دولة ليبيا
وزارة التعليم
مركز المناهج التعليمية والبحوث التربوية

الرياضيات

للسنة الثالثة من مرحلة التعليم الثانوي
القسم العلمي

الدرس الثامن

المدرسة الليبية بفرنسا ـ تور

العام الدراسي

1441 / 1442 هـ - 2020 / 2021 م

3-7 تفاضل خارج القسمة

مقدار مثل $\frac{3س^2 + 2س - 1}{5س - 6}$ هو خارج قسمة. إذا كانت القسمة سهلة وممكنة، يمكن إيجاد المشتقة بعد القسمة.
وإذا كان من غير الممكن أن نقسم بسهولة، توجد طريقة أخرى لإيجاد مشتقة خارج القسمة كما هو موضح فيما يلي:

نفرض $ص = \frac{ز}{ف}$ .... (1)

حيث ز، ف دالتان في س

نفرض س تزيد بمقدار Δ س، ولنفرض أن الكميات الصغيرة المناظرة من ص ، ز ، ف هي : Δ ص ، Δ ز ، Δ ف على الترتيب.

$\therefore$ $ص + \Delta ص = \frac{ز + \Delta ز}{ف + \Delta ف}$ .... (2)

بطرح (1) من (2) تعطي $\Delta ص = \frac{ز + \Delta ز}{ف + \Delta ف} - \frac{ز}{ف}$

$\Leftarrow$ $\Delta ص = \frac{ز ف + ف \Delta ز - ز ف - ز \Delta ف}{ف\,(ف + \Delta ف)}$

$\Leftarrow$ $\Delta ص = \frac{ف \Delta ز - ز \Delta ف}{ف(ف + \Delta ف)}$ بالقسمة على Δس،

$$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ف \Delta ز - ز \Delta ف}{ف(ف + \Delta ف)\,\Delta س}$$

$$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{\frac{ف \Delta ز}{\Delta س} - \frac{ز \Delta ف}{\Delta س}}{ف\,(\Delta ف + ف)}$$

عندما Δس $\longrightarrow$ 0 ، فإن Δ ز $\longrightarrow$ 0 ، Δ ف $\longrightarrow$ 0،

$$\underset{\Delta س \leftarrow 0}{نهـــا} \left(\frac{\Delta ص}{\Delta س}\right) = \frac{ءص}{ءس}$$

$$\underset{\Delta س \leftarrow 0}{نهـــا} \left(\frac{\Delta ز}{\Delta س}\right) = \frac{ءز}{ءس}$$

$$\underset{\Delta س \leftarrow 0}{نهـــا} \left(\frac{\Delta ف}{\Delta س}\right) = \frac{ءف}{ءس}$$

$$\frac{ءص}{ءس} = \frac{ف \frac{ءز}{ءس} - ز \frac{ءف}{ءس}}{ف^2}$$

قاعدة خارج القسمة في التفاضل هي:

$$\frac{ء}{ءس}\left(\frac{ز}{ف}\right) = \frac{ف \frac{ءز}{ءس} - ز \frac{ءف}{ءس}}{ف^2}$$

مشتقة خارج قسمة دالتين = $\frac{\text{المقام × مشتقة البسط − البسط × مشتقة المقام}}{\text{مربع المقام}}$

مثال 22:

إذاكان ص = $\frac{\text{س} + 1}{2\text{س} - 1}$ ، فأوجد $\frac{d\text{ص}}{d\text{س}}$

الحل:

نفرض: ز = س + 1، ف = 2س - 1، ص = $\frac{\text{ز}}{\text{ف}}$

ثم باستخدام قاعدة خارج القسمة

$$\frac{d\text{ص}}{d\text{س}} = \frac{(2\text{س} - 1)\frac{d}{d\text{س}}(\text{س} + 1) - (\text{س} + 1)\frac{d}{d\text{س}}(2\text{س} - 1)}{(2\text{س} - 1)^2}$$

$$= \frac{(2\text{س} - 1)(1) - (\text{س} + 1)(2)}{(2\text{س} - 1)^2}$$

$$= \frac{2\text{س} - 1 - 2\text{س} - 2}{(2\text{س} - 1)^2} = \frac{-3}{(2\text{س} - 1)^2}$$

مثال 23:

فاضل $\frac{(3 - \text{س})^2}{\text{س}^2 + 1}$، بالنسبة إلى س.

الحـل:

باستخدام قاعدة خارج القسمة،

$$\frac{d}{d\text{س}}\left[\frac{(3 - \text{س})^2}{\text{س}^2 + 1}\right] = \frac{(\text{س}^2 + 1)\frac{d}{d\text{س}}(3 - \text{س})^2 - (3 - \text{س})^2\frac{d}{d\text{س}}(\text{س}^2 + 1)}{(\text{س}^2 + 1)^2}$$

$$= \frac{(\text{س}^2 + 1)(2)(3 - \text{س})(-1) - (3 - \text{س})^2(2\text{س})}{(\text{س}^2 + 1)^2}$$

$$= \frac{2(3 - \text{س})[-1 - \text{س}^2 - \text{س}(3 - \text{س})]}{(\text{س}^2 + 1)^2}$$

$$= \frac{2(3 - \text{س})(-1 - 3\text{س})}{(\text{س}^2 + 1)^2}$$

$$= \frac{2(\text{س} - 3)(1 + 3\text{س})}{(\text{س}^2 + 1)^2}$$

ملحوظة
لكي تفاضل $\frac{4\text{س}^3 + 6\text{س}^2}{2\text{س}}$،
اقسم على 2س. س $\neq 0$

لذلك $\frac{4\text{س}^3 + 6\text{س}^2}{2\text{س}} = 2\text{س}^2 + 3\text{س}$ ثم فاضل مباشرة لتحصل على 4س + 3.

إذن، لا توجد حاجة إلى استخدام قاعدة خارج القسمة في هذه الحالة، الإختصار أولًا أفضل لإيجاد الدالة المشتقة.

8-3 تفاضل الدوال الضمنية

منذ فترة عندما استخدمنا التفاضل، كان لدينا مقدار في متغير واحد، فمثلًا، مقدار جبري أو معادلة يحوي س، ص ويمكن منها الحصول على ص مباشرة بدلالة س، مثل

$ص^2 - س^2 = 1$ ومنها ص $= \pm \left(\sqrt{1 + س^2}\right)$

في مثل هذه الحالات نقول إنه يمكن التعبير عن ص صراحة بدلالة المتغير س.

على كل حال، إذا كان لدينا مثلًا،

$س^2 + ص^2 - 2\,س\,ص + س - 7\,ص + 1 = 0$

فليس من السهل أن نحصل على ص مباشرة بدلالة س. في هذه الحالة يقال إن ص مقدار ضمني في س.

لكي توجد المعامل التفاضلي $\frac{دص}{دس}$ ، في هذه الحالة ، نفرض حدًا أو جزءًا من حد في ص كدالة دالة أي دالة في ص التي هي دالة في س. حينئذٍ استخدم قاعدة دالة الدالة في التفاضل، كما هو موضح في الجدول والأمثلة الآتية:

الدالة	تفاضلها
ص	$1 \times \frac{دص}{دس}$
$ص^2$	$2ص \frac{دص}{دس}$
$ص^3$	$3ص^2 \frac{دص}{دس}$
$\vdots$	$\vdots$
$ص^ن$	$ن ص^{ن-1} \times \frac{دص}{دس}$

مثال 24:

أوجد $\frac{دص}{دس}$ إذا علم أن: $ص^2 - 2\,س^2 = 1$

الحل:

$\because ص^2 - 2\,س^2 = 1$

نفاضل كل حد بالنسبة إلى س.

$\frac{د}{دس}(ص^2) - 4س = 0$

$\because \frac{د}{دس}(ص^2) = 2ص \frac{دص}{دس}$ (باستخدام قاعدة دالة الدالة)

$\Leftarrow 2ص \frac{دص}{دس} - 4س = 0$

$\Leftarrow 2ص \frac{دص}{دس} = 4س$

$\Leftarrow \frac{دص}{دس} = \frac{4س}{2ص} = \frac{2س}{ص}$

الطريقة السابقة للتفاضل تعرف بالتفاضل الضمني. الأمثلة الآتية توضح أكثر هذه الطريقة.

مثال 25:

أوجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ ، إذا كان $2\,\text{س}^2 - 3\,\text{ص} = \text{ص}^2$.

الحـل:

في هذه الحالة، من الأسهل استخدام الطريقة السابقة، أي التفاضل الضمني رغم أن $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ يمكن الحصول عيها بالتفاضل بعد التعبير عن ص مباشرة بدلالة س.

$\because\ 2\,\text{س}^2 - 3\,\text{ص} = \text{ص}^2$

بالتفاضل الضمني بالنسبة إلى س

$$\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}(2\,\text{س}^2) - \frac{\text{ء}}{\text{ءس}}(3\,\text{ص}) = \frac{\text{ء}}{\text{ءس}}(\text{ص}^2)$$

$$4\text{س} - 3\,\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = 2\text{ص}\,\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$$

$$\Leftarrow\quad 4\text{س} = (3 + 2\text{ص})\,\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$$

$$\Leftarrow\quad \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{4\text{س}}{3 + 2\text{ص}}$$

مثال 26:

أوجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ إذا كان $2\,\text{س}\,\text{ص} - \text{ص}^3 = \text{س}^2$

الحـل:

$\because\ 2\,\text{س}\,\text{ص} - \text{ص}^3 = \text{س}^2$

نفاضل ضمنيًا بالنسبة إلى س.

$$\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}(2\,\text{س}\,\text{ص}) - \frac{\text{ء}}{\text{ءس}}(\text{ص}^3) = \frac{\text{ء}}{\text{ءس}}(\text{س}^2) \quad ....\ (1)$$

بتفاضل حاصل الضرب 2س ص

$$\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}(2\,\text{س}\,\text{ص}) = \text{ص}\,\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}(2\,\text{س}) + (2\,\text{س})\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = 2\text{ص} + 2\text{س}\,\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} \quad ....\ (2)$$

من (1)، (2)

$$2\text{ص} + 2\text{س}\,\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} - 3\text{ص}^2\,\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = 2\,\text{س}$$

$$(2\text{س} - 3\text{ص}^2)\,\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = 2\,\text{س} - 2\,\text{ص}$$

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{2(\text{س} - \text{ص})}{2\text{س} - 3\text{ص}^2}$$