدة التوافيق ونحصل على نفس النتيجة تماماً. لأنه عند إيجاد التوافيق لا نختار نفس المفردة مرتين، أي كأن السحب تم بدون إرجاع.

فمثلاً نستطيع حساب الاحتمال المطلوب في (أ) الخاص بالمثال **(1−33)** باستخدام قاعدة التوافيق، وذلك كما يلي:

العدد الكلي للنتائج الممكنة (عدد عناصر فراغ العينة) يساوي العدد الكلي للطرق التي يمكن أن نختار بها كرتين من **20** كرة بالصندوق **(6+14)**، أي يساوي:

$$\boldsymbol{C_2^{20} = \frac{20!}{2!(20-2)!} = \frac{20!}{2! \times 18!} = 190}$$

ويتحقق الحدث المطلوب عندما تكون الكرتان بيضاء أو عندما تكون الكرتان سوداء، وهما حدثان متنافيان، وبالتالي:

احتمال أن تكون الكرتان من نفس اللون يساوي:

احتمال أن تكون الكرتان بيضاوين + احتمال أن تكون الكرتان سوداوين.

فبتطبيق قاعدة التوافيق، نستطيع أن نحسب كلا من هذين الاحتمالين كما يلـــــــي:

احتمال أن تكون الكرتان بيضاء يساوي عدد الطرق التي يمكن أن نختار بها كرتين بيضاء من **6** كرات بيضاء بالصندوق مقسوماً على العد الكلي لاختيار كرتين من **20** كرة بالصندوق، أي يساوي:

$$\frac{C_2^6}{C_2^{20}} = \frac{15}{190}$$

واحتمال أن تكون الكرتان سوداوين يساوي عدد الطرق التي يمكن أن نختار بها كرتين سوداوين من **14** كرات سوداء بالصندوق مقسوماً على العد الكلي لاختيار كرتين من **20** كرة بالصندوق، أي يساوي:

$$\frac{C_2^{14}}{C_2^{20}} = \frac{91}{190}$$

إذن الاحتمال المطلوب $= \frac{91}{190} + \frac{92}{190} = \mathbf{0.5578}$

وهي نفس النتيجة التي حصلنا عليها بحل المثال عن طريق قانون الضرب في حالة عدم الإرجاع. وبالتالي في حالة الاختيار مع عدم الإرجاع يستطيع الطالب أن يستخدم قانون الضرب أو التوافيق، مع العلم بأن قاعدة التوافيق أسهل بكثير عندما يزيد عدد المفردات المختارة على أثنين.