دولة ليبيا

وزارة التعليم

مركز المناهج التعليمية والبحوث التربوية

الرياضيات

للسنة الثانية بمرحلة التعليم الثانوي
القسم العلمي

الاسبوع الحادي عشر

المدرسة الليبية بفرنسا ـ تور

العام الدراسي:

1441 / 1442 هـ . 2020 / 2021 م.

5 النهايات والإتصال

1. قيم غير معينة
2. النهاية
3. حساب النهاية بطرق مختلفة
4. النهايات من الجهتين اليمنى واليسرى
5. نهاية دالة عند اللا نهاية
6. مفهوم اتصال دالة عند نقطة

النهايات

Limits

نشأ علم التفاضل والتكامل لوصف الكيفية التي تتغير فيها الأشياء ، ويعتمد كل من التفاضل والتكامل بصورة أساسية على مفهوم النهايات ، مفهوم النهاية يعتبر حجر الأساس الذي تبني وتتطور عليه موضوعات التفاضل والتكامل.

في نهاية الفصل سوف تكون قادراً على أن :

- تبدي فاهماً لنهاية الدالة عند نقطة .
- تستعمل الرموز للتعبير عن النهاية .
- إيجاد قيمة النهاية .
- تبدى فاهماً للمتغير المستقل والمتغير التابع .
- تستعمل الرموز للتعبير عن النهاية
- ايجاد قيمة النهاية بتطبيق نظريات النهايات
- ايجاد قيمة النهاية بالتحليل
- ايجاد النهاية في مالا نهاية لدوال نسبية
- تظهر فهما للنهاية من اليمين لليسار
- تبحث في اتصال الدوال عند نقطة

5 - 1 قيم غير معينة

$\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ $\frac{\infty}{\infty}$

نعرف أن خواص الأعداد الحقيقية لا تسمح بالقسمة على الصفر .

واذن لا نستطيع اختصار الكسر $\frac{س}{س}$ في حالة ما إذا كانت س تساوي صفراً لأن الأختصار ماهو الا عملية قسمة . وحيثما تجرى عملية اختصار مثل هذا الكسر فلا بد أن نتدارك هذه الحالة فنقول:

$\frac{س}{س} = 1$ بشرط أن $س \neq 0$

وبالمثل $\frac{س - 2}{س - 2} = 1$ بشرط أن $س \neq 2$

، $\frac{1 - س^2}{1 - س} = \frac{(1 - س)(1 + س)}{1 - س}$

$= 1 + س$ بشرط أن $س \neq 1$

فالكسر $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ ليس عدداً حقيقياً (أو أي عدد آخر) ولذا نقول أنه غير معرف

أي لا نعرف ما يناظره من بين الأعداد الحقيقية ، ولا نسطيع أعطاءه أي معنى .

كذلك الكسر $\frac{\infty}{\infty}$ هو أيضاً غير معرف Undefined لأن ∞ ليست عدداً حقيقاً

حقيقياً كما ذكرنا من قبل . واذن لا نستطيع القسمة عليه ، ومن باب اولى لا نجد عدداً حقيقاً يناظر هذا الكسر .

وهناك صور اخرى غير معرفة سوف لا نهتم بها في هذا الكتاب.

قواعد لحساب النهايات

قاعدة (1)

إذا كانت أ، ب جـ $\in$ ح فإن : $\lim_{س \to أ}$ ب س + جـ = ب أ + جـ

قاعدة (2)

إذا كانت د(س) = س فإن : $\lim_{س \to أ}$ س = أ

قاعدة (3)

إذا كانت د(س) = م فإن $\lim_{س \to أ}$ م = م ، حيث م $\in$ ح

قاعدة (4)

إذا كانت $\lim_{س \to أ}$ $د_1$(س) = ل ، $\lim_{س \to أ}$ $د_2$(س) = م ، حيث ل ، م $\in$ ح

فإن $\lim_{س \to أ}$ [$د_1$(س) $\pm$ $د_2$(س)] = $\lim_{س \to أ}$ $د_1$(س) $\pm$ $\lim_{س \to أ}$ $د_2$(س)

= ل $\pm$ م

وهذا يعني أن حساب النهاية لأي دالة حدودية يمكن حسابها لكل حد من حدود الدالة الحدودية .

مثال 3 :

أحسب قيمة النهاية الآتية إن كان لها وجود

عندما تقترب س من 2 ، د(س) = 5 س ^{3} + 3 س^2 - 4 س + 6

فإن :

$\lim_{س \to 2}$ [5 س^3 + 3س^2 - 4 س + 6] = $\lim_{س \to 2}$ 5 س^3 + $\lim_{س \to 2}$ 3 س^2 - $\lim_{س \to 2}$ 4 س + $\lim_{س \to 2}$ 6

= 40 + 12 - 8 + 6 = 50

قاعدة (5)

إذا كانت $\lim_{س \to أ}$ د(س) = ل ، $\lim_{س \to أ}$ ق(س) = م

فإن $\lim_{س \to أ}$ [د(س) . ق(س)] = $\lim_{س \to أ}$ د (س) . $\lim_{س \to أ}$ ق (س)

= ل . م

مثال 4:

أحسب قيمة النهاية الأتية إن كان لها وجود

$$\lim_{س \to 2} (5 س + 3) . \sqrt{2 س}$$

فإن $\lim_{س \to 2} (5 س + 3) . \sqrt{2 س} = \lim_{س \to 2} (5 س + 3) . \lim_{س \to 2} \sqrt{2 س}$

$= (13) . (2)$

$= 26$

قاعدة (6)

إذا كانت $\lim_{س \to أ} د(س) = ل$ ، $\lim_{س \to أ} ق(س) = م$ ، $\lim_{س \to أ} ق(س) \neq 0$

$$\lim_{س \to أ} \frac{د(س)}{ق(س)} = \frac{\lim_{س \to أ} د(س)}{\lim_{س \to أ} ق(س)}$$

$$= \frac{ل}{م}$$

مثال 5:

أحسب قيمة النهاية الأتية إن كان لها وجود

$$\lim_{س \to 1} \frac{(5 س + 4)}{\sqrt{س}}$$

الحل:

$$\frac{\lim_{س \to 1} (5 س + 4)}{\lim_{س \to 1} \sqrt{س}}$$

$$= \frac{9}{\sqrt{1}}$$

$= 9$