دولة ليبيا
وزارة التعليم
مركز المناهج التعليمية والبحوث التربوية

أسس الإحصاء

للسّنة الثّالِثة بمرحلة التّعليم الثانوي

(القسم العلمي)

الدرس الثامن

المدرسة الليبية بفرنسا ـ تور

العام الدراسي

1441 / 1442 هـ - 2020 / 2021 م

الفصل الثالث
توزيعات احتمالية هامّة

(3-1) توزيعات احتمالية متقطعة هامة:

لقد درسنا التوزيعات الاحتمالية بصفة عامة، وعرفنا كيفية تحديد صفاتها وذلك باستخدام مقاييس للنزعة المركزية ومقاييس للتشتت. وفي هذا البند سنتعرض لدراسة توزيعين احتماليين من النوع المتقطع، نظراً لأهميتها، والتي تأتي من تطبيقهما بشكل واسع في الدراسات الإحصائية، وهما توزيع ذات الحدين وتوزيع بواسون.

(3-1-1) توزيع ذات الحدين:

إذا كررنا تجربة n من المرات المستقلة حيث يطلق على كل مرة محاولة وكان احتمال النجاح ثابت في جميع المحاولات، فهذه التجربة يطلق عليها تجربة ذات الحدين، أي أن أية تجربة عشوائية تتوفر فيها الشروط التالية تسمى تجربة ذات الحدين:

1) تجربة عشوائية تتكون من n من المحاولات المتماثلة.

2) كل محاولة تصنف نتيجتها إلى نجاح أو فشل، حيث المقصود بالنجاح هو ظهور نتيجة مرغوب فيها، والمقصود بالفشل هو ظهور نتيجة غير مرغوب فيها.

3) جميع المحاولات مستقلة عن بعضها البعض.

4) احتمال النجاح، أي احتمال ظهور النتيجة المرغوب فيها، ثابت من محاولة إلى أخرى.

والمتغير العشوائي X الذي يمثل عدد المحاولات الناجحة يسمى متغير ذات الحدين وتوزيعه الاحتمالي يطلق عليه توزيع ذات الحدين. والقيم التي يمكن أن يأخذها المتغير العشوائي X هي:

0,1,2,3,....................,n

فعندما يأخذ المتغير X القيمة **0** يعني ذلك أن عدد المحاولات الناجحة يساوي صفر، أي أن كل المحاولات فاشلة، وعندما تكون قيمة المتغير X تساوي 1، يعني ذلك أن محاولة واحدة فقط كانت ناجحة، وهكذا ... وإذا كانت قيمة المتغير X تساوي n يعني ذلك أن كل المحاولات كانت ناجحة.

وبما أن القيم التي يمكن أن يأخذها هذا المتغير العشوائي هي قيم منفصلة وقابلة للعدّ، فعددها يساوي **(n+1)** قيمة، إذن متغير ذات الحدين هو متغير متقطع. وبالتالي توزيعه الاحتمالي هو توزيع احتمالي متقطع، ودالة كتلة الاحتمال لتوزيع ذات الحدين كما يلي:

دالة كتلة الاحتمال لتوزيع ذات الحدين تأخذ الصيغة التالية:

$$f(x;n,p) = c_x^n p^x q^{n-x} \qquad x = 0, 1, 2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots n$$

n, **P** هما المعلمتان اللتان يعتمد عليهما توزيع ذات الحدين. حيث:

n: عدد المحاولات الكلية .

P: احتمال النجاح في المحاولة الواحدة.

q: احتمال الفشل في المحاولة الواحدة، q = (1-p).

x : عدد المحاولات الناجحة.

الوسط الحسابي والتباين لتوزيع ذات الحدين:

إذا كان المتغير العشوائي X يتبع توزيع ذات الحدين، فإن:

الوسط الحسابي: $\mu = np$

التبايـــــــن: σ^2=n p q = n p(1-p)

مثال)3-1(:

إذا كان المتغير العشوائي X يتبع توزيع ذات الحدين بمعلمتين:

P=1/3،   n =5

أ) أحسب احتمال أن يساوي المتغير القيمــــة 1 .

ب) أحسب الوسط الحسابي والتباين لهذا التوزيع.

الحل:

أ. بما أن المتغير يتبع توزيع ذات الحدين، إذن:

$$f(x;n,p) = C_x^n P^x q^{n-x} \quad x = 0, 1, 2 \ldots \ldots \ldots \ldots n$$

وبما أن n =5 ،P=1/3 ، إذن في هذه الحالة دالة كتلة الاحتمال كما يلي:

$$f(x;5,1/3) = C_x^5 (\frac{1}{3})^x (\frac{2}{3})^{5-x} \qquad x = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

وبالتعويض في صيغة دالة كتلة الاحتمال بالقيمة $x = 1$ نحصل على الاحتمال المطلوب وذلك كما يلي:

$$P(X = 1) = f(1) = C_1^5 \ (\frac{1}{3})^1 (\frac{2}{3})^4 = 80/243 = 0.3292$$

ب. الوسط الحسابي: $\mu = np = (5)(^1/_3) = 5/3 = 1\frac{2}{3}$

التباين: $\sigma^2 =$ npq = (5)(1/3)(2/3) = $\frac{10}{9}$ = 1 $\frac{1}{9}$

مثال)3-2(:

أشترك 7 طلبة في امتحان في مادة الرياضيات، فإذا كان احتمال النجاح في هذا الامتحان 0.60، أحسب:

أ) احتمال أن ينجح 4 طلبـــة.

ب) احتمال أن ينجح كل الطلبة.

الحل:

في هذا المثال نلاحظ أن التجربة العشوائية المذكورة تتوفر فيها شروط توزيع ذات الحدين حيث ان عدد المحاولات الكلية = العدد الكلي للطلبة المشتركين في الامتحان، أي أن : **n = 7**

واحتمال النجاح **P = 0.60**

بما أن دالة كتلة الاحتمال لتوزيع ذات الحدين في هذا المثال كما يلي:

$$\boldsymbol{f(x;7,0.6)=C_x^7(0.6)^x(0.4)^{7-x} \qquad x=0,1,2,\dots\dots\dots..7}$$

أ) نحصل على احتمال أن ينجح 4 طلبة بالتعويض في صيغة دالة كتلة الاحتمال بالقيمة، وذلك كما يلي:

$$\boldsymbol{P(X=4)=f(4)=C_4^7(0.6)^4(1-0.6)^{7-4}}$$

$$=\frac{7!}{4!(7-4)!}\ \boldsymbol{(0.6\,)^4\ (0.4)^3\ =0.2903}$$

ب) نحصل على احتمال ان ينجح كل الطلبة بالتعويض في صيغة دالة كتلة الاحتمال بالقيمة $\boldsymbol{x=7}$ ، وذلك كما يلي:

$$\boldsymbol{P(x=7)=f(7)=C_7^7\,(0.6)^7(1-0.6)^{7-7}}$$

$$=\frac{7!}{7!(7-7)!}\ \boldsymbol{(0.6)^7\ (0.4)^0\ =(0.6)^7\ =0.028}$$

مثال (3-3):

إذا كان 0.10 من الإنتاج الكلي في مصنع معين إنتاجا تالفاً، فإذا سحبنا عشوائيـاً من هذا الإنتاج 6 وحدات، فما احتمال أن يكون عدد الوحدات التالفة أقل من3 وحدات؟

الحل:

بفرض أن المتغير العشوائي X يمثل عدد الوحدات التالفة، فسيكون X متغير عشوائي يتبع توزيع ذات الحدين بالمعلمتين n=6 ، P=0.10 ، والاحتمال المطلوب: $P(X<3)$ حيث:

$$P(X < 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$$

وبالتعويض في دالة كتلة الاحتمال لتوزيع ذات الحدين، نحصل على الاحتمالات التالية:

$$P(X = 0) = f(0) = C_0^6(0.10)^0(1 - 0.10)^{6-0}$$
$$= \frac{6!}{0!\,(6-0)!}(1)(0.90)^6 = 0.5314$$

$$P(X = 1) = f(1) = C_1^6(0.10)^1(1 - 0.10)^{6-1}$$
$$= \frac{6!}{1!\,(6-1)!}(1.10)(0.90)^5 = 0.3542$$

$$P(X = 2) = f(2) = C_2^6(0.10)^2(1 - 0.10)^{6-2}$$
$$= \frac{6!}{2!\,(6-2)!}(1.10)^2(0.90)^4 = 0.0984$$

إذن الاحتمال المطلوب هو:

$$P(X < 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$$
$$= 0.5314 + 0.3542 + 0.0984 = 0.9840$$

مثال (3-4):

إذا ألقينا مكعب نرد **4** مرات، فما احتمال ظهور العدد **3** مرتين أو أكثر؟

الحل:

هنا تعتبر الرمية أي المحاولة ناجحة إذا ظهر العدد **3**، فاحتمال الحصول على العدد **3** مرتين أو أكثر المقصود به أن يكون عدد المحاولات الناجحة **2** أو أكثر، أي يكون المتغير العشوائي X الذي يمثل عدد المحاولات الناجحة يساوي **2** أو أكثر، بما أن هذا المتغير يتبع توزيع ذات الحدين بمعلمتين:

n=4 (عدد المحاولات الكلية).

P=1/6 (احتمال النجاح = احتمال ظهور العدد 3 في محاولة واحدة).

إذن دالة الاحتمال لهذا المتغير العشوائي X:

$$f(x;4,1/6)=C_x^4\left(\frac{1}{6}\right)^x\left(\frac{5}{6}\right)^{4-x} \qquad x=0,1,2,3,4$$

والاحتمال المطلوب يحسب كما يلـــــي:

$$P(X\geq 2)=f(2)+f(3)+f(4)$$

حيث:

$$P(X=2)=f(2)=C_2^4\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^2=0.1157$$

$$P(X=3)=f(3)=C_3^4\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)=0.0154$$

$$P(X=4)=f(4)=C_4^4\left(\frac{1}{6}\right)^4\left(\frac{5}{6}\right)^0=0.0008$$

إذن الاحتمال المطلوب:

$$P(X\geq 2)=f(2)+f(3)+f(4)=0.1157+0.0154+0.0008=0.1319$$

ملاحظة:

بما ان$\sum f(x)=1$، إذن نستطيع حساب الاحتمال المطلوب في هذا المثال كما يلي:

$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2)$

ويكون من السهل الحل باستخدام هذه الطريقة، عندما يكون العدد الكلي للمحاولات nكبيراً، فمثلاً إذا كانت n=10، **فإن** $P(X \geq 2)$ يحسب كما يلي:

$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - [f(0) + f(1)]$

أسهل من حسابه كما يلي:

$P(X \geq 2) = f(2) + f(3) + f(4) + f(5) + f(6) + f(7) + f(8) + f(9) + f(10)$