دولة ليبيا
وزارة التعليم
مركز المناهج التعليمية والبحوث التربوية

مبادئ الإحصاء

للسنة الثانية بمرحلة التعليم الثانوي
«القسم العلمي»

الاسبوع السادس

المدرسة الليبية بفرنسا ـ تور

العام الدراسي:
1441 / 1442 هـ . 2020 / 2021 م.

الفصل الرابع

مقاييس النزعة المركزية " المتوسطات "

الفكرة الأساسية التي تعتمد عليها مقاييس النزعة المركزية هي تمثيل مجموعة كبيرة من البيانات بقيمة واحدة ، وهذه القيمة عادة تكون في وسط البيانات أي في مركزها وهي القيمة التي تميل إليها بقية القيم وتتجمع حولها ، وبالتالي سميت هذه الخاصية التي تتمتع بها معظم البيانات بخاصية النزعة المركزية ، وأطلق على المقاييس التي تقيس هذه القيمة المتوسطة التي يحصل حولها التجمع، مقاييس النزعة المركزية أو المتوسطات .

وتؤخذ قيمة المتوسط كممثل للمجموعة كلها ، على أساس أنها قيمة غير متطرفة بل هي قيمة تتجمع حولها أغلبية القيم ، وبالتالي هي أولى من غيرها في تمثيل البيانات . ومعرفة القيمة الوسطى للبيانات تفيدنا في دراسة خصائص التوزيع التكراري والمقارنة بين التوزيعات التكرارية المختلفة لنفس الظاهرة ، ومن أهم المتوسطات التي سنتعرض لدراستها ما يلي :

- **الوسط الحسابي (المتوسط الحسابي) .**
- **الوسيط .**
- **المنوال .**

(4 – 1) الوسط الحسابي :

يعرف الوسط الحسابي بأنه القيمة التي تمثل مركز ثقل البيانات أي نقطة الارتكاز التي يحصل عندها التوازن ، فإذا كان لدينا مجموعة من البيانات ومثلناها بأثقال متساوية الوزن على لوح مدرج ، فسنجد أن هذا اللوح سيتزن إذا علق أو ثبت من مركز ثقله ومركز الثقل هذا هو الذي يمثل قيمة الوسط الحسابي لهذه القيم ، ويحسب الوسط الحسابي لأي مجموعة من القيم بجمع هذه القيم ثم قسمة المجموع على عددها .

$$\text{الوسط الحسابى} = \frac{\text{مجموع القيم}}{\text{عدد القيم}}$$

ويطلق كذلك على الوسط الحسابي مصطلح المتوسط الحسابي ، وسنرمز لمتوسط العينة بالرمز $\overline{X}$ ، ونرمز لمتوسط المجتمع بالرمز μ .

وسنتعرض فيما يلي لكيفية تطبيق صيغة الوسط الحسابي في حالةالبيانات غير المبوبة أي غير المعروضة في جداول توزيعات تكرارية ، وفي حالة البيانات المبوبة أي المعروضة في جداول توزيعات تكرارية .

1 – [illegible] :

إذا رمزنا للمتغير محل الدراسة بالرمز (X)، وللقيم المشاهدة لهذا المتغير بالرموز التالية :
$X_1 , X_2 , X_3 , \dots , x_n$

حيث n يرمز إلى عدد القيم المشاهدة ، فنحسب الوسط الحسابي ($\overline{X}$) كما يلي :

$$\boxed{\overline{X} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}}$$

وإذا عبرنا عن عملية الجمع باستخدام الرمز ($\sum$) للدلالة على مجموع القيم المشاهدة ، فإننا نستطيع كتابة صيغة قانون الوسط الحسابي في حالة البيانات غير المبوبة كما يلي :

$$\boxed{\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}}$$

[illegible] (1-4) :

البيانات التالية تمثل درجات 6 في مادة الإحصاء ، (4 ، 6 ، 3 ، 7 ، 9 ، 1)، احسب الوسط الحسابي لهذه الدرجات .

[illegible] :

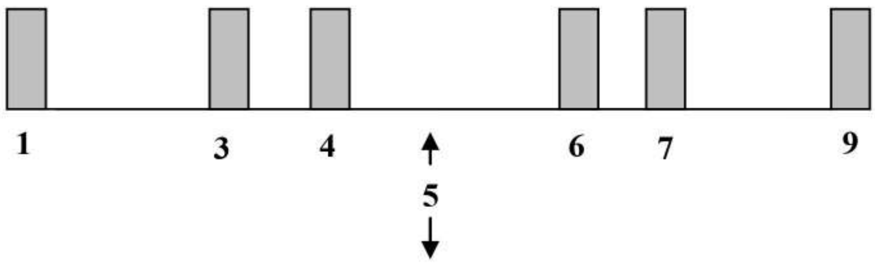
المتغير محل الدراسة في هذا المثال هو درجة الإحصاء ، وسنرمز له بالرمز X، والقيم المشاهدة التي تمثل درجات 6 طلبة سنرمز لها كما يلي :

$X_1 = 4$ ، $X_2 = 6$ ، $X_3 = 3$ وهكذا إلى ... $X_6 = 1$

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

$$= \frac{4+6+3+7+9+1}{6} = 5$$

وهذا يعني أن مركز الثقل أي: نقطة الارتكاز التي يحصل عندها التوازن هي الدرجة 5 ، وذلك كما هو مبيّن في شكل (4 – 1) .



الوسط الحسابي (مركز الثقل)

شكل (4 – 1)

مثال (4-2) :

البيانات التالية توضح قيمة الواردات (بملايين الدنانير الليبية) لأحد الموانى في السنوات من 1976 إلى 1980 وذلك وفقاً للنشرات الصادرة عن مصلحة الإحصاء والتعداد .

السنوات	1976	1977	1978	1979	1980
قيمة الواردات	381	272	293	333	391

احسب الوسط الحسابي لقيمة واردات هذا الميناء في هذه السنوات الخمس .

الحلّ :

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

$$= \frac{381+272+293+333+391}{5} = \frac{1670}{5} = 334$$

2 – حساب الوسط الحسابي للبيانات المبوبة :

أ – إذا كانت البيانات مبوبة في جدول توزيع تكراري بحيث تمثل كل فئة من فئات الجدول قيمة واحدة فقط ، ففي هذه الحالة لكي نحسب الوسط الحسابي نجرى الخطوات التالية :

• نحسب المجموع الكلي للقيم التابعة لكل فئة بضرب القيمة x_i التي تمثلها الفئة في تكرار الفئة f_i ، أي نحسب ($x_i f_i$) لكل الفئات .

• نحسب المجموع الكلي لجميع القيم وذلك بجمع المجاميع الخاصة بكل الفئات والتي تحصلنا عليها في الخطوة السابقة، أي نحسب :

($\sum_{i=1}^{k} x_i f_i$) ، حيث k = عدد الفترات (أو عدد القيم المختلفة).

• نحسب العدد الكلي للقيم المشاهدة وهو بالطبع يساوي المجموع الكلي للتكرارات ($\sum_{i=1}^{k} f_i$) .

• نحسب الوسط الحسابي بقسمة المجموع الكلي للقيم ($\sum_{i=1}^{k} x_i f_i$) على العدد الكلي للقيم ($\sum_{i=1}^{k} f_i$) .

ب– إذا كانت البيانات مبوبة في جدول تكراري بحيث كل فئة من فئات الجدول تمثل أكثر من قيمة واحدة ، ففي هذه الحالة لا نستطيع معرفة القيم المشاهدة التابعة لكل فئة ، والذي نعرفه هو عددها فقط والمتمثل في تكرار الفئة ، ولحساب المجموع الكلي للقيم التابعة لكل فئة سنفترض أن القيم المشاهدة موزعة حول مركز الفئة داخل كل فئة من فئات الجدول توزيعاً عادلاً ، وبالتالي تكون قيمة مركز الفئة هي القيمة الافتراضية لجميع القيم داخل الفئة ، ولكي نحسب الوسط الحسابي في هذه الحالة نجري الخطوات التالية :

• نحسب مركز كل فئة ونرمز للمركز بالرمز x_i .

• نحسب المجموع الكلي للقيم التابعة لكل فئة بضرب القيمة x_i (حيث x_i مركز الفئة) في تكرار الفئة f_i اي نحسب ($x_i f_i$) لكل الفئات.

• نحسب المجموع الكلي لجميع القيم وذلك بجمع المجاميع الخاصة بكل الفئات والتي تحصلنا عليها في الخطوة السابقة، أي نحسب ($\sum_{i=1}^{k} x_i f_i$) .

• نحسب العدد الكلي للقيم المشاهدة وهو بالطبع يساوي المجموع الكلي للتكرارات ($\sum_{i=1}^{k} f_i$) .

• نحسب المتوسط الحسابي بقسمة المجموع الكلي للقيم ($\sum_{i=1}^{k} x_i f_i$) على العدد الكلي للقيم ($\sum_{i=1}^{k} f_i$) .

وهكذا تكون صيغة المتوسط الحسابي للبيانات المبوبة كما يلي :

$$\boxed{\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i f_i}{\sum_{i=1}^{k} f_i}}$$

حيث :

x : القيمة التي تمثلها الفئة (عندما الفئة تمثل قيمة واحدة فقط) ،وهي عبارة عن مركز الفئة (عندما الفئة تمثل أكثر من قيمة واحدة)

f : تكرار الفئة .

مثال (4-3) :

تمثل البيانات المنفصلة الموضحة في الجدول التكراري التالي توزيع الفصول على حسب عدد الطلبة في مدرسة ابتدائية بها 20 فصلاً ، فما هو الوسط الحسابي لعدد طلبة الفصل في هذه المدرسة؟

عدد طلبة الفصل	30	31	32	33	34	35
عدد الفصول	1	2	4	5	6	2

الحلّ :

بما أن كل فئة في هذا الجدول التكراري تمثل قيمة واحدة فقط فستكون x هي عبارة عن القيمة المذكورة في الفئة ، وسنجري الخطوات اللازمة للحصول على الوسط الحسابي والموضحة في جدول (4 – 1) :

جدول (1-4)

عدد طلبة الفصل (x_i)	عدد الفصول (f_i)	$x_i f_i$
30	1	30
31	2	62
32	4	128
33	5	165
34	6	204
35	2	70
المجموع	20	659

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i f_i}{\sum_{i=1}^{k} f_i} = \frac{659}{20} = 32.95$$

مثال (4-4) :

تمثل البيانات الموضحة في الجدول التكراري التالي درجات 50 طالباً :

الدرجة	عدد الطلبة
39 – 30	4
49 – 40	6
59 – 50	8
69 – 60	12
79 – 70	9
89 – 80	7
99 - 90	4

احسب الوسط الحسابي لهذه الدرجات .

الحلّ :

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i f_i}{\sum_{i=1}^{k} f_i}$$

بما أن كل فئة في هذا الجدول التكراري تمثل أكثر من قيمة فستكون x_i عبارة عن مركز الفئة ، وسنجري الخطوات اللازمة للحصول على الوسط الحسابي والموضحة في جدول (4 – 2)

جدول (4-2)

الدرجة	عدد الطلبة (f_i)	مراكز الفئات (x_i)	$x_i f_i$
39 – 30	4	34.5	138.0
49 – 40	6	44.5	267.0
59 – 50	8	54.5	436.0
69 – 60	12	64.5	774.0
79 – 70	9	74.5	670.5
89 – 80	7	84.5	591.5
99 - 90	4	94.5	378.0
المجموع	50		3255.0

$$\overline{x} = \frac{3255}{50} = 65.1$$ درجـــة

مثال (4-5) :

احسب الوسط الحسابي للبيانات التالية التي تمثل أوزان 210 قطع منتجة .

الوزن (بالجرام)	عدد القطع
50 إلى أقل من 54	10
54 إلى أقل من 58	30
58 إلى أقل من 62	90
62 إلى أقل من 66	60
66 إلى أقل من 70	20

الحلّ :

الوسط الحسابي هو =
$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i f_i}{\sum_{i=1}^{k} f_i}$$

وجدول (4 – 3) يوضح الحسابات اللازمة للحصول على الوسط الحسابي .

جدول (4-3)

الوزن (بالجرام)	عدد القطع (f_i)	مراكز الفئات (x_i)	$x_i f_i$
50 إلى أقل من 54	10	52	520
54 إلى أقل من 58	30	56	1680
58 إلى أقل من 62	90	60	5400
62 إلى أقل من 66	60	64	3840
66 إلى أقل من 70	20	68	1360
المجموع	210		12800

الوسط الحسابي هو :

$$\overline{x} = \frac{12800}{210} = 60.95$$ جرام

خواص الوسط الحسابي :

1- أهم مقاييس النزعة المركزية وأكثرها استعمالاً نظراً لسهولة حسابه وإمكانية التعامل معه رياضياً ، ولذلك له أهمية قصوى في التحليل الإحصائي إذ إنه يدخل في حساب كثير من المقاييس الأخرى.

2- يأخذ بعين الاعتبار جميع القيم المشاهدة ، ونستطيع أن نحصل على مجموع القيم المشاهدة إذا عرفنا قيمة الوسط الحسابي كما يلي :

مجموع القيم = الوسط الحسابي × عدد القيم

3- الوسط الحسابي هو قيمة نظرية وليس بالضروري أن تكون واحدة من القيم التي يمكن أن يأخذها المتغير محل الدراسة ، ففي المثال (4 – 3) وجدنا أن الوسط الحسابي لعدد الطلبة في الفصل يساوي 32.95 ، وهذه القيمة لا يمكن أن يأخذها المتغير محل الدراسة وهو عدد الطلبة في الفصل .

4- يتأثر بوجود قيم متطرفة في البيانات وينحاز لها ، فمثلاً إذا تبرع خمسة عشر فرداً لعمل خيري بالمبالغ التالية :

10 ، 20 ، 18 ، 10 ، 10 ، 20 ، 12 ، 15 ، 15 ، 20 ، 15 ، 15 ، 10 ، 10 ، 1000

الوسط الحسابي = $\frac{1200}{15}$ = 80 ديناراً

نــلاحظ أن الوسط الحسابي للتبرعات كبير ولا يمثل ما دفعه معظم الأفراد ، فهنا انحاز الوسط الحسابي للقيمة المتطرفة 1000، وبالتالي يعدُّ الوسط الحسابي في هذه الحالة مقياساً مضللاً . ولكن لو استبعدنا القيمة المتطرفة فسنلاحظ أن الوسط الحسابي سيكون واقعياً .

5- لا يمكن حسابه في حالة البيانات النوعية (الوصفية) .

6- لا يمكن إيجاده من الرسم (أي بيانياً) .

7- لا يمكن حسابه في حالة جداول التوزيعات التكرارية المفتوحة ؛ لأننا لا نستطيع حساب مراكز الفئات المفتوحة .

8- مجموع انحرافات القيم عن وسطها الحسابي يساوي صفراً ، حيث انحراف القيمة عن الوسط الحسابي المقصود به القيمة مطروحاً منها الوسط الحسابي ، وبالتالي فهذه الخاصية تعني أن:

$$\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X}) = 0$$

فمثلا : إذا كانت لدينا البيانات التالية 6 ، 8 ، 5 ، 11 ، 10

الوسط الحسابي لهذه البيانات هو: $\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$

$$\frac{6+8+5+11+10}{5} = 8$$

فسنجد أن مجموع انحرافات هذه القيم عن وسطها الحسابي يساوي صفراً ، كما هو مبين فيما يلي :

الانحرافات $(x_i - \bar{x})$	القيمة (x_i)
6 – 8 = -2	6
8 – 8 = 0	8
5 – 8 = -3	5
11– 8 = 3	11
10 – 8 =2	10
صفر	المجموع

9- مجموع مربعات انحرافات القيم عن وسطها الحسابي أقل ما يمكن ، أي أن :

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 = \text{نهاية صغرى}$$

ويعني ذلك أنه لو اخترنا أي قيمة أخرى سواء أكانت أقل أو أكبر من الوسط الحسابي ، فسنجد أن مجموع مربعات انحرافات القيم عن هذه القيمة دائماً أكبر من مجموع مربعات انحرافات القيم عن الوسط الحسابي .

فمثلاً : نستطيع حساب مجموع مربعات انحرافات القيم عن وسطها الحسابي بالنسبة للبيانات المذكورة في المثال السابق في الخاصية (9) ، وذلك كما يلي:

مربعات الانحرافات عن الوسط الحسابي $(x_i - 8)^2$	انحرافات القيم عن الوسط الحسابي $(x_i - 8)$	القيمة (x_i)
4	2-	6
0	0	8
9	3-	5
9	3	11
4	2	10
26		المجموع

وهذا يعني أن أقل قيمة يمكن أن يأخذها مجموع مربعات الانحرافات هو القيمة 26 ، ولو حسبنا مجموع مربعات انحرافات هذه القيم عن أي قيمة أخرى أكبر أو أقل من الوسط الحسابي (8) فسنجد أن مجموع مربعات الانحرافات دائماً أكبر من 26 ، فمثلاً لو حسبنا مجموع مربعات انحرافات القيم عن القيمة 9 وعن القيمة 7.5

فسنحصل على ما يلي :

القيمة (x_i)	$(x_i - 9)^2$	$(x_i - 7.5)^2$
6	9	2.25
8	1	0.25
5	16	6.25
11	4	12.25
10	1	6.25
المجموع	31	27.25

ونلاحظ أن 31 أكبر من 26 ، وكذلك 27.25 أكبر من 26 .