دولة ليبيا
وزارة التعليم
مركز المناهج التعليمية والبحوث التربوية

الرياضيات

للسنة الثانية بمرحلة التعليم الثانوي
القسم العلمي

الاسبوع السادس

المدرسة الليبية بفرنسا ـ تور

العام الدراسي:
1441 / 1442 هـ . 2020 / 2021 م.

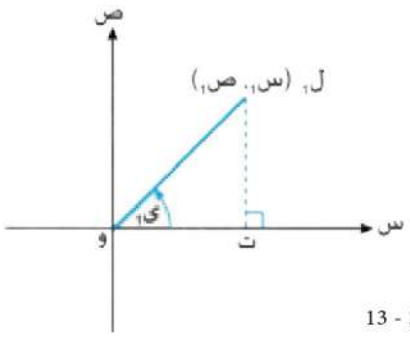
3 - 3 النسبة المثلثية لزاوية

نفرض $\angle$ س و $ل_1$ في الشكل (3 - 13) $ل_1$ هي النقطة ($س_1$، $ص_1$) قياس الزاوية الأساسية س و $ل_1$ يساوي $ى_1$ ويمكن إيجاد النسبة المثلثية لأية زاوية بمراعاة قياس زاويتها الأساسية وإشارة النسبة.

إذن جا $\angle$ س و $ل_1$ = جا $ى_1$ = $\frac{ص_1}{و\,ل_1}$

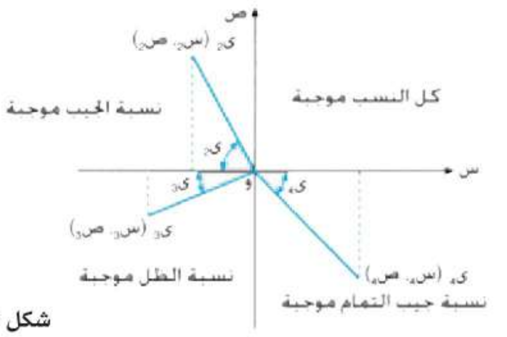
جتا $\angle$ س و $ل_1$ = جتا $ى_1$ = $\frac{س_1}{و\,ل_1}$

ظا $\angle$ س و ل $_1$ = ظا ى $_1$ = $\frac{ص_1}{س_1}$



شكل 3 - 13

يعتبر و ل $_1$ صورة نصف القطر الدائر و ل من محور السينات. هذه الصورة دائماً تؤخد حيث لها قيمة موجبة. القيمتان س $_1$ ، ص $_1$ موجبتان. إذن جميع النسب المثلثية موجبة في الربع الأول.



شكل 3 - 14

بنفس الطريقة يمكن الحصول على النتائج الأتية

في الربع الأول : جميع النسب موجبة

في الربع الثاني : الجيب فقط موجب

في الربع الثالث : الظل فقط موجب

في الربع الرابع : جيب التمام فقط موجب

يوضح شكل 3 - 14 زاوية واحدة في كل من الأرباع الثاني والثالث والرابع مع قياسات زواياها الأساسية على الترتيب ى $_2$ ، ى $_3$ ، ى $_4$. بالإضافة إلى نسب الجيب وجيب التمام والظل ويوجد ثلاث نسب مثلثية أخرى معرفة كا لأتي :

(1) قاطع تمام θ وتكتب قتا θ . وتساوي $\frac{1}{جا\theta}$

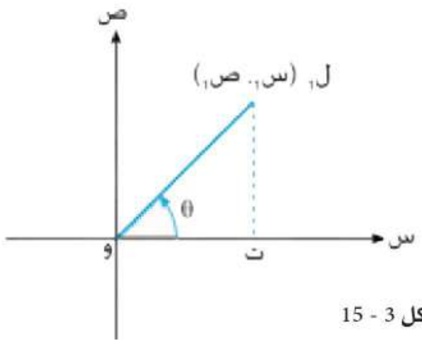
(2) قاطع θ وتكتب قا θ . ويساوي $\frac{1}{جتا\theta}$

(3)ظل تمام θ وتكتب ظتا θ . وتساوي $\frac{1}{ظا\theta}$

من الممكن أن نعبر عن نسبة مثلثية معلومة بدلالة نسبة أخرى . لاحظ شكل 3 - 15

جا θ= $\frac{ص_1}{و ل_1}$ ، جتا θ = $\frac{س_1}{و ل_1}$

إذن $\frac{جا θ}{جتا θ} = \frac{\frac{ص_1}{و ل_1}}{\frac{س_1}{و ل_1}} = \frac{ص_1}{س_1}$



شكل 3 - 15

ولكن $\frac{ص_1}{س_1}$ = ظا θ

إذن $\frac{جا θ}{جتا θ}$ = ظا θ

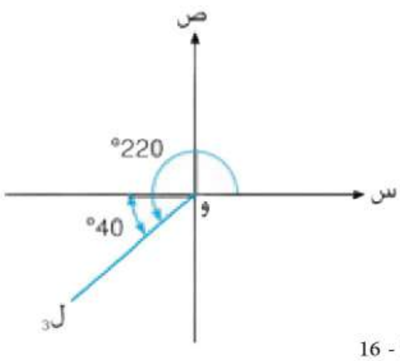
وبالمثل نستنتج أن $\frac{جتا θ}{جا θ}$ = ظتا θ

مثال 2

اوجد قيمة كل من النسب المثلثية الأتية باستخدام الألة الحاسبة

(أ) جا 220° (ب) جتا 325° (ج)ظا 410°

(د) جتا 500° (هـ) جا (- 160°)



شكل 3 - 16

الحل :

(أ) في الشكل 3 - 16

بفرض زاوية قياسها 220°

إذن قياس الزاوية الأساسية يساوي

220° - 180° = 40°

إشارة جيب الزاوية في الربع الثالث سالبة

جا 220° = - جا 40° = - 0.6428

(ب) في الشكل 3 - 17

قياس الزاوية 325°

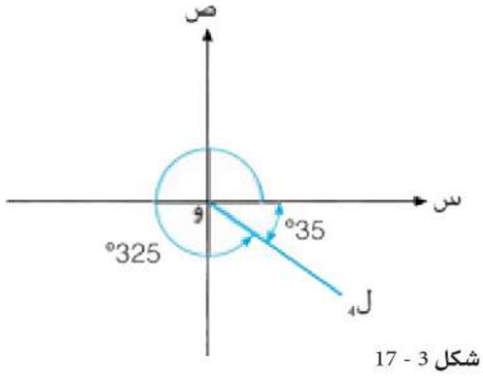
تقع هذه الزاوية في الربع الرابع

وجيب التمام موجب

قياس الزاوية الأساسية يساوي

$360^\circ - 325^\circ = 35^\circ$

إذن **جتا** 325° = **جتا** $35^\circ = 0.8192$



شكل 3 - 17

(جـ) في الشكل 3 - 18

قياس الزاوية 410°

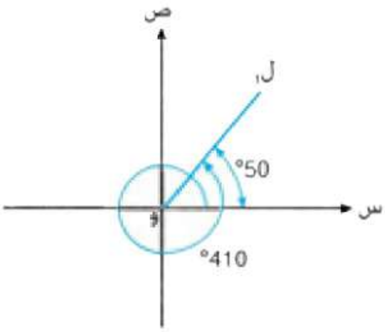
$410^\circ - 360^\circ = 50^\circ$

قياس الزاوية الأساسية = 50°

تقع هذه الزاوية في الربع الأول

والظل موجب

إذن **ظا** 410° = **ظا** $50^\circ = 1.192$



شكل 3 - 18

(د) في الشكل 3 - 19

قياس الزاوية المعلومة = 500°

$500^\circ - 360^\circ = 140^\circ$

الزاوية التي قياسها 140° . تقع في الربع الثاني

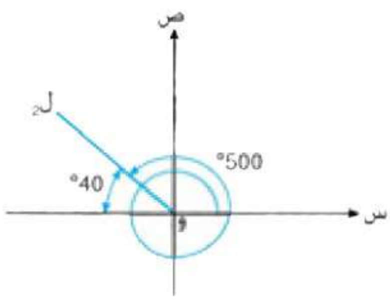
جيب تمامها سالب

قياس الزاوية الأساسية يساوي

$180^\circ - 140^\circ = 40^\circ$

إذن **جتا** 500° = - **جتا** 40°

$= -0.7660$



شكل 3 - 19

(هـ) في الشكل 3 - 20

قياس الزاوية المعلومة = -160°

إذن الزاوية تقع في الربع الثالث

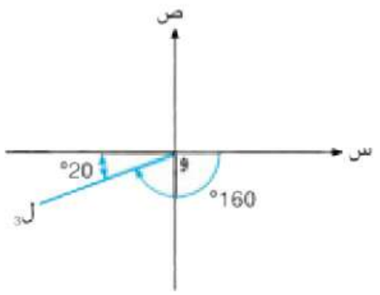
وجيبها سالب

قياس الزاوية الأساسية يساوي

$180^\circ - 160^\circ = 20^\circ$

إذن **جا** (-160°) = - **جا** 20°

$= -0.3420$

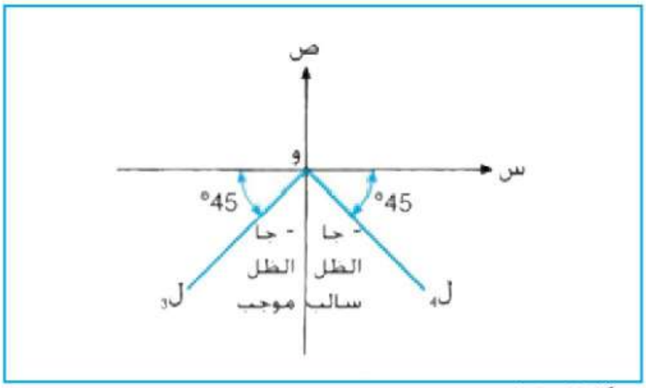


شكل 3 - 20

مثال 3:

إذا كان جاس $= -\frac{1}{\sqrt{2}}$ وكانتا جا س° ، ظا س° لهما إشارتان مختلفتان فأوجد قيم س حيث

$0 <$ س $< 360°$



شكل3 - 21

ملحوظة:
هنا س لا تمثل مقدار زاوية بل قيمة عددية . مقدار الزاوية س°

الحل :

جاس° $= -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Leftarrow$ س° تقع في الربعين الثالث والرابع

ظا س ْ موجب في الربع الثالث . سالب في الربع الرابع . إذن لكي يكون الجيب والظل لهما إشارتان مختلفتان فالزاوية المطلوبة تكون في الربع الثالث .

قياس الزاوية الأساسية = 45°

إذن س = $180^\circ + 45^\circ = 225^\circ$

عندما $0 <$ س $< 360^\circ$

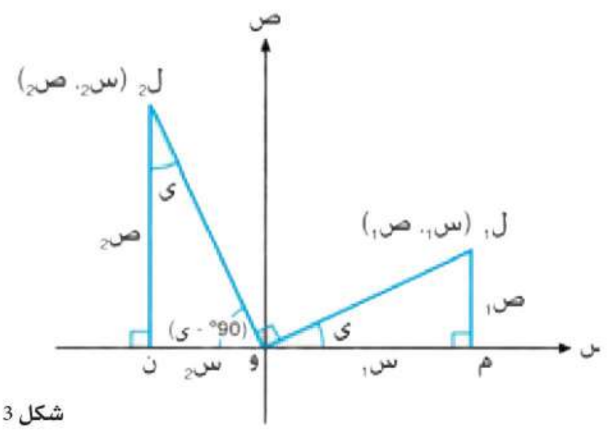
مثال 4:

عبر عن:

(أ) جا (ى + 90°) (ب) جتا (ى + 90°) (جـ) ظا (ى + 90°)

بدلالة نسبة مثلثية واحدة في ى حيث ى زاوية حادة .

(أ)



شكل 3 - 22

الحل :

في الشكل 3 - 22 ل$_1$ ل$_2$ هما النقطتان (س$_1$ ، ص$_1$) (س$_2$ ، ص$_2$) على الترتيب .

ق (∠ س و ل$_1$)= ى. ق (∠ ل$_1$ و ل$_2$) = 90° ل$_2$ ن . ل$_1$ م عمودان على محور س.

جا(ى + 90°) = جا ∠ل$_2$ و ن

= جا(90° - ى)

$= \frac{\text{ص}_2}{\text{و ل}_2}$

في Δ و ل$_2$ ن . ق (∠ و ل$_2$ ن) = ى.

جتا ى $= \frac{\text{ص}_2}{\text{و ل}_2}$

إذن جا (ى + 90°) = جتا ى

(ب) جتا(ى + 90°) = − جتا (∠ ل $_2$ و ن)

= − جتا(90° − ى)

$= \frac{س_2}{و ل_2}$

في Δ و ل $_2$ ن . $\frac{س_2}{و ل_2}$ = − جا ى

إذن جتا (ى + 90°) = − جا ى

(جـ) ظا(ى + 90°) = − ظا ∠ ل $_2$ و ن

= − ظا(90° − ى)

$= \frac{ص_2}{س_2}$

في Δ و ل $_2$ ن . $\frac{ص_2}{س_2}$ = − ظتا ى

إذن ظا (ى + 90°) = − ظتا ى

5 - أوجد القيم العددية لكل من **جتا** 2 س ، **ظا** 3س ، **جا** 4 س عندما س= $\frac{3\pi}{5}$ راديان .

3 - 4 ثلاث متطابقات مثلثية بسيطة

يوضح شكل 3 - 23 مثلث ن م ل القائم الزاوية فيه ق ∠ ن م ل = 90° . ق ∠ م ن ل = θ

باستخدام نظرية فيثاغورث :

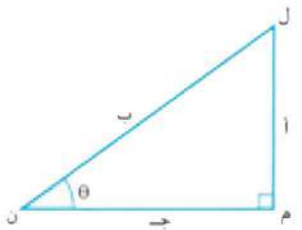
$أ^2 + جـ^2 = ب^2$

بقسمة المعادلة على $ب^2$.

إذن $\frac{أ^2}{ب^2} + \frac{جـ^2}{ب^2} = \frac{ب^2}{ب^2} \Leftarrow$ **جا**$^2\theta$ + **جتا**$^2\theta$ = 1

∴ **جتا**$^2\theta$ + **جا**$^2\theta$ =1

حيث $\left(\frac{أ}{ب}\right)^2$ = **جا**$^2\theta$ ، $\left(\frac{جـ}{ب}\right)^2$= **جتا**$^2\theta$



شكل3 - 23

هذه العلاقة في الحقيقة صحيحة لجميع قيم θ وتسمى متطابقة مثلثية . وقد شرحت هنا في حالة زاوية حادة . ولكن يمكن البرهنة على صحتها لجميع قيم θ.

بما أن **جتا**$^2\theta$ + **جا**$^2\theta$ = 1 ....(1)

بقسمة طرفي المعادلة على **جتا**$^2\theta$ نجد أن

$$\frac{جتا^2\theta}{جتا^2\theta} + \frac{جا^2\theta}{جتا^2\theta} = \frac{1}{جتا^2\theta}$$

$\Leftarrow$ **ظا**$^2\theta$ + 1 = **قا**$^2\theta$

وأكثر شيوعاً 1 + **ظا**$^2\theta$ = **قا**$^2\theta$ ....(2)

بالمثل بقسمة المعادلة (1) على **جا**$^2\theta$ نجد أن

$\Leftarrow$**ظتا**$^2\theta$ + 1 =**قتا**$^2\theta$ ....(3)

المتطابقات الثلاثة (1) ،(2)،(3)مفيدة في حل المعادلات المثلثية

مثال 5:

اثبت صحة المتطابقات الأتية

(أ) جا ^{4} θ - جتا ^{4} θ ≡ 1 - 2 جتا ^{2} θ

(ب) قا ^{4} θ - قا ^{2} θ ≡ ظا ^{4} θ + ظا ^{2} θ

ملحوظة: عادة نبدأ بالطرف الأصعب ونحاول استخدام المتطابقات السابقة لتحويله إلى الصيغة في الطرف الأخر . اتجه دائماً إلى المتطابقة المعتادة ثم اتجه إلى الصيغة النهائية التي تريدها

الحل :

(أ) جا ^{4} θ - جتا ^{4} θ

= (جا ^{2} θ + جتا ^{2} θ)(جا ^{2} θ - جتا ^{2} θ)

= 1 × [(1 - جتا ^{2} θ) - جتا ^{2} θ]

= 1 - 2 جتا ^{2} θ

(ب) قا ^{4} θ - قا ^{4} θ

= قا ^{2} θ (قا ^{2} θ - 1)

= (ظا ^{2} θ + 1) (ظا ^{2} θ)

ظا ^{4} θ + ظا ^{2} θ