دولة ليبيا
وزارة التعليم
مركز المناهج التعليمية والبحوث التربوية

الرياضيات

للصف الأول من مرحلة التعليم الثانوي

الدرس السادس

المدرسة الليبية بفرنسا ـ تور

6-2 الأعداد الغير قياسية Irrational Numbers

العدد القياسي: هو العدد الذي يمكن تقديره بالضبط. $\sqrt{4} = 2$ لأن $2 \times 2 = 4$ ، $\sqrt{144} = 12$ لأن $12 \times 12 = 144$
والسؤال الذي يطرح نفسه الأن. هل الأعداد $\sqrt{3}$ ، $\sqrt{7}$ ، $\sqrt{19}$ ... أعداد ناطقة (قياسية) بمعنى عددا مضروبا في نفسه نحصل على أحد الأعداد المذكورة، الجواب على هذا السؤال يصعب تقدير كل عدد بالضبط لأنها أعداد لا تحتوي على مربعات كاملة وفيما سبق توصلنا إلى معرفة:
$5^2 = 5 \times 5$ ، $5^2 = 5 \times 5 \times 5$ ، $5^{س} = 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5$ ... إلى س من العوامل.

لكل عدد صحيح موجب ن يوجد عدد س يسمى الجذر التربيعي للعدد ن.
إذا كان: $س^{ن} = أ$ $2^6 = 64$ فالعدد 2 يسمى الجذر السادس للعدد 64
$4^2 = 16$ فالعدد 4 يسمى الجذر السادس للعدد 16.

للعدد أ يرمز له بالرمز $\sqrt[ن]{أ}$ تعني أمرا بأخذ الجذر النوني والعدد يسمى دليل الجذر، تعني الجذر التربيعي

$\sqrt{25} = 5$ ، $\sqrt{27} = 3$ ، $\sqrt{625} = 5$ ، $3^2 = 9$ وكذلك $(-3)^2 = 9$

مثلا بالنظر إلى $\sqrt{4356}$ نجد أن :
$4356 = 6 \times 6 \times 11 \times 11 = 6^2 \times 11^2$
$\sqrt{4356} = 6 \times 11 = 66$ لما الطرفان متساويان نستخلص إلى القاعدة الأولى.

7-2 قوانين الجذور Roots Laws

1-7-2 إذا كانت أ ≥ 0 ، ب ≥ 0 فإن:

$$\sqrt{أ} \times \sqrt{ب} = \sqrt{أب}$$

الإثبات:

$\because$ أ ≥ 0 ، ب ≥ 0 فإن:

$\sqrt{أ} \geq 0$ ، $\sqrt{ب} \geq 0$

$\therefore$ $\sqrt{أ} \times \sqrt{ب} \geq 0$ أولا:

$\because$ $(\sqrt{أ} \times \sqrt{ب})^2 = (\sqrt{أ} \times \sqrt{ب})(\sqrt{أ} \times \sqrt{ب})$

$= (\sqrt{أ} \times \sqrt{أ})(\sqrt{ب} \times \sqrt{ب})$

$=$ أ $\times$ ب

بأخذ $\sqrt{}$ للطرفين نحصل على : $\sqrt{أ} \times \sqrt{ب} = \sqrt{أب}$

دليل الجذر، تعني الجذر التربيعي

مثال 1:

أوجد قيمة كل من

(أ) $\sqrt{100\ ل^2}$ (ب) $-\sqrt{49\ م^2\ ن^2}$

(جـ) $\sqrt{(-2)^2}$ (د) $\sqrt{25\ س}$

الحل :

(أ) $\sqrt{100\ ل^2} = \sqrt{100} \times \sqrt{ل^2} = 10\ ل$

(ب) $-\sqrt{49\ م^2\ ن^2} = -\sqrt{49} \times \sqrt{م^2} \times \sqrt{ن^2} = -(7\ م\ ن)$

(جـ) $\sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = \sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$

(د) $\sqrt{25\ س} = \sqrt{25} \times \sqrt{س} = 5\sqrt{س}$

2-7-2 إذا كانت $أ \geqslant 0$ ، $ب \geqslant 0$ فإن:

$$\sqrt{\frac{أ}{ب}} = \frac{\sqrt{أ}}{\sqrt{ب}}$$

الإثبات يترك للطالب؟

مثال2: أوجد قيمة كل من:

(أ) $\sqrt{\frac{س^2}{9}}$ (ب) $\sqrt{\frac{16}{25}}$ (جـ) $\pm\sqrt{\frac{ك^4}{10}}$

الحل :

(أ) $\sqrt{\frac{س^2}{9}} = \frac{\sqrt{س^2}}{\sqrt{9}} = \frac{س}{3}$

(ب) $\sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{25}} = \frac{4}{5}$

(جـ) $\pm\frac{\sqrt{ك^4}}{10} = \pm\frac{ك^2}{10}$

مثال3: أوجد قيمة كل من:

(أ) $\sqrt{3^2+4^2}$ (ب) $-\sqrt{(5)^2} - (\sqrt{5})^2$

(جـ) $\sqrt{9+16}$ (د) $\pm\sqrt{5^2-3^2}$

الحل :

(أ) $\sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$

(ب) $-\sqrt{(5)^2 - (\sqrt{5})^2} = -\sqrt{25-5} = -\sqrt{5} \times \sqrt{4} = -2\sqrt{5}$

(جـ) $\sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$

(د) $\pm\sqrt{5^2-3^2} = \pm\sqrt{25-9} = \pm\sqrt{16} = \pm 4$

ملحوظة (3)

$\sqrt{أ+ب} \neq \sqrt{أ} + \sqrt{ب}$

لكل أ ، ب .

لاحظ المقدار المشتمل على علامة جذر يكون في أبسط صورة عندما

1- **لا يوجد عدد صحيح تحت علامة الجذر له معامل مربع كامل عدا 1 .**

2- **لا يوجد كسر تحت علامة الجذر .**

3- **يكون المقام خاليا من علامة الجذر .**

مثال4: ضع في أبسط صورة:

(أ) $\sqrt{3} \times \sqrt{2} \times \sqrt{6}$ (ب) $\sqrt{15} \times 3\sqrt{15}$

(جـ) $(3\sqrt{ب})(-4\sqrt{ب})$ (د) $\frac{2\sqrt{26}}{3\sqrt{13}}$

الحل :

(أ) $\sqrt{3} \times \sqrt{2} \times \sqrt{6} = (\sqrt{3} \times \sqrt{2}) \times \sqrt{6} = \sqrt{6} \times \sqrt{6} = 6$

(ب) $\sqrt{15} \times 3\sqrt{15} = (1 \times 3)(\sqrt{15} \times \sqrt{15}) = 3 \times 15 = 45$

(جـ) $(3\sqrt{ب})(-4\sqrt{ب}) = (3 \times -4)(\sqrt{ب} \times \sqrt{ب}) = -12ب$

(د) $\frac{2\sqrt{26}}{3\sqrt{13}} = (\frac{2}{3})\sqrt{\frac{26}{13}} = (\frac{2}{3})\sqrt{2}$

إذا أردنا أن نضع $\frac{4}{3+\sqrt{5}}$ مثلا في أبسط صورة له لا بد من التفكير في الطريقة المستخدمة لنصل إلى كسر مقامه أعدادا قياسية.

عليه ... فبضرب حدي الكسر في $3-\sqrt{5}$ نحصل على :

$$\frac{4}{3+\sqrt{5}} = \frac{4}{3+\sqrt{5}} \times \frac{3-\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}$$

$$= \frac{4\,(3-\sqrt{5})}{3^2-(\sqrt{5})^2} \times \frac{4\,(3-\sqrt{5})}{9-5}$$

$$= \frac{4\,(3-\sqrt{5})}{4}$$

$= 3-\sqrt{5}$ حصلنا على مقام قياسي

مثال5: ضع في أبسط صورة:

(أ) $\frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$ (ب) $\frac{2-\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}}$ (جـ) $\frac{1}{3\sqrt{2}+\sqrt{3}}$

الحل :

(أ) $\frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$ نضرب في مرافق المقام

$$= \frac{3\,(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{3})^2}$$

$$= \frac{3\,(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{5-3}$$

$$= \frac{3}{2}\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)$$

(ب) $\frac{2-\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}} = \frac{2-\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}} \times \frac{2-\sqrt{5}}{2-\sqrt{5}}$

$= \frac{(5-\sqrt{5})^2}{2^2-(\sqrt{5})^2}$

$= \frac{4-4\sqrt{5}+5}{-1}$

$= 4\sqrt{5}-9$

(جـ) $\frac{1}{3\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \frac{1}{3\sqrt{2}+\sqrt{3}} \times \frac{3\sqrt{2}-\sqrt{3}}{3\sqrt{2}-\sqrt{3}}$

$= \frac{3\sqrt{2}-\sqrt{3}}{(3\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2}$

$= \frac{3\sqrt{2}-\sqrt{3}}{18-3}$

$= \frac{3\sqrt{2}-\sqrt{3}}{15}$

3- 7-2 جمع وطرح الجذور Collect and Subtract

يشترط في عمليتي الجمع والطرح بالنسبة للجذور إذا تساويا في الدليل (دليل الجذور) والأساس بمعنى ان تكون الجذور متشابهة.

بالنظر إلى الأمثلة التالية:

1. $2\sqrt{3}+4\sqrt{3}-5\sqrt{3}$
2. $\sqrt{5}+2\sqrt{2}-4\sqrt{5}+9\sqrt{2}$
3. $4\sqrt{28}+5\sqrt{63}$

نجد أن:

(1) الأعداد بينهما عامل مشترك هو $\sqrt{3}$ فيمكن تبسيط مجموعهما

$$2\sqrt{3} + 4\sqrt{3} - 5\sqrt{3} = (2 + 4 - 5)\sqrt{3}$$

$$= \sqrt{3}$$

(2) العددان $\sqrt{5}$ ، $-4\sqrt{5}$ بينهما عامل مشترك هو $\sqrt{5}$ يمكن تبسيط مجموعهما

$$\sqrt{5}\,(1 - 4) = -3\sqrt{5}$$

وبالمثل: $2\sqrt{2} + 9\sqrt{2} = (2 + 9)\sqrt{2}$

$$= 11\sqrt{2}$$

فيصبح $\sqrt{5} + 2\sqrt{2} - 4\sqrt{5} + 9\sqrt{2} = -3\sqrt{5} + 11\sqrt{2}$

(3) $4\sqrt{28} + 5\sqrt{63} = 4\sqrt{7\times 4} + 4\sqrt{9\times 6}$

$$= 4\times 2\sqrt{7} + 5\times 3\sqrt{6}$$

$$= 8\sqrt{7} + 15\sqrt{6}$$

مثال 6:

ضع كلا مما ياتي في أبسط صورة:

(أ) $5\sqrt{7} + 3\sqrt{7} - 9\sqrt{7} + 11\sqrt{7} - 8\sqrt{7}$

(ب) $3\sqrt{48} - 2\sqrt{27} + 2\sqrt{75} + \frac{7}{2}\sqrt{3}$

(جـ) $3\sqrt{147} - \frac{7}{3}\sqrt{\frac{1}{7}} - \sqrt{\frac{1}{72}}$

(د) $\sqrt{32} - \sqrt{8}$

الحل:

(أ) $5\sqrt{7} + 3\sqrt{7} - 9\sqrt{7} + 11\sqrt{7} - 8\sqrt{7}$

$$= (5 + 3 - 9 + 11 - 8)\sqrt{7}$$

$$= 2\sqrt{7}$$

(ب) $3\sqrt{48} - 2\sqrt{27} + 2\sqrt{75} + \frac{7}{2}\sqrt{3}$

$$= 3\sqrt{16\times 3} - 2\sqrt{9\times 3} + 2\sqrt{25\times 3} + \frac{7}{2}\sqrt{3}$$

$$= 12\sqrt{3} - 6\sqrt{3} + 10\sqrt{3} + \frac{7}{2}\sqrt{3}$$

$$= (12 - 6 + 10 + \frac{7}{2})\sqrt{3}$$

$$= \frac{39}{2}\sqrt{3}$$