دولة ليبيا
وزارة التعليم
مركز المناهج التعليمية والبحوث التربوية

الرياضيات

للسنة الثالثة من مرحلة التعليم الثانوي
القسم العلمي

الدرس السابع

المدرسة الليبية بفرنسا ـ تور

العام الدراسي
1441 / 1442 هـ - 2020 / 2021 م

5-3 المشتقات العليا للدالة Upper derivatives of the function :

إذا كانت الدالة: $ص = 2 س^3 + 5 س + 2$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = 6 س^2 + 5$

نفرض أننا نريد أن نفاضل الناتج إلى س مرة أخرى، كيف نكتب ذلك؟

في الطرف الأيمن لدينا $\frac{ءص}{ءس}$.

بمفاضلة هذا مرة أخرى يكون لدينا $\frac{ء}{ءس}\left(\frac{ءص}{ءس}\right)$ والذي يكتب بالصورة $\frac{ء^2ص}{ءس^2}$ أو $د^{//}(س)$ عندما نفاضل الطرف الأيسر مرة أخرى نجد أن: $\frac{ء}{ءس}\left(\frac{ءص}{ءس}\right) = (6 س^2 + 5) = 12س$

بوضع الطرفين معاً يكون لدينا $\frac{ء}{ءس}\left(\frac{ءص}{ءس}\right) = \frac{ء}{ءس}(6 س^2 + 5)$

أي أن: $\frac{ء^2ص}{ءس^2} = 12س$

هذه النتيجة تسمى المعامل التفاضلي الثاني أو المشتقة الثانية للدالة ، بالمثل وبالتفاضل مرة أخرى، يكون لدينا

$$\frac{ء}{ءس}\left(\frac{ء^2ص}{ءس^2}\right) = \frac{ء}{ءس}(12 س) \quad ، \quad \text{أي} \quad \frac{ء^3ص}{ءس^3} = 12$$

هذه هي المشتقة الثالثة للدالة المعطاة، هكذا يمكن أن نرى أن التفاضل التتابعي يعطى $\frac{ء}{ءس}$، $\frac{ء^2ص}{ءس^2}$ و $\frac{ء^3ص}{ءس^3}$ ...
(أو د ، $د^/$، $د^{//}$ ، ....) ومشتقات أعلى طالما كان ذلك ممكنا.

6-3 تفاضل حاصل الضرب :

نفرض ص = ز × ف حيث كل من ز ، ف دالة في س.

∴ ص = ز ف ⟵ (1)

نفرض أن : س تتزايد بكميات صغيرة Δس ، وأن الكميات الصغيرة من ص ، ف ، ز هي: Δ ص، Δ ف ، Δ ز على الترتيب.

ص + Δص = (ز + Δز) (ف + Δ ف) ⟵ (2)

اطرح (1) من (2) Δص = (ز + Δز) (ف + Δف) - ز ف

بالقسمة على Δس

$$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{(ز + \Delta ز)(ف + \Delta ف) - ز ف}{\Delta س}$$

$$= \frac{ز ف + ف \Delta ز + ز \Delta ف + \Delta ز \Delta ف - ز ف}{\Delta س}$$

$$= ف \frac{\Delta ز}{\Delta س} + ز \frac{\Delta ف}{\Delta س} + \frac{\Delta ز \Delta ف}{\Delta س}$$

عندما Δس ⟵ 0، فإن Δف ⟵ 0 ، Δ ز ⟵ 0،

بأخذ النهايات نجد أن.

$$\underset{\Delta س \to 0}{نهــا} \left(\frac{\Delta ص}{\Delta س}\right) = \frac{ءص}{ءس}$$

$$\underset{\Delta س \to 0}{نهــا} \left(\frac{\Delta ز}{\Delta س}\right) = \frac{ءز}{ءس}$$

$$\underset{\Delta س \to 0}{نهــا} \left(\frac{\Delta ف}{\Delta س}\right) = \frac{ءف}{ءس}$$

الحد الثالث $$\frac{\Delta ز \Delta ف}{\Delta س} = (\Delta ز) \frac{\Delta ف}{\Delta س} \text{ أو } \frac{\Delta ز}{\Delta س} (\Delta ف)$$

$$\underset{\Delta س \to 0}{نهــا} \left(\frac{\Delta ز . \Delta ف}{\Delta س}\right) = 0 \times \frac{\Delta ف}{\Delta س} \text{ أو } \frac{\Delta ز}{\Delta س} \times 0$$

في أي الحالتين النهاية تساوي صفرًا.

$$\frac{ءص}{ءس} = ف \frac{ءز}{ءس} + ز \frac{ءف}{ءس}$$

عمومًا: $\boxed{\frac{ء}{ءس}(ز ف) = ف \frac{ءز}{ءس} + ز \frac{ءف}{ءس}}$ حيث ف ، ز دوال في س.

مشتقة حاصل ضرب دالتين = الثانية × مشتقة الأولى + الأولى × مشتقة الثانية

تسمى هذه قاعدة حاصل الضرب في التفاضل.

مثال 19:

إذا كان $\text{ص} = \text{س}^3(\text{س} + 1)^4$ ، فأوجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$

الحـل:

نفرض $\text{ز} = \text{س}^3$ $\qquad$ $\text{ف} = (\text{س} + 1)^4$

$\therefore \frac{\text{ءز}}{\text{ءس}} = 3\text{س}^2$ $\qquad$ $\frac{\text{ءف}}{\text{ءس}} = 4(\text{س} + 1)^3$

$\text{ص} = \text{ز ف}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{ف} \frac{\text{ءز}}{\text{ءس}} + \text{ز} \frac{\text{ءف}}{\text{ءس}}$ (قاعدة حاصل الضرب)

بالتعويض عن ف $\frac{\text{ءز}}{\text{ءس}}$ ، ز ، $\frac{\text{ءف}}{\text{ءس}}$

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = (\text{س} + 1)^4 \times (3\text{س}^2) + (\text{س}^3) \times 4(\text{س} + 1)^3$$

$$= \text{س}^2(\text{س} + 1)^3 \left[3(\text{س} + 1) + 4\text{س}\right]$$

$$= \text{س}^2(\text{س} + 1)^3 (7\text{س} + 3)$$

$$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{س}^2(\text{س} + 1)^3 (7\text{س} + 3)$$

تذكر :

إذا كانت $\text{ص} = [\text{د}(\text{س})]^{\text{ن}}$ ، $\text{د}(\text{س})$ قابلة للتفاضل في مجال تعريفها:

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{ن} [\text{د}(\text{س})]^{\text{ن}-1} . \text{د}'(\text{س})$

بمعنى:

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = تفاضل القوس × تفاضل ما داخل القوس

مثال 20 :

فاضل $(5\text{س} + 3)(\text{س}^2 - 1)^3$ بالنسبة إلى س .

الحل:

باستخدام قاعدة حاصل الضرب، نجد أن:

$$\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}(5\text{س} + 3)(\text{س}^2 - 1)^3 = (\text{س}^2 - 1)^3 \frac{\text{ء}}{\text{ءس}}(5\text{س} + 3) + (5\text{س} + 3) \frac{\text{ء}}{\text{ءس}}(\text{س}^2 - 1)^3$$

$$= (\text{س}^2 - 1)^3 \times (5) + (5\text{س} + 3) \times 3(\text{س}^2 - 1)^2 (2\text{س})$$

$$= (\text{س}^2 - 1)^2 \left[5(\text{س}^2 - 1) + (5\text{س} + 3) \times 3 (2\text{س})\right]$$

$$= (\text{س}^2 - 1)^2 \left[5\text{س}^2 - 5 + 30\text{س}^2 + 18\text{س}\right]$$

$$= (\text{س}^2 - 1)^2 (35\text{س}^2 + 18\text{س} - 5)$$

$$= (\text{س}^2 - 1)^2 (7\text{س} + 5)(5\text{س} - 1)$$

$$\therefore \frac{\text{ء}}{\text{ءس}}(5\text{س} + 3)(\text{س}^2 - 1)^3 = (\text{س}^2 - 1)^2 (7\text{س} + 5)(5\text{س} - 1)$$

مثال 21:

إذا كان $\text{ص} = (\text{س}^2 + \text{س})(\text{س} + 2)^3$ ، فأوجد : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$

الحل:

$\therefore \text{ص} = (\text{س}^2 + \text{س})(\text{س} + 2)^3$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = (\text{س}^2 + \text{س}) \frac{\text{ء}}{\text{ءس}} (\text{س} + 2)^3 + (\text{س} + 2)^3 \frac{\text{ء}}{\text{ءس}} (\text{س}^2 + \text{س})$

$= (\text{س}^2 + \text{س}) \times 3(\text{س} + 2)^2 + (2\text{س} + 1) \times (\text{س} + 2)^3$

$= (\text{س} + 2)^2 [3(\text{س}^2 + \text{س}) + (2\text{س} + 1)(\text{س} + 2)]$

$= (\text{س} + 2)^2 [3\text{س}^2 + 3\text{س} + 2\text{س}^2 + 5\text{س} + 2]$

$= (\text{س} + 2)^2 (5\text{س}^2 + 8\text{س} + 2)$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = (\text{س} + 2)^2 (5\text{س}^2 + 8\text{س} + 2)$