دولة ليبيا
وزارة التعليم
مركز المناهج التعليمية والبحوث التربوية

الرياضيات

للصف الأول من مرحلة التعليم الثانوي

الدرس الثامن

المدرسة الليبية بفرنسا ـ تور

3

الباب الثالث

نظرية فيثاغورث وحساب المثلثات

Pythagoras Theorem and Trigonometry

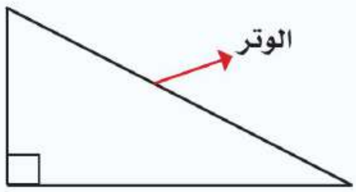
نظرية فيثاغورث وحساب المثلثات

Pythagoras Theorem and Trigonometry

وُلد عالم الرياضيات اليوناني الشهير فيثاغورث في عام 540 قبل الميلاد تقريباً ، ولقد اشتهر بنظريته المتعلقة بالمثلث قائم الزاوية من أن البابليين سبقوه في التوصل إلي تلك النظرية إلا أن فيثاغورث عُرِف بأنه أول من أثبتها. ولقد عَرف الصينيون تلك النظرية في نفس الوقت تقريباً.

وقبل دراسة النظرية سوف نلتفت إلي حقيقة مهمة حول المثلث القائم.

المثلث قائم الزاوية هو المثلث الذي إحدى زواياه تساوي 90^0 بمعنى أن فيه ضلعين متعامدين. وأطول ضلع في المثلث يقابل الزاوية القائمة ويسمى الوتر.



مثلث قائم الزاوية

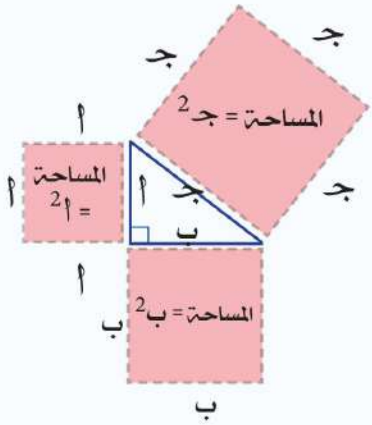
في نهاية هذا الفصل سوف تكون قادراً على:

- استخدم نظرية فيثاغورث في إيجاد طول أحد أضلاع المثلث القائم.
- استخدام نظرية فيثاغورث في حل المسائل.
- استخدام النسب المثلثية)جا ،جتا ،ظا (لإيجاد قياسات الزوايا المجهولة وأطوال الأضلاع المجهولة في المثلثل قائم الزاوية.
- حل مشكلات تتضمن المثلثلات قائمة الزاوية نابعة من حياتنا اليومية.
- حل مشكلات تتضمن زوايا الارتفاع والانخفاض.

1-3 نظرية فيثاغورث Pythagoras Theorem

تنص نظرية فيثاغورث على أنه:

في أي مثلث قائم الزاوية ، مساحة المربع المنشأ على الوتر تساوي مجموع مساحتي المربعين المنشأين على الضلعين الآخرين.



وهذا يعنى أن: ج^2 = أ^2 + ب^2 حيث،

ج طول الوتر ، أ و ب طولا الضلعين الآخرين.

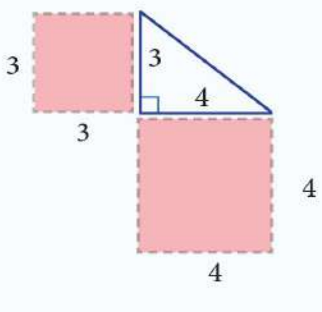
ملحوظة: يجب قياس أطوال الأضلاع أ ، ب ، ج بنفس وحدات الطول.

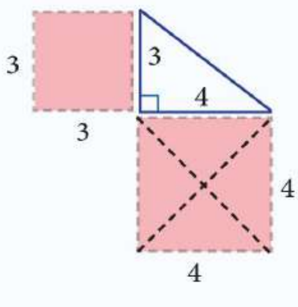
نشاط: للتحقق من نظرية فيثاغورث نفذ النشاط التالي:

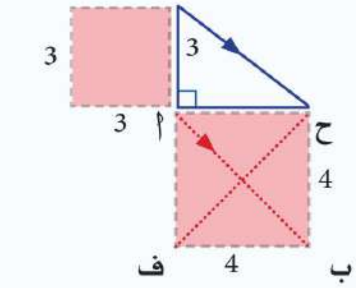
مثلث قائم الزاوية. فيه ضلعان متعامدان طولهما وليكن 3 وحدات ، 4 وحدات كما هو مرسوم.

ادخل على شبكة الانترنت لاستقصاء العلاقة بين اطوال أضلاع المثلث القائم.

ارسم مربعاً أمام كل ضلع من الضلعين المتعامدين.

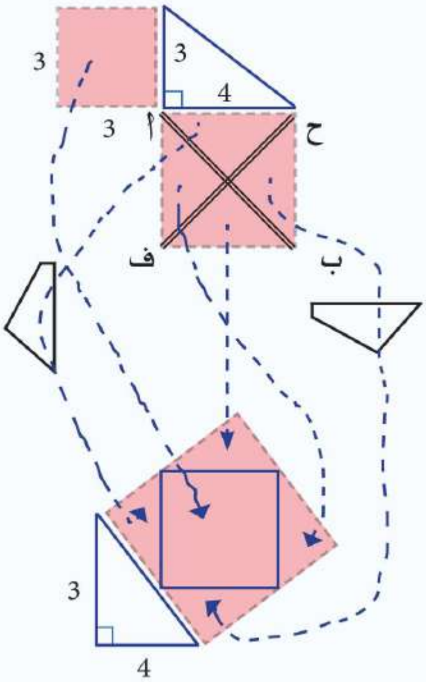






أ ب رُسم بحيث يوازي الوتر.
ح ف رُسم عمودياً على الوتر.
أ ب ،ح ف يتقاطعا في حـ .

ابحث على شبكة الانترنت لإيجاد طرق أخرى تثبت نظرية فيثاغورت.



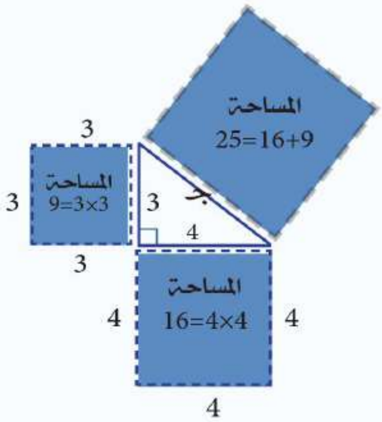
قُطع المربع الأكبر إلى أربع قطع بطول أ ب ،ح ف.
المربع الأصغر يلصق على بطاقة.

تُرتب القطع الخمس لتكون مربعاً أمام الوتر كما هو موضح بالشكل.

شكل (3-1)

يمكن بيان نفس النتيجة لأي مثلث قائم من أي مساحة. فضلاً عن ذلك تمكننا هذه النظرية من إيجاد طول الوتر في المثلث المعطى في الشكل . (3 -1). ليكن طول الوتر جـ . عليه تكون مساحة المربع المنشأ على الوتر = جـ × جـ = جـ^2
الآن مساحة المربع المنشأ على الوتر $9 + 16 = 25$ شكل (3-2)
أي أن: جـ^2 $= 25$
$\therefore$ جـ $= \sqrt{25} = 5$

ملحوظة: جـ×جـ $= 5\times5$
تحذف وحدات القياس في هذه الحالة



ولهذا فإن المثلث القائم الذي فيه ضلعي القائمة 3 ، 4 وحدات طول وتره يساوي 5 وحدات.

3-3 عكس نظرية فيثاغورث

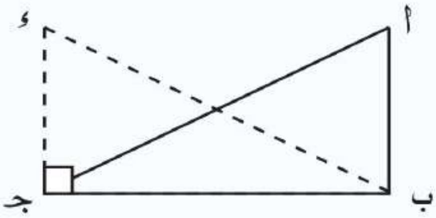
إذا كانت مساحة المربع المنشأ على احد أضلاع مثلث تساوي مجموع مساحتي المربعين المنشأئين على الضلعين الآخرين كانت الزاوية المكونة من هذين الضلعين قائمة.

المعطيات: أ ب جـ فيه اب + ب جـ أ = جـ

المطلوب: إثبات أن أ ب جـ = قائمة

العمل: نقيم على ب جـ العمود جـ د = ب أ

ثن نصل د ب



البرهان: ∵ د جـ ب قائم في جـ

∴ د ب = د جـ + ب جـ

∵ أ ب = د جـ (عملا)

∴ د ب = أ ب + ب جـ ----→ (1)

∵ أ ح = أ ب + ب جـ ------→ (2)

من(1) ، (2)

∴ أ جـ = د ب

Δ Δ أ ب جـ ، د جـ ب فيهما

أ ب = د جـ (عملاً)

ب جـ (مشترك)

أ جـ = د ب (إثباتاً)

طابق Δ Δ وينتج أن ∠ أ ب جـ = ∠ د جـ ب = قائمة.

ملحوظة:
للتحقق من Δ قائم الزاوية نوجد مربع الضلع الأكبر، ومجموع مربعي الضلعين الأخرين في حالة الناتجان متساويين فالمثلث قائم الزاوية.

مثال 9 :

بين أي المثلثات الآتية قائم الزاوية إذا كانت أطوال الاضلاعها هي:

(أ) 6 ، 8 ، 10 (ب) 5 ، 7 ، 9 (جـ) 24 ، 10 ، 26

الحل:

(أ) 6 ، 8 ، 10

$= 6^2 + 8^2 = 36 + 64$

$= 100$

$= (10)^2$

∴ Δ الذي أضلاعه 6 ، 8 ، 10 قائم الزاوية.

(ب) 5 ، 7 ، 9

$= 5^2 + 7^2 = 25 + 49$

$= 74$

$\neq (9)^2$

∴ Δ الذي أضلاعه 5 ، 7 ، 9 غير قائم الزاوية.

(جـ) 24 ، 10 ، 26

$= 24^2 + 10^2 = 576 + 100$

$= 676$

$= (26)^2$

∴ Δ الذي أضلاعه 24 ، 10 ، 26 قائم الزاوية.

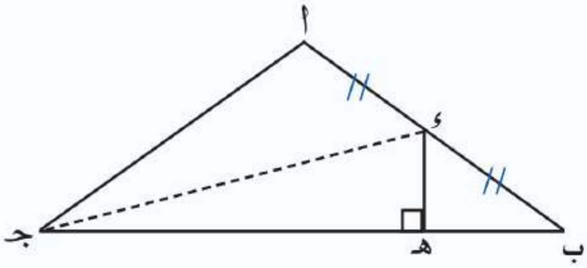
مثال 10 :

أ ب جـ مثلث، نصف أب في ء ، أُنزل ءهـ ⊥ ب جـ فإذا كان:

أجـ^2 = هـ جـ^2 - هـ ب^2 فإثبت أن ∠ أ قائمة

الحل:

المعطيات: أ ب جـ مثلث، ء منتصف أب ، ءهـ ⊥ ب جـ أب = هـ جـ - هـ ب



المطلوب: إثبات أن: ∠ أ = 90^0

أب = هـ جـ - هـ ب

= (جـء - ء هـ) - (ب ء - ء هـ)

= جـء - ء هـ - ب ء + ء هـ

= جـ ء - ب ء (أء = ء ب)

أ جـ = جـ ء - أ ء

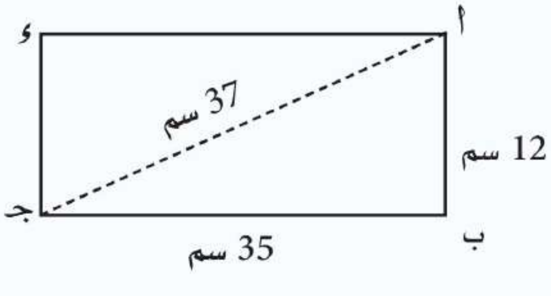
جـ ء = أ جـ + أ ء

∴ ∠ أ قائمة

مثال 11 :

أ ب جـ ء متوازي أضلاع فيه أ ب = 12 سم ، ب جـ = 35 سم ، أ جـ = 37 سم اثبت انه مستطيل.

الحل:



أب^2 + ب جـ^2 = $(12)^2 + (35)^2 = 1369$ سم^2

أجـ^2 = $(37)^2 = 1369$ سم^2

∠ أ ب جـ = 90^0 (عكس نظرية فيثاغورث)

أ ب // جـ ء ، أ ء // ب جـ

كل زاوية من زوايا الشكل أ ب جـ ء قائمة.

أ ب جـ ء مستطيل.

تمرين 3 جـ

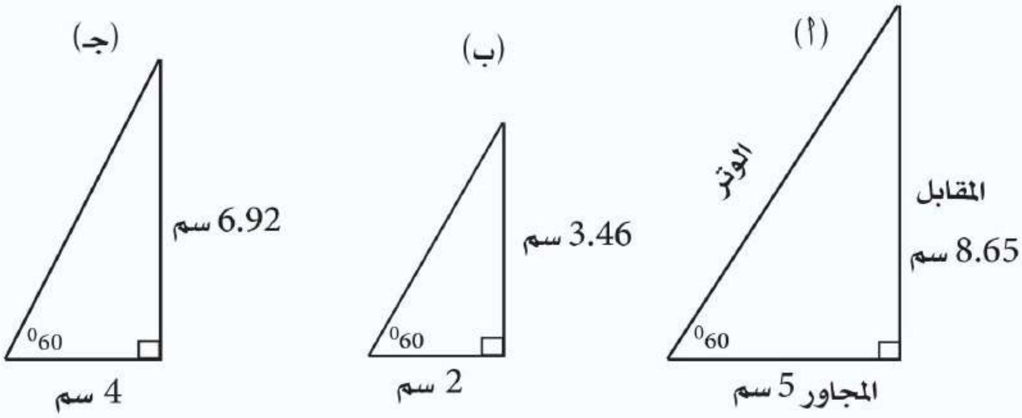
(1) بين أي △△△ الآتية قائم الزاوية إذا كانت أطوال أضلاعها:

(أ) 8 ، 15 ، 18 (ب) 16 ، 12 ، 20 (جـ) 5 ، 4 ، 3

(2) أ ب جـ مثلث انزل أهـ عموداً على ب جـ وكان أ جـ = 15 سم ، أهـ = 12 سم

أب^2 = 160 سم^2 ثم نصف أهـ في ء فأثبت أن: ∠ ب ء جـ قائمة. (يترك للطالب)

3-5 نسبة الظل (التماس) ظا Tangent Ratio



شكل 3-4

هذه المثلثات الثلاثة ليست مرسومة بمقاييس نسبية إلا أنها متشابهة. والمثلثات الثلاثة لها زوايا 90^0 ، 60^0 ، 30^0 وكما رأينا في الجزء (3-2) الضلع المقابل للزاوية القائمة يسمى الوتر. والضلع الثاني للزاوية 60^0. يسمى المجاور للزاوية 60 ، أما الضلع الضلع الثالث فيسمى المقابل للزاوية 60^0.

ملحوظة:
هذه النسبة الثابتة دائماً تساوي ظا.

بالنسبة للزاوية 60^0 لاحظ أنه من

شكل (3-4) (أ) = $\frac{\text{الضلع المقابل}}{\text{الضلع المجاور}} = \frac{8.65}{5} = 1.73$

شكل (3-4) (ب) = $\frac{\text{الضلع المقابل}}{\text{الضلع المجاور}} = \frac{3.46}{2} = 1.73$

شكل (3-4) (حـ) = $\frac{\text{الضلع المقابل}}{\text{الضلع المجاور}} = \frac{6.92}{4} = 1.73$

أي أن: $\frac{\text{طول الضلع المقابل للزاوية } 60^0}{\text{طول الضلع المجاور للزاوية } 60^0} = 1.73$

ينطبق ذلك على أي مثلث به الزاويا 90^0 ، 60^0 ، 30^0 ، تسمى هذه النسبة الثابتة ظل الزاوية 60^0

ظل الزاوية = $\frac{\text{طول الضلع المقابل للزاوية}}{\text{طول الضلع المجاور للزاوية}}$

وتختصر ظا أ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$

وتكتب ظا 60^0 = 1.73 (لأقرب ثلاثة أرقام معنوية.)

سوف تجد مفتاحاً على آلتك الحاسبة عنوانه tan أي ظا.

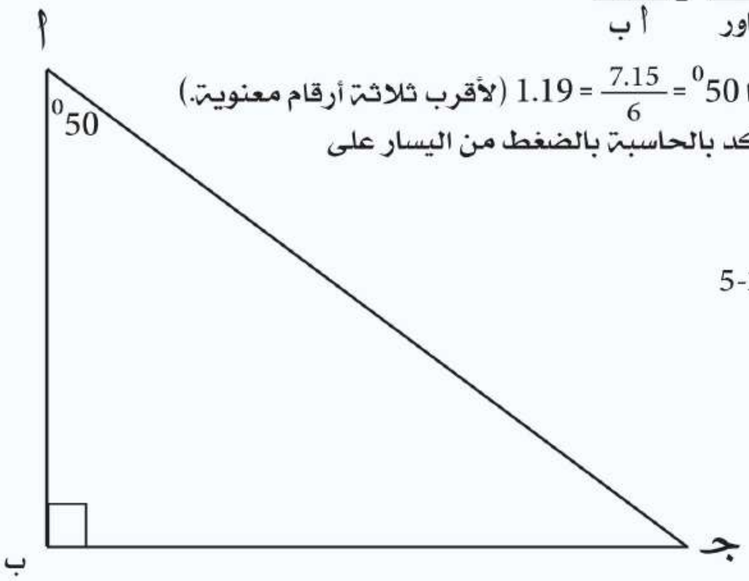
اضغط من اليسار $\boxed{0}\ \boxed{6}\ \boxed{\tan}$ وستجد الناتج على الشاشة 1.73205

يمكننا إيجاد النسبة (ظا) لأي زاوية معطاة بالدرجات بتغيير أولاً نظام الحاسبة إلى DEG.

المثلث في الشكل (2-5) له زاوية 50^0 وبواسطة القياس نجد أن أ ب = 6 سم ، ب جـ = 7.15 سم.

ظا أ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$ = $\frac{\text{ب جـ}}{\text{أ ب}}$

بمعنى أن ظا 50^0 = $\frac{7.15}{6}$ = 1.19 (لأقرب ثلاثة أرقام معنوية.)
ويمكن التأكد بالحاسبة بالضغط من اليسار على



شكل 2-5

مثال 13 :

(أ) ارسم المثلث أ ب جـ الذي فيه أ ب = 7 سم، أ = 35^0 ، ب = 90^0

(ب) أوجد بالقياس بدقة طول الضلع ب حـ .

(جـ) أوجد ظا 35^0 لأقرب ثلاثة أرقام معنوية عن طريق قسمة $\frac{\text{ب جـ}}{\text{أ ب}}$

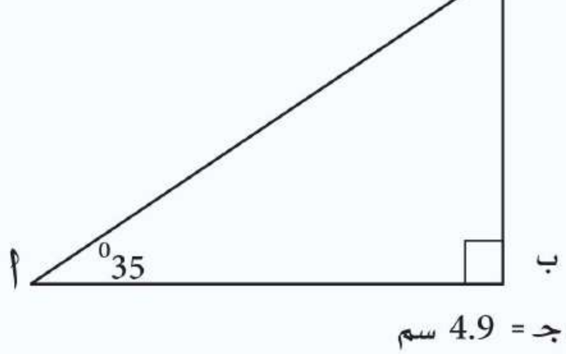
(د) راجع إجابتك مستخدماً الحاسبة.

ملحوظة:

(تنطبق هذه الملحوظة على الفصل كله).
عندما نستخدم الآلة الحاسبة المحصول على النسب المثلثية جا ، جتا ، ظا، فإن خطوات الضغط على المفاتيح تعتمد على نوع الآلة . يمكن الضغط على المفتاح EXE بدلا من = ف بعض الآلات الحاسبة.

الحل:

(أ) ارسم المثلث أ ب جـ الذي فيه أ ب = 7 سم، ب = 90^0 ، ∡ أ = 35^0



(ب) بالقياس نجد أن: ب جـ = 4.9 سم

(جـ) $\frac{\text{ب جـ}}{\text{أ ب}}$ = $\frac{4.9}{7}$ = 0.700 (لأقرب ثلاثة أرقام معنوية)

(د) اضغط من اليسار = $\boxed{5}$ $\boxed{3}$ $\boxed{\text{tan}}$

هذا يعطى 0.700 (لأقرب ثلاثة أرقام معنوية).

مثال 14 :

استخدم الآلة الحاسبة لإيجاد ظا 70^0 لأقرب ثلاثة أرقام معنوية.

الحل:

لإيجاد قيمة ظا 70^0 اضغط المفاتيح على آلتك الحاسبة كما يلي:

المفتاح	الناتج
tan	tan 0
7	tan 7
0	tan 70
=	2.7474774

ظا 70^0 = 2.75 (لأقرب ثلاثة أرقام معنوية).

ملحوظة:
ابدا بضبط الحاسبة في نظام DEGأولا.

يمكنك الضغط على EXE بدلاُ من = في بعض الآلات الحاسبة.

مثال 15 :

استخدم الآلة الحاسبة لإيجاد الزاوية س لأقرب رقم عشري واحد إذا كان ظا س = 0.36

الحل :

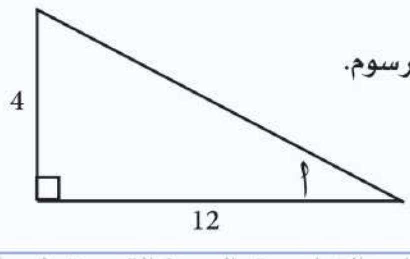
لإيجاد قيمة س اضغط المفاتيح على الآلة الحاسبة بالترتيب التالي :

مفتاح	الناتج
2nd F	0
	$\tan^{-1} 0$
0	$\tan^{-1} 0$
.	$\tan^{-1} 0$
3	$\tan^{-1} 0.3$
6	$\tan^{-1} 0.36$
=	19.798876

س = 19.8^0 (لأقرب رقم عشري واحد)

ملحوظة:
2ndF INV SHIFT
تؤدي نفس الوظيفة
اضغط 2ndF tan
لإيجاد الزاوية من خلال نسبة الظل ودائما تُقرب الزاويا لأقرب رقم عشري واحد.

مثال 16 : أوجد قيمة ∠ أ في الشكل المرسوم.



الحل:

ظا أ = $\frac{4}{12}$ = $\frac{1}{3}$

أ = 18.4^0 (لأقرب رقم عشري واحد)

ملحوظة:
2ndF Tan (4 ÷ 1 2) =

1-5-3 تغير الظل عندما تزداد الزاوية من 0^0 إلي 90^0 نفرض محورين متعامدين و س ، و ص ثم نركز في و ، نرسم ربع دائرة نصف قطرها أ يساوي الوحدة ونفرض مستقيماً و ن طوله الوحدة أيضاً بدأ يدور في الأتجاه الموجب من الوضع الأساسي و س إلي الوضع النهائي و ص.

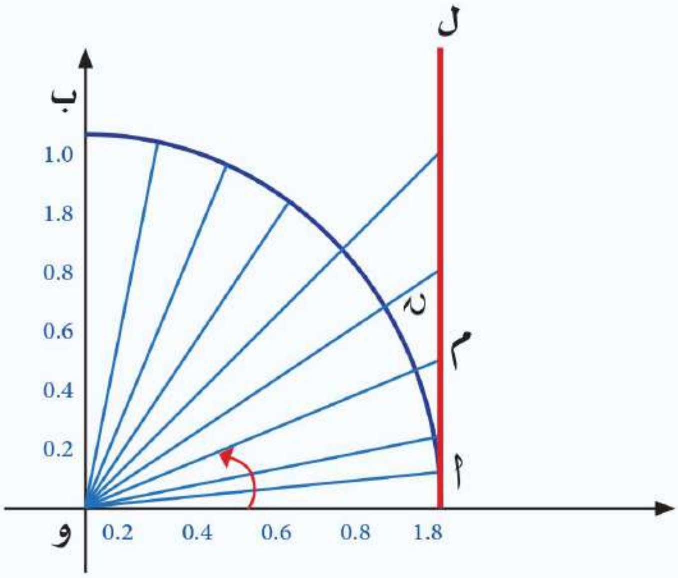
فإذا فرضنا أن و ن أحد أوضاع المستقيم الدائري رسمنا بذلك الزاوية أ و ن = جـ

رسمنا من نقطة ا مماساً للدائرة ليلاقي امتداد و ن في م

∵ المماس العمودي على نصف القطر و أ

$$\therefore \text{ظا جـ} = \frac{\text{أم}}{\text{و أ}} = \frac{\text{أم}}{1} = \text{أ م}$$

وعلى ذلك فإن طول الجزء المقطوع من المماس المرسوم من أ بالمستقيم الدائري يدل على قيمة ظا جـ.



ومن الشكل نلاحظ ما يأتي:

(1) إذا كانت جـ = 0^0 كان مستقيم الدائرة و ن منطبقاً على و أ وكان أ م = 0.

$$\text{ظا } 0^0 = 0$$

(2) إذا كانت حـ = 45^0 كان المثلث و أ ل قائم الزاوية ومتساوي الساقين وكان ظا جـ = أ ل = و أ ل = 1

$$\text{ظا } 45^0 = 1$$

(3) إذا زادت حـ على 45^0 زاد الظل عن الواحد الصحيح.

(4) كلما اقتربنا حـ من 90^0 زاد الظل زيادة كبيرة.

(5) إذا كانت جـ = 90^0 انطبق مستقيم الدائرة و ن على و ص وأصبح موازياً للمماس المرسوم من أ ويصبح الجزء المقطوع من المماس كبيراً لا نهائياً ويكون ظا 90^0 يساوي ما لا نهاية.