دولة ليبيا
وزارة التعليم
مركز المناهج التعليمية والبحوث التربوية

الرياضيات

للسنة الثالثة من مرحلة التعليم الثانوي
القسم العلمي

الدرس السادس

المدرسة الليبية بفرنسا ـ تور

العام الدراسي

1441 / 1442 هـ - 2020 / 2021 م

2-2 ضعف ومضاعفات العدد

صيغة الزاوية المركبة يمكن أن تمتد لإيجاد قيم ضعف ومضاعفات الزوايا مثل:

جا 2 أ ، جتا 2 أ ، ظا 2 أ ... الخ

بالتعويض عن ب بـ أ في (أ + ب) نحصل على 2 أ.

إذن جا 2 أ = جا (أ + أ)

= جا أ جتا أ + جتا أ جا أ

= 2 جا أ جتا أ

جا 2 أ = 2 جا أ جتا أ

بالمثل

جتا 2 أ = جتا (أ + أ)

= جتا أ جتا أ – جا أ جا أ

= جتا^2 أ – جا^2 أ

جتا 2 أ = جتا^2 أ – جا^2 أ

هذه النتيجة لها بديلان مهمان

نعلم أن جا^2 أ + جتا^2 أ = 1

⇦ جا^2 أ = 1 – جتا^2 أ، جتا^2 أ = 1 – جا^2 أ

بالتعويض عن جا^2 أ = 1 – جتا^2 أ، جتا^2 أ = 1 – جا^2 أ بالترتيب،

نجد أن جتا 2 أ = جتا^2 أ – (1 – جتا^2 أ)

جتا 2 أ = 2 جتا^2 أ – 1

جتا 2 أ = (1 – جا^2 أ) – جا^2 أ

جتا 2أ = 1 – 2 جا^2 أ

مرة أخرى..... ظا 2 أ = ظا (أ + أ) = $\frac{\text{ظا أ + ظا أ}}{\text{1 - ظا أ ظا أ}}$

= $\frac{\text{2 ظا أ}}{\text{1 - ظا}^2\text{ أ}}$

إذن.... ظا 2 أ = $\frac{\text{2 ظا أ}}{\text{1 - ظا}^2\text{ أ}}$

تسمى هذه صيغة ضعف الزاوية والنتائج ملخصة فيما يلي :

جا 2 أ = 2 جا أ جتا أ

جتا 2 أ = جتا^2 أ - جا^2 أ

= 2 جتا^2 أ - 1

= 1 - 2 جا^2 أ

ظا 2 أ = $\frac{\text{2 ظا أ}}{\text{1 - ظا}^2\text{ أ}}$

نستطيع أيضًا إيجاد جا 3 أ بدلالة الزاوية الفريدة أ بالتعويض أولا عن 3 أ = أ + 2 أ كالآتى:

جا 3 أ = جا (أ + 2 أ)

= جا أ جتا 2 أ + جتا أ جا 2 أ ، ثم باستخدام صيغة ضعف الزاوية على 2 أ

جا 3 أ = جا أ (جتا^2 أ - جا^2 أ) + جتا أ (2 جا أ جتا أ)

= 3 جا أ - 4 جا^3 أ

النسب المثلثية الأخرى لمضاعفات أخرى للزاوية أ يمكن إيجادها بهذه الطريقة بالتعبير عن الزاوية المضاعفة بدلالة زوايا أصغر مثلًا:

جتا 4 أ = جتا (2 أ + 2 أ) التي يمكن فكها إلى الزاوية الفريدة أ.

3-2 المقدار أ جتا θ ± ب جا θ

للتعبير عن... أ جتا θ + ب جا θ ، على الصورة.... ر جتا $(\theta - \alpha)$

نفرض..... أ جتا θ + ب جا $\theta \equiv$ ر جتا $(\theta - \alpha)$

إذن....... أ جتا θ + ب جا $\theta \equiv$ ر جتا α جتا θ + ر جا α جا θ

بمساواة معاملي جتا θ، جا θ:

أ = ر جتا α

ب = ر جا α

بالتربيع والجمع:

ر^2 (جتا^2 α + جا^2 α) = أ^2 + ب^2

إذن ر^2 = أ^2 + ب^2

بأخذ الجذر الموجب:

إذن: ر = $\sqrt{\text{أ}^2 + \text{ب}^2}$

بالقسمة

$$\frac{\text{ب}}{\text{أ}} = \frac{\text{ر جا }\alpha}{\text{ر جتا }\alpha}$$

ظا α = $\frac{\text{ب}}{\text{أ}}$

أ جتا θ + ب جا $\theta \equiv \sqrt{\text{أ}^2 + \text{ب}^2}$ جتا $(\theta - \alpha)$، ظا α = $\frac{\text{ب}}{\text{أ}}$

بالمثل يمكن إثبات أن:

أ جتا θ − ب جا $\theta \equiv \sqrt{\text{أ}^2 + \text{ب}^2}$ جتا $(\theta + \alpha)$

أ جا θ + ب جتا $\theta \equiv \sqrt{\text{أ}^2 + \text{ب}^2}$ جا $(\theta + \alpha)$

أ جا θ − ب جتا $\theta \equiv \sqrt{\text{أ}^2 + \text{ب}^2}$ جا $(\theta - \alpha)$

ظا α = $\frac{\text{ب}}{\text{أ}}$

القيم العظمى والصغرى للمقدار أ جتا θ ± ب جا θ.

مثال3:

أوجد القيم العظمى والصغرى للدوال الآتية:

(أ) 5 جتا θ + 12 جا θ

(ب) 2 جا θ − جتا θ

والقيم المناظرة لـ : θ بين 0°، 360°

الحل:

(أ) نفرض 5 جتا θ + 12 جا θ ≡ ر جتا ($\theta - \alpha$)

ر = $\sqrt{12^2 + 5^2}$ = 13،

ظا α = $\frac{12}{5}$

$\alpha = 67.38^\circ$

$\therefore$ 5 جتا θ + 12 جا θ = 13 جتا (θ - 67.38°)

قيمة جتا($\theta - \alpha$) العظمى تساوى 1 وقيمتها الصغرى تساوى سالب 1

إذن 5 جتا θ + 12 جا θ العظمى تساوى 13 والصغرى تساوى سالب 13

5 جتا θ + 12 جا θ له قيمة عظمى عندما جتا (θ - 67.38°) = 1

أي: $\theta - 67.38^\circ = 0^\circ$

$\theta = 67.4^\circ$ (مقربا لرقم عشري واحد)

5 جتا θ + 12 جا θ له قيمة صغرى عندما جتا (θ - 67.38°) = - 1

أي $\theta - 67.38^\circ = 180^\circ$

$\theta = 180^\circ + 67.38^\circ$ ≈ 247.4° (مقربا لرقم عشري واحد).

(ب) بالمثل

نفرض 2 جا θ - جتا θ ≡ ر جا (θ - α)

إذن ر = $2^2 + 1^2$ = 5

ظا α = $\frac{1}{2}$

$\alpha = 26.57^\circ$

إذن...... 2 جا θ - جتا θ = 5 جا (θ - 26.57°)

إذن ...... قيمة 2 جا θ - جتا θ العظمى تساوي 5 و الصغرى تساوي -5

2 جا θ - جتا θ عظمى عندما جا (θ - 26.57°) = 1

أي عندما: $\theta - 26.57^\circ = 90^\circ$

$\theta = 90^\circ + 26.57^\circ$

= 116.6° (لرقم عشري واحد)

2 جا θ - جتا θ صغري عندما جا (θ - 26.57°) = - 1

أي عندما: $\theta - 26.57^\circ = 270^\circ$

$\theta = 270^\circ + 26.57^\circ$

= 296.6° (لرقم عشري واحد)

|ر| يسمى سعة الدالة

تمرين 2-ب

(1) اختصر:

(أ) جتا² 18° - جا² 18° (ب) $\frac{\text{1-ظا}^2\,10^\circ}{\text{2ظا }10^\circ}$ (جـ) 2 جا $\frac{\text{س}}{2}$ جتا $\frac{\text{س}}{2}$

(د) 2 جتا² 2س - 1 (هـ) جا س جتا س

(2) أوجد من دون استخدام الجداول الرياضية أو الآلة الحاسبة، قيمة الأتي :

(أ) 2 جتا 75° جتا 75° (ب) جتا² $22\frac{1}{2}$° - جا² $22\frac{1}{2}$° (جـ) $\frac{\text{ظا }112.5^\circ}{\text{1-ظا }112.5^\circ}$

(3) إذا كان، جا أ = $\frac{4}{5}$ ، أ زاوية حادة، فأوجد، من دون استخدام الجداول أو الآلة الحاسبة قيمة كل من:

(أ) جا 2 أ (ب) جتا 2 أ (جـ) ظا 2 أ

(4) أثبت المتطابقات الآتية باستخدام قواعد الزاوية المركبة:

(أ) جتا (90° + أ) = - جا أ (ب) $\frac{\text{1 - جتا 2 }\theta}{\text{1 + جتا 2 }\theta}$ = ظا² θ

(جـ) $\frac{\text{جا }\theta}{\text{1 + جتا }\theta}$ = ظا $\frac{1}{2}$ θ (د) (جتا أ - جا أ)² - جا أ= - جا 1

(هـ) ظتا أ + ظا أ = 2 قتا 2 أ (و) جا 2 أ = $\frac{\text{2 ظا أ}}{\text{1 + ظا}^2\text{ أ}}$

(5) أوجد، قياسات قيم س، حيث 0° ≥ س ≥ 360°، والتي تحقق المعادلات الآتية:

(أ) $\frac{1}{2}$ جا س = جا 2 س (ب) 7جا س + 3 جتا 2 س = 0 (هـ) ظا 2 س = 3 ظا س

(6) أوجد القيم العظمى والصغرى لكل من الدوال الآتية مع ذكر قيم θ من 0° إلى 360° :

(أ) 3 جا θ + 4 جتا θ (ب) 3 جتا θ - 4 جا θ (جـ) م جا θ - ن جتا θ

تمرين 2-جـ

(1) أوجد جميع قيم س بين 0°، 360° التي تحقق المعادلة: 5 جا س + 2 قتا س = 11

(2) إذا عُلم أن: ظا θ = س، جتا 2 θ = ص، وأن θ زاوية حادة، فأوجد ص بدلالة س.

(3) إذا كان ظا س = $\frac{15}{8}$ ، جتا ص = $\frac{3}{5}$، أن س، ص في نفس الربع، فاحسب من دون استخدام الجداول أو الآلة الحاسبة قيمة: جا (س + ص)

(4) إذا عُلم 2 أ زاوية حادة، أن جا 2 أ = $\frac{\sqrt{5}}{3}$ ، فاحسب ، من دون استخدام الجداول أو الآلة الحاسبة قيم :

(أ) جتا 2 أ (ب) ظا أ

(5) أثبت المتطابقات الأتية:

(أ) جتا 2 أ = $\frac{\text{1 - ظا}^2\text{ أ}}{\text{1 + ظا}^2\text{ أ}}$ (ب) $\frac{\text{جا س}}{\text{جتا س - جا س}}$ + $\frac{\text{جتا س}}{\text{جتا س + جا س}}$ = قا 2 س

(جـ) ظتا 2 θ + قتا 2 θ = ظتا θ

(6) حل المعادلات الأتية في θ حيث 0° ≥ θ ≥ 360°

(أ) 3 جتا θ + 4 جا θ = 5 (ب) 4 جا θ - 3 جتا θ = 2 (جـ) $\sqrt{3}$ جا θ + جتا θ = 1

الملخص:

1- صيغة الزاوية المركبة :

هذه النتائج صحيحة لجميع قيم أ ، ب

جا (أ $\mp$ ب) = جا أ جتا ب $\mp$ جتا أ جا ب

جتا (أ $\pm$ ب) = جتا أ جتا بـ $\mp$ جا أ جا ب

ظا (أ $\mp$ ب) = $\dfrac{\text{ظا } \mp \text{ ظا ب}}{1+\text{ظا أ ظا ب}}$

2- قاعدة ضعف الزاوية :

جا 2أ = 2 جا أ جتا أ

جتا 2أ = جتا^2 أ − جا^2 أ

= 2 جتا^{2}أ − 1

= 1 − 2 جا^2 أ

ظا 2أ = $\dfrac{\text{2 ظا أ}}{\text{1 - ظا}^2\text{أ}}$

3- صيغة الزاوية المركبة:

المقدار أ جتا θ $\pm$ ب جا θ

أ جتا θ $\mp$ ب جا θ = $\sqrt{\text{أ}^2 + \text{ب}^2}$ جتا $(\theta\pm\alpha)$، حيث ظا α = $\frac{\text{ب}}{\text{أ}}$

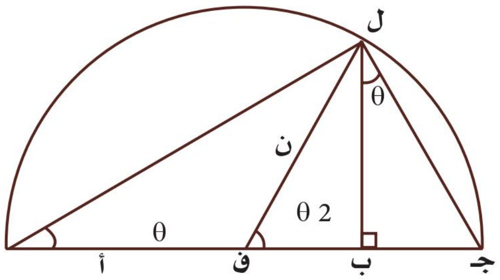
أ جا θ $\mp$ ب جتا θ = $\sqrt{\text{أ}^2 + \text{ب}^2}$ جا $(\theta\pm\alpha)$، حيث ظا α = $\frac{\text{ب}}{\text{أ}}$

هذا يساعدنا في إيجاد القيم العظمى والصغرى للمقدار

أ جتا θ $\pm$ ب جا θ، وأيضًا لحل المعادلات المثلثية المناظرة .

استقصاء الرياضيات

1- صيغة ضعف الزاوية:



شكل 2 - 6

لاحظ الشكل السابق :

للتسهيل، خذ حالة θ زاوية حادة.

(أ) نفرض أن ق∠ ل و جـ = 2 θ تحقق أن

(1) ق∠ ل أ جـ = θ   (2) ق∠ ب ل جـ = θ   (3) أ ل = 2 ن جتا θ

(4) ل جـ = 2 ن جا θ   (5) ل ب = ن جا 2 θ   (6) و ب = ن جتا 2 ب

(7) أ ب = ن (1 + جتا 2 θ)   (8) ب جـ = ن (1 - جتا 2 θ)

(ب) من المثلث أ ب ل، من تعريف:

(1) جا θ، استنتج أن جا 2 θ = 2 جا θ جتا θ

(2) جتا θ، استنتج أن جتا 2 θ = 2 جتا2 θ - 1

(3) ظا θ، استنتج أن ظا θ = $\frac{\text{جا } 2\theta}{1 + \text{جتا } 2\theta}$

بالمثل من المثلث ل ب جـ، من تعريف:

(1) جا θ، استنتج أن جتا 2 θ = 1 - 2 جا^2 θ

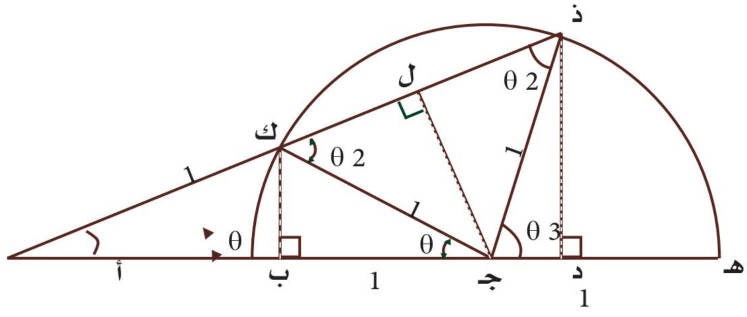
(2) جتا θ، استنتج أن جا 2 θ = 2 جا θ جتا θ

(3) ظا θ، استنتج أن ظا θ = $\frac{1 - \text{جتا } 2\theta}{\text{جا } 2\theta}$

من: ب ل^2 = أ ل^2 - أ ب^2 = ل جـ^2 - ب جـ^2

استنتج أن جتا 2 θ = جتا^2 θ - جا^2 θ

2-صيغة ثلاثة أمثال الزاوية :



شكل 2 - 7

ارسم خطًّا أفقيًّا أساسيًّا كون زاوية مقدارها θ عند أ . خذ أ ك يساوي وحدة طولية على الضلع العلوي، إذن ك و يساوي وحدة طولية مع و على المستقيم الأساسي، بأخذ و كمركز، ارسم نصف دائرة طولها وحدة طولية. الدائرة تقطع الضلع العلوي في النقطتين ك، ذ، اثبت أن ق (∠ ذ و هـ) = 3 θ حيث هـ نقطة تقاطع نصف الدائرة مع المستقيم الأساسي ارسم المستقيمات الأعمدة ك ب ، و ل ، ذ د وتحقق أن:

(أ) أب = جتا θ = و ب

(ب) ك ب = جا θ

(جـ) و ل = جا 2 θ

(د) ك ل = جتا 2 θ = ذ ل

(هـ) و د = جتا 3 θ

(و) ذ د = جا 3 ب

من المثلث أ د ذ، باستخدام أ د = أ ذ جتا θ، استنتج أن جتا 3 θ = 4 جتا^3 θ - 3 جتا θ.

أيضًا باستخدام د ذ = أ ذ جا θ، استنتج أن جا 3 θ = 3 جا θ - 4 جا^3 θ.