دولة ليبيا
وزارة التعليم
مركز المناهج التعليمية والبحوث التربوية

الرياضيات

للصف الأول من مرحلة التعليم الثانوي

الدرس السابع

المدرسة الليبية بفرنسا ـ تور

9-2 اللوغاريتمات Logarithms

نعلم أن $2^3 = 8$ إذن 3 الأس الذي يرفع للعدد 2 لنحصل على العدد 8.
طريقة أخرى لصياغة هذا هي : 3 هو العدد اللوغاريتمي لـ 8 للإساس 2. ونكتب 3 = لو$_2$ 8
(بعبارة أخرى اللوغاريتم هو الأس!)

لوغاريتم عدد ن للإساس أ يساوي القوة س التي يجب أن ترجع للإساس أ لتحصل على ن
(هنا نفرض: أ > 0، أ ≠ 1، ن > 0)

س = لو$_\text{أ}$ ن تسمى الصورة اللوغاريتمية ، أ$^\text{س}$ = ن هي الصورة الأسية

الصورة اللوغاريتمية — الأس = اللوغاريتم — الصورة الأسية

لو$_\text{أ}$ ن = س ⟷ ن = أ$^\text{س}$

مثال 1:

أوجد : (أ) **لو**$_3$ 81 (ب) **لو**$_2$ $\left(\frac{1}{4}\right)$ (جـ) **لو**$_{10}$ 5

الحل:

(أ) ∵ $3^4 = 81$ ∴ **لو**$_3$ 81 = 4 بالتعريف
(ب) ∵ $\frac{1}{4} = 2^{-2}$ ∴ **لو**$_2$$(\frac{1}{4})$ = -2
(جـ) استخدم الحاسبة في هذه الحالة
باستخدام 5 لو بالترتيب (أو لو 5 لبعض الحاسبات الحديثة)، فإننا نحصل على **لو**$_{10}$ 5 = 0.699

ملحوظة:
لوغاريتم عدد سالب غير معرف.

مثال 2:

إذا كان **لو**$_3$ ن = 4 ، فأوجد ن

الحل:

الصورة الأسية : ن = 3^4 = 81

ملحوظة:
1. **لو** في الحاسبة تعني **لو**$_{10}$ أو اللوغاريتم المعتاد .
2. **لو**$_{10}$ يمكن ان تكتب **لو**.
3. إذا كان الأساس يختلف عن 10 يجب أن نتذكر الأساس مثلا **لو**$_3$81 .

مثال 3:

إذا علم أن لو$_\text{س}$ 81 = 4 ، فأوجد قيمة س

الحل:

لو$_\text{س}$ 81 = 4 بالتحويل للصورة الأسية، س^4 = 81
⇐ س^4 = 3^4
⇐ س^4 = 3

القانون 1 :

نفرض $س = أ^{م}$ ، إذن $لو_{أ}\ س = م$

نفرض $ص = أ^{ن}$ ، إذن $لو_{أ}\ ص = ن$

بالضرب $س\ ص = أ^{م} \times أ^{ن}$

$\Leftarrow$ $س\ ص = أ^{م+ن}$

$\Leftarrow$ $لو_{أ}\ س\ ص = م + ن$ (تعريف اللوغاريتم)

$$\Leftarrow \quad لو_{أ}\ س\ ص = لو_{أ}\ س + لو_{أ}\ ص$$

القانون 2 :

من تعريف س ، ص سابقًا ، نقسم س على ص

نجد أن $\frac{س}{ص} = \frac{أ^{م}}{أ^{ن}}$

$\Leftarrow$ $\frac{س}{ص} = أ^{م-ن}$

$\Leftarrow$ $لو_{أ} \frac{س}{ص} = م - ن$ (من تعريف اللوغاريتمات)

$$\Leftarrow \quad لو_{أ} \frac{س}{ص} = لو_{أ}\ س - لو_{أ}\ ص$$

القانون 3 :

لدينا $س = أ^{م}$ برفع الطرفين بالقوة ك

$\Leftarrow$ $س^{ك} = (أ^{م})^{ك}$

$\Leftarrow$ $س^{ك} = أ^{مك}$

$\Leftarrow$ $لو_{أ}\ س^{ك} = م\ ك$ (من تعريف اللوغاريتمات)

$\Leftarrow$ $لو_{أ}\ س^{ك} = (لو_{أ}\ س) \times ك$

$$\Leftarrow \quad لو_{أ}\ س^{ك} = ك\ لو_{أ}\ س$$

بالمثل ، $لو_{أ} \sqrt[ك]{س} = لو_{أ}\ س^{\frac{1}{ك}}$

باستخدام النتيجة السابقة ، نجد أن :

$$لو_{أ}\ س^{\frac{1}{ك}} = \frac{1}{ك}\ لو_{أ}\ س$$

$$لو_{أ} \sqrt[ك]{س} = \frac{1}{ك}\ لو_{أ}\ س$$

بالإضافة للقوانين السابقة توجد نتائج مهمة ومفيدة للوغاريتمات

1) قيمة $لو_{أ}\ أ$

نفرض $لو_{أ}\ أ = س$

$\Leftarrow$ $أ^{س} = أ^{1}$ $\Leftarrow$ $س = 1$

إذن $لو_{أ}\ أ = 1$

المعادلات الأسية واللوغاريتمية : The Exponential Logarithmic Equation

- تسمى كل معادلة تتضمن مقدارا أسيا أو أكثر معادلة أسية.
- وتسمى كل معادلة تتضمن مقدارا لوغاريتميا أو أكثر معادلة لوغاريتمية.

مثال 9:

حل المعادلة الأتية : $5^{-2س} = 625$

الحل:

$5^{-2س} = 5^4$ (الأساس واحد)

$\therefore$ $-2س = 4$ وبالتالي $س = -2$

مثال 10:

حل المعادلة الأسية : $4^{س} - 17 \times 2^{س} + 16 = 0$

الحل:

لاحظ أن: $4^{س} = (2^2)^{س} = (2^{س})^2$

افرض أن $ص = 2^{س}$ فيكون:

$ص^2 - 17 ص + 16 = 0$

ومنه $(ص - 16)(ص - 1) = 0$

إما $ص - 16 = 0 \Leftarrow ص = 16$

$\therefore 2^{س} = 16 = 2^4 \therefore س = 4$

أو $ص - 1 = 0 \Leftarrow ص = 1$

$\therefore 2^{س} = 1 \Leftarrow 2^{س} = 2^0 \therefore س = 0$

$\therefore$ قيم س التي تحقق المعادلة هي : 4 ، 0

مثال 11:

حل المعادلة الأتية : $2^{س} = 7^{س}$

الحل:

$2^{س} = 7^{س}$ بالقسمة على $7^{س}$ في كل الطرفين نحصل على

$\left(\frac{2}{7}\right)^{س} = 1 \Leftarrow \left(\frac{2}{7}\right)^{س} = \left(\frac{2}{7}\right)^0$

$\therefore س = 0$

مثال 12:

حل المعادلة: **لو** س − **لو**(س - 2) = 2

الحل:

لو س − **لو**(س - 2) = 2

لو $\left(\frac{\text{س}}{\text{س} - 2}\right) = 2$

$\frac{\text{س}}{\text{س} - 2} = 10^{2}$

$\frac{\text{س}}{\text{س} - 2} = 100$

س = 100 س - 200

99 س = 200

س = $\frac{200}{99}$

مثال 13: حل المعادلة الآتية: $4^{5-3\text{ن}} = (2)^{7+\text{ن}}$

الحل:

لاحظ أنه يصعب حل هذه المعادلة باستعمال قوانين الأسس لتعذر توحيد الأساسات في الطرفين وعليه

بأخذ **لو** للطرفين:

(5-3ن) **لو**4 = (ن+7) **لو**2 ⇐ 2(5-3ن) **لو**2 = (ن+7)**لو**2

بالتبسيط نحصل على: ن = $\frac{3}{7}$

مثال 14: حل المعادلة الآتية: $2^{\text{س}} = 0.25$

الحل:

$2^{\text{س}} = \frac{1}{4}$ $\left(\frac{1}{4} = \frac{25}{100} = 0.25\right)$

$2^{\text{س}} = 2^{-2}$ ∴ س = -2 (بمساواة الأسين)

لاحظ الدوال الأسية التي على صورة $\text{ن}^{\text{س}}$=ب يمكن التعبير عن ب بدلالة قوة ن وإذا لم يكن في الإمكان التعبير عن ب كقوة لـ ن فإنه يمكن حل المعادلة الأسية بأخذ اللوغاريتم المعتاد للطرفين كما هو بالمثال التالي:

مثال 15: حل المعادلة الآتية: $3^{\text{س}} = 4$

الحل:

بأخذ اللوغاريتم المعتاد للطرفين

∴ س **لو**3 = **لو**4 ∴ س = $\frac{\text{لو}\,4}{\text{لو}\,3}$

س = $\frac{0206.0}{1774.0}$ = 1.26 (مقربًا لثلاثة أرقام معنوية)