دولة ليبيا
وزارة التعليم
مركز المناهج التعليمية والبحوث التربوية

الرياضيات

للسنة الثالثة من مرحلة التعليم الثانوي
القسم العلمي

الدرس التاسع

المدرسة الليبية بفرنسا ـ تور

العام الدراسي
1441 / 1442 هـ - 2020 / 2021 م

3-5 ميل المنحنى:

ميل منحنى عند نقطة معلومة عليه، هو ميل المماس عند تلك النقطة.

إذا كان ص = د(س) يمثل معادلة منحنى، إذن $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ هو دالة ميل المنحنى. الميل عند نقطة معينة يمكن إيجاده بالتعويض عن قيمة س المناسبة في دالة الميل.

نفرض ميل المنحنى عند النقطة (س، ص) يساوي م، إذن ميل المماس عند هذه النقطة يساوي م.

مثال 32:

أوجد معادلتي المماس والعمودي للمنحنى ص $= 4$س$^2 + 2$س $- 1$ عند النقطة حيث س $= \frac{1}{2}$.

الحـل:

عندما س $= \frac{1}{2}$ ، ص $= 4(\frac{1}{2})^2 + 2(\frac{1}{2}) - 1$

$= 1$

النقطة على المنحنى حيث س $= \frac{1}{2}$ هي $(\frac{1}{2} ، 1)$

$\therefore$ ص $= 4$س$^2 + 2$س $- 1$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = 8$س $+ 2$

عند $(\frac{1}{2} ، 1)$، $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = 8\ (\frac{1}{2}) + 2 = 6$

أي أن ميل المماس عند $(\frac{1}{2} ، 1)$ يساوي 6.

باستخدام الصيغة الرياضية لمعادلة مستقيم بمعلومية ميله ونقطة عليه:

$$\text{ص} - \text{ص}_1 = \text{م}\,(\text{س} - \text{س}_1)$$

معادلة المماس المطلوبة هي $\text{ص} - 1 = 6\,(\text{س} - \frac{1}{2})$.

$\Leftarrow \text{ص} - 1 = 6\,\text{س} - 3$

$\Leftarrow 6\,\text{س} - \text{ص} - 2 = 0$

ميل العمودي يساوي $-\frac{1}{6}$.

$\therefore$ معادلة العمودي هي: $\text{ص} - 1 = -\frac{1}{6}\,(\text{س} - \frac{1}{2})$

$\text{ص} - 1 = -\frac{1}{6}\text{س} + \frac{1}{2}$

$12\text{ص} - 12 = -2\text{س} + 1$

$2\text{س} + 12\text{ص} - 13 = 0$

مثال 33:

المنحنى $\text{ص} = \text{س}^2 - 3\text{س} + 3$ ميله -1 عند نقطة معينة عليه. أوجد إحداثيات هذه النقطة.

الحل:

$\because \text{ص} = \text{س}^2 - 3\text{س} + 3$ .... (1)

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = 2\text{س} - 3$

نفرض $2\text{س} - 3 = -1$ عند النقطة (س ، ص)

$\Leftarrow 2\text{س} = 2$

$\Leftarrow \text{س} = 1$

بالتعويض عن $\text{س} = 1$ في المعادلة (1)

نجد أن $\text{ص} = 1 - 3\,(1) + 3$

$\Leftarrow \quad = 1$

$\therefore$ النقطة المطلوبة (1، 1)

مثال 34:

النقطتان أ (1 ، 2)، ب (7 ، 14) تقعان على منحنى معادلته ص = س^2 - 6س + 7،

ق نقطة على المنحنى بحيث المماس عند ق يوازي أ ب. أوجد:

(أ) إحداثيا ق (ب) معادلة العمودي عند ق

العمودي عند ق يقطع المنحنى مرة أخرى عند ط. أوجد إحداثيات ط.

الحل:

(أ) ميل المنحنى عند ق = ميل أ ب

$$= \frac{14-2}{7-1} = \frac{12}{6} = 2$$

ص = س^2 - 6س + 7

$\frac{ءص}{ءس} =$ 2س - 6،

عندما: $\frac{ءص}{ءس} = 2$،

2س − 6 = 2 حيث أن س = 4

ص = 4^2 − 6 (4) + 7

= −1

∴ ق = (4، -1)

(ب) العمودي عند ق ميله $-\frac{1}{2}$

∴ معادلته: ص = $-\frac{1}{2}$ س + جـ

المستقيم يمر بالنقطة ق = (4 ، -1)

-1 = $-\frac{1}{2}$ (4) + جـ

جـ = -1 + 2 = 1

∴ معادلة العمودي عند ق هي: ص = $-\frac{1}{2}$ س + 1

لإيجاد إحداثيات ط، نحل المعادلتين ص = س^2 - 6 س + 7 ، ص = $-\frac{1}{2}$س + 1 معًا.

س^2 - 6 س + 7 = $-\frac{1}{2}$ س + 1

⇐ 2س^2 - 12 س + س + 14 - 2 = 0

⇐ 2س^2 - 11س + 12 = 0

⇐ (2س - 3) (س - 4) = 0

س = $\frac{3}{2}$ أو 4 (هي نفسها عند ق)

∴ ص = $-\frac{1}{2}$ ($\frac{3}{2}$) + 1 = $\frac{1}{4}$

∴ ط = ($1\frac{1}{2}$ ،$\frac{1}{4}$)

مثال 35:

إذا كان المستقيم 3س $- 2$ص $=$ ك يمس المنحنى ص$^2 = 4$ س أوجد نقطة التماس، ثم أوجد قيمة ك ؟

$\because$ ص$^2 = 4$ س $\therefore$ ص$^{/} = \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{2}{\text{ص}}$

ميل المماس للمنحنى ص$^2 = 4$ س عند النقطة (س، ص) $= \frac{2}{\text{ص}}$

$\because$ ميل المستقيم 3س $- 2$ص $=$ ك يساوي $\frac{3}{2}$ طالما المستقيم يمس المنحنى.

$\therefore$ $\frac{2}{\text{ص}} = \frac{3}{2}$ ومنها ص $= \frac{4}{3}$ وعليه قيمة س $= \frac{4}{9}$

$\because$ $(\frac{4}{9} ، \frac{4}{3}) \in 3$س $- 2$ص $=$ ك ، فهي تحقق المعادلة

$3 \times \frac{4}{9} - 2 \times \frac{4}{3} =$ ك ، $\therefore$ قيمة ك $= -\frac{4}{3}$

مثال 36:

أوجد معادلة العمود على المنحنى (س + ص)^2 + س ص $= 5$ ، عند النقطة $(1 ، 1)$ الواقعة عليه، أثبت أن يمر بنقطة الأصل.

2(س + ص) . $(1 +$ ص$^{/})$ + س ص$^{/}$ + ص $= 5$ ومنها،

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{-2\text{س} - 3\text{ص}}{3\text{س} + 2\text{ص}}$ $\therefore$ م $= (\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}) = -1$ ، م$_{\text{العمودية}} = 1$

بالتعويض في معادلة العمود: ص $-$ ص$_1$ $= -\frac{1}{\text{م}}$(س $-$ س$_1$)

حيث (س$_1$ ، ص$_1$) $= (1 ، 1)$،

ص $- 1 =$ (س $- 1$) ، $\therefore$ ص $=$ س معادلة تمربنقطة الأصل