دولة ليبيا

وزارة التعليم

مركز المناهج التعليمية والبحوث التربوية

أسس الإحصاء

للسّنة الثّالِثةَ بمرحلة التّعليم الثانوي

(القسم العلمي)

الدرس التاسع

المدرسة الليبية بفرنسا ـ تور

العام الدراسي

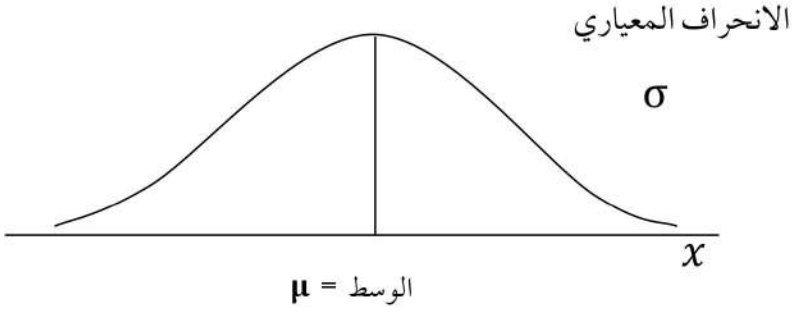
1441 / 1442 هـ - 2020 / 2021 م

(3–2) توزيعات احتمالية مستمرة هامّة:

يوجد عدد لا نهائي من التوزيعات المستمرة، ولكن أهمها هو التوزيع الطبيعي وبعض التوزيعات المستمرة الأخرى المتعلقة به، مثل توزيع **t** ، والتي سنقوم بدراستها فيما يلي :

(3–2–1) التوزيع الطبيعي :

التوزيع الطبيعي من أهم التوزيعات الاحتمالية المستمرة واكثرها استعمالا في التطبيقات الإحصائية، وقد سمى بالتوزيع الطبيعي، لأن الكثير من الظواهر المشاهدة في العلوم الطبيعية تتبع هذا التوزيع أو يستعمل كتقريب لتوزيعاتها، ومن هذه الظواهر (المتغيرات)، الأطوال، الأوزان، مستوى الذكاء .... الخ. والمنحني الذي يمثل دالة كثافة الاحتمال لهذا التوزيع الاحتمالي المستمر يسمى المنحني الطبيعي، وهو منحني ناقوسي الشكل، أي وحيد المنوال، ويمتد طرفاه إلى ما لانهاية ومتماثل حول قيمة الوسط الحسابي، وذلك كما هو موضح في **شكل (3–1)**.



شكل (3–1)

يطلق على المتغير العشوائي المستمر X الذي يتبع هذا التوزيع، المتغير العشوائي الطبيعي. وتعتمد دالة كثافة الاحتمال لهذا التوزيع على معلمتين، هما الوسط الحسابي للتوزيع μ وتباين التوزيع σ^2.

ودالة كثافة الاحتمال للتوزيع الطبيعي تأخذ الصورة التالية:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\bar{e}^{\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2} \qquad -\infty < x < \infty$$

μ ، σ^2 هما المعلمتان اللتان يعتمد عليهما التوزيع الطبيعي ، حيث :

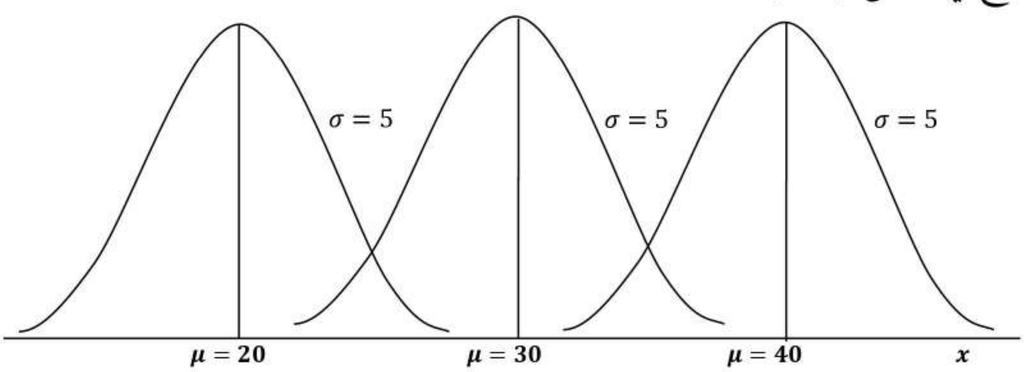
μ : الوسط الحسابي للتوزيع الطبيعي.

σ^2 : تباين التوزيع الطبيعي.

$$e = 2.71828 \dots\dots \qquad \pi = 3.14159 \dots\dots$$

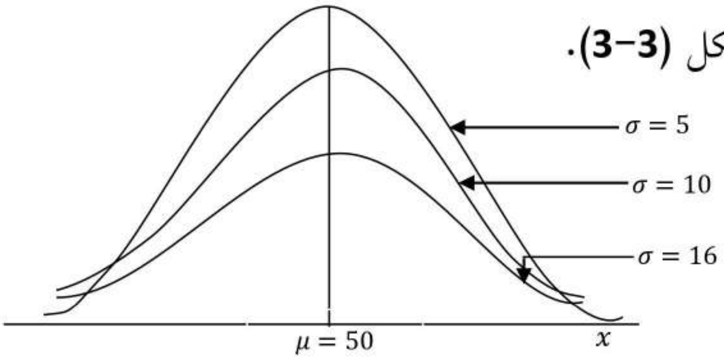
وتوجد عائلة من التوزيعات الطبيعية، تختلف باختلاف الوسط الحسابي والتباين حيث الوسط الحسابي يحدد لنا مركز التوزيع، وبما أن التوزيع الطبيعي هو توزيع متماثل فسنجد أن **الوسط الحسابي** = **الوسيط** = **المنوال**، وبالتالي ستكون قيمة الوسط الحسابي هي قيمة X التي تحت موضع قمة المنحني الطبيعي.

فإذا كان لدينا توزيعان مختلفان في قيمة الوسط الحسابي ومتساويان في التباين فيكون المنحنيان متماثلين تماماً والاختلاف بينهما هو موقع كل منهما، فالتوزيع الذي وسطه الحسابي أكبر يكون موقعه على يمين المنحني الآخر، وذلك كما هو واضح في شكل **(3-2)**.



شكل (3-2)

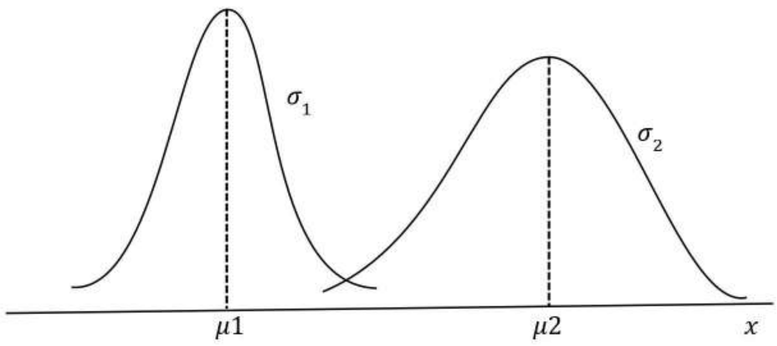
أما إذا كان المنحنيان متساويين في الوسط الحسابي ومختلفين في التباين، فسيكون المنحنيان في نفس الموقع ولكن المنحني الذي يمثل التوزيع الأكثر تبايناً ستكون قمته منخفضة ومتسعة أكثر من المنحني الذي يمثل التوزيع الآخر، وذلك كما هو واضح في شكل **(3-3)**.



شكل (3-3)

وبالطبع قد يختلف التوزيعان في الوسط الحسابي والتباين، وذلك كما هو واضح في شكل **(3-4)**.

$$\boldsymbol{\mu_1 < \mu_2 \quad , \quad \sigma_1 < \sigma_2}$$



شكل (3-4)

(3-2-2) خواص التوزيع الطبيعي:

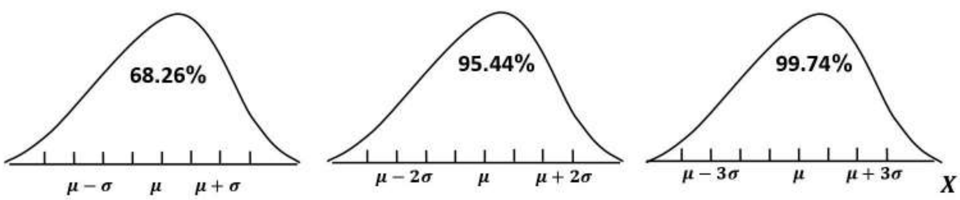
1. المنحني الذي يمثل دالة كثافة الاحتمال للتوزيع الطبيعي، منحنى متصل لجميع قيم x من $-\infty$ إلى ∞ ويأخذ شكلاً ناقوسياً وحيد المنوال ومتماثلا حول قيمة الوسط الحسابي وهي القيمة المقابلة لقمة المنحني، وذلك كما هو واضح في شكل

(3-4)، وحيث أن المساحة الكلية المحصورة بين منحني أية دالة كثافة احتمال والمحور الأفقي = **1**، إذن فالمساحة على يمين الوسط الحسابي = المساحة التي على يساره = **0.50** .

2. الوسط الحسابي للتوزيع = المنوال = الوسيط.
3. يمتد طرفا المنحني إلى ما لا نهاية ويزداد اقترابهما من المحور الأفقي كلما بعدت النقطة عن الوسط الحسابي ولكن لا يلتقيان به.
4. بما أن التوزيع الطبيعي توزيع متماثل، إذن أي معامل للالتواء يساوي **0**.
5. المعامل العزمي للتفرطح للتوزيع الطبيعي = **3** ، أي أن التوزيع الطبيعي هو توزيع معتدل، ولذلك يسمى أحياناً بالتوزيع المعتدل.
6. المساحة تحت المنحني الطبيعي والمحصورة بين $\boldsymbol{\mu - \sigma}$، $\boldsymbol{\mu + \sigma}$ تمثل **68.26%** من المساحة الكلية ، والمساحة بين $\boldsymbol{\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma}$ تمثل **95.44%** والمساحة بين $\boldsymbol{\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma}$ تمثل **99.74%**، وذلك كما هو واضح في شكل **(3-5)**.

وبما أن المساحات تحت دالة كثافة الاحتمال تمثل احتمالات، إذن:

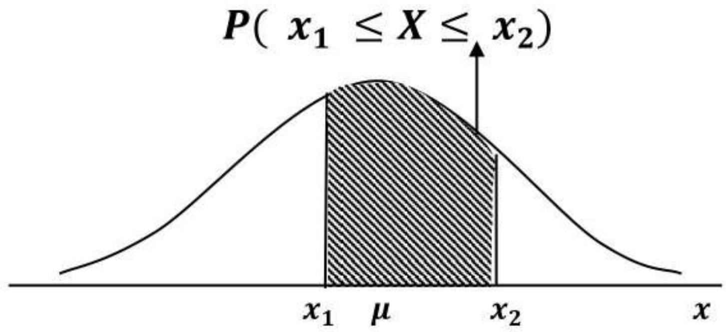
$$\boldsymbol{P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) = 0.6826}$$
$$\boldsymbol{P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) = 0.9544}$$
$$\boldsymbol{P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) = 0.9974}$$



شكل (3-5)

ونستطيع حساب احتمال أن يأخذ المتغير العشوائي الطبيعي **X** أية قيمة بين قيمتين x_1، x_2 بحساب المساحة المحصورة بين المنحنى ومحور السينات

والواقعة بين $X = x_1$, $X = x_2$ وذلك بتكامل دالة كثافة الاحتمالات، وذلك كما هو موضح في شكل **(3–6)**.



شكل (3–6)

ولكن هذه الدالة ليس من السهل تكاملها، ولتسهيل حساب الاحتمال بالنسبة لأي توزيع طبيعي نقوم بتحويل المتغير العشوائي الطبيعي **X** إلى متغير عشوائي طبيعي معياري نرمز له بالرمز **Z** ، ويطلق على توزيع المتغير العشوائي **Z** التوزيع الطبيعي المعياري.

(3–2–3) التوزيع الطبيعي المعياري:

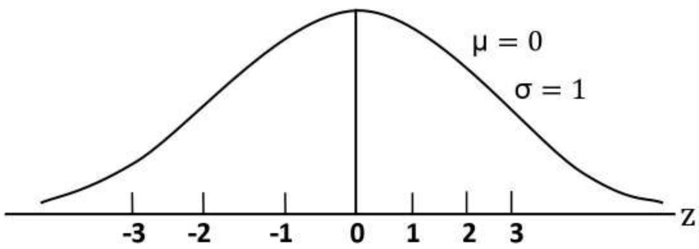
هو توزيع طبيعي وسطه الحسابي $\mu = 0$ وتباينه $\sigma^2 = 1$.

ونقوم بتحويل المتغير العشوائي الطبيعي **x** إلى المتغير العشوائي الطبيعي المعياري **z**، كما يلي:

$$Z = \frac{X-\mu_x}{\sigma_x}$$

بالتعويض في دالة كثافة الاحتمال الخاصة بأي متغير عشوائي طبيعي **X** ، عن الوسط الحسابي **μ** بصفر وعن التباين σ^2 بالقيمة واحد نحصل على دالة كثافة الاحتمال للمتغير العشوائي الطبيعي المعياري **Z** الموضحة في شكل **(3–7)** والتي تأخذ الصورة التالية:

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} \qquad -\infty < z < \infty$$



شكل (3−7)

والمساحات تحت المنحني الطبيعي المعياري من السهل الحصول عليها بتكامل دالة كثافة الاحتمال $f(Z)$، وقد حُسبت هذه المساحات وعرضت في جدول ، وذلك مثل جدول رقم (م . 1) في ملحق الجداول الإحصائية.

واحتمال أن يأخذ المتغير العشوائي الطبيعي **Z** أية قيمة في الفترة $(z_1، z_2)$ يساوي المساحة المحصورة بين المنحنى الطبيعي المعياري والمحور الأفقي وبين المستقيمين $Z = z_1$ ، $Z = z_2$. ونستخدم جدول **(م.1)** لحساب هذه المساحة أي حساب $P(z_1 < Z < z_2)$.

والبيانات داخل هذا الجدول تمثل المساحات المحصورة بين المنحنى الطبيعي المعياري والمحور الأفقي وبين المستقيم **Z = 0** ، والمستقيم المرسوم عند القيمة المعطاة للمتغير **Z** ، وقيم هذا المتغير يمثلها العمود الأول والسطر الأول في الجدول فالعمود الأول يمثل العدد الصحيح والعدد العشري الأول للمتغير **Z** ، أما السطر الأول فيحدد العدد العشري الثاني لهذا المتغير، وإذا كانت قيمة المتغير **Z** ، تحتوي على أكثر من رقمين عشريين ، يجب تقريبها إلى رقمين عشريين أولا ثم نستخدم هذا الجدول .

واعتمادا على خاصية التماثل التي يتمتع بها المنحني الطبيعي المعياري، نستطيع حساب أي مساحة مرغوب فيها، بين المنحني والمحور الأفقي، وذلك كما سنبينها من خلال الأمثلة التالية :

مثال (3-7) :

إذا كان المتغير العشوائي **Z** يتبع التوزيع الطبيعي المعياري، فأحسب الاحتمالات التالية:

أ. $P(0 \le Z \le 1.43)$

ب. $P(Z \le 1.43)$

جـ. $P(-1.43 \le Z \le 1.43)$

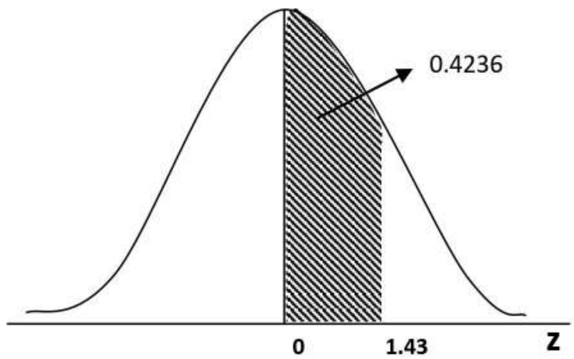
د. $P(-0.57 \le Z \le 1.12)$

هـ. $P(1.12 \le Z \le 1.41)$

و. $P(Z \ge 1.28)$

الحل:

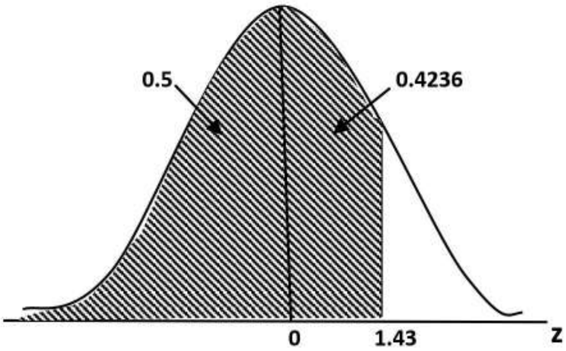
أ- الاحتمال المطلوب $P(0 \le Z \le 1.43)$ يساوي المساحة بين المنحني الطبيعي المعياري ومحور السينات، والمحصورة بين المستقيمين **Z =0** و**Z =1.43** وذلك كما هو واضح من شكل **(3−8)**، ومن جدول **(م.1)**، نجد أن هذه المساحة مساوية للقيمة **0.4236** . أي أن: $P(0 \le Z \le 1.43) = 0.4236$



شكل (3−8)

ب− الاحتمال المطلوب $P(Z \le 1.43)$ يساوي المساحة بين المنحنى الطبيعي المعياري ومحور السينات والتي على يسار القيمة **1.43**، أي المساحة من$-\infty$ إلى **1.43** ، وهي تساوي المساحة من $-\infty$ إلى **0** مضافاً إليها المساحة **0** إلى **1.43**، وذلك كما هو موضح في الشكل **(3−9)**، وبما أن المساحة من $-\infty$ إلى **0** تساوي

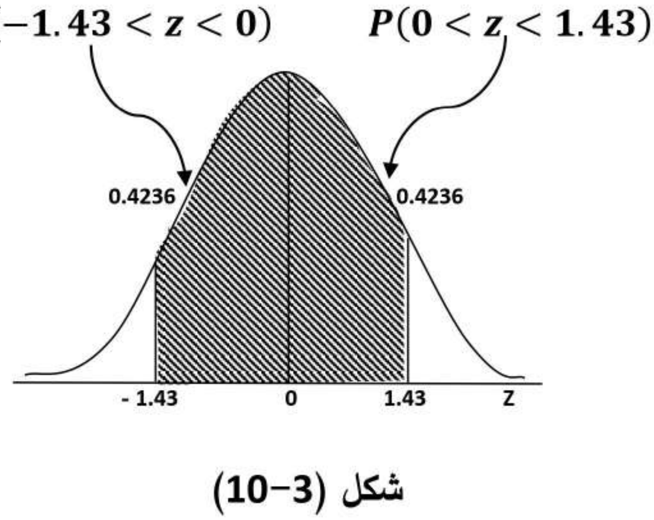
0.50 والمساحة من **0** إلى **1.43** تساوي **0.4236** من جدول **(م.1)**، إذن الاحتمال المطلوب يساوي: $P(Z \leq 1.43) = 0.50 + 0.4236 = 0.9236$



شكل (3−9)

جـ− الاحتمال المطلوب $P(-1.43 \leq Z \leq 1.43)$ يساوي المساحة بين المنحنى الطبيعي المعياري ومحور السينات والمحصورة بين المستقيمين $Z = -1.43$ و $Z = 1.43$، وبما أن المساحة من **0** إلى **1.43** تساوي المساحة من **1.43−** إلى **0**، كما هو واضح من شكل **(3−10)** ، وذلك لأن المنحنى الطبيعي المعياري متماثل ، إذن الاحتمال المطلوب :

$$P(-1.43 \leq Z \leq 1.43) = 0.4236 + 0.4236 = 0.8472$$



شكل (3−10)

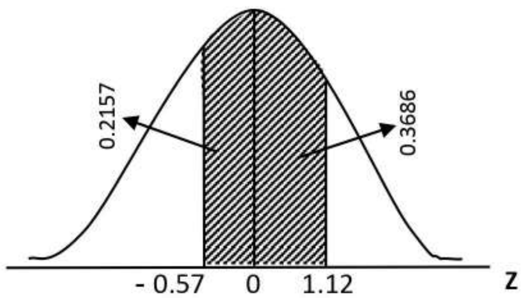
د- الاحتمال المطلوب$P(-0.57 \le Z \le 1.12)$ يساوي المساحة بين المنحنى الطبيعي المعياري ومحور السينات والمحصورة بين المستقيمين **Z = - 0.57** و **Z=1.12**، وهي تساوي المساحة من **0.57-** إلى **0** مضافاً إليها المساحة من **0** إلى **1.12**، وذلك كما هو موضح في الشكل **(3-11)**، وبما ان المساحة من **0.57-** إلى **0** تساوي المساحة من **0** إلى **0.57** لأن المنحنى متماثل ، فمن جدول **(م.1)** نجد أن:

المساحة من **0** إلى **0.57 = 0.2157** .

المساحة من **0** إلى **1.12 = 0.3686** .

إذن الاحتمال المطلوب:

$$P(-0.57 \le Z \le 1.12) = 0.2157 + 0.3686 = 0.5843$$



شكل (3-11)

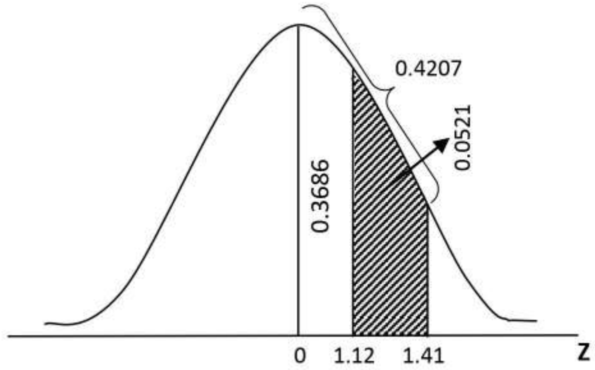
هـ -الاحتمال المطلوب $P(1.12 \le Z \le 1.41)$ يساوي المساحة بين المنحنى الطبيعي المعياري ومحور السينات والمحصورة بين المستقيمين **Z=1.12** و **Z=1.41** وهي تساوي المساحة من **0** إلى **1.41** مطروحاً منها المساحة من **0** إلى **1.12**، وذلك كما هو موضح في الشكل **(3-12)**، وبما أن:

المساحة من **0** إلى **1.41 = 0.4207**

المساحة من **0** إلى **1.12 = 0.3686** .

إذن الاحتمال المطلوب:

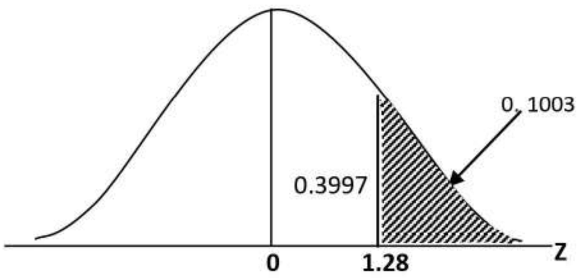
$$P(1.12 \leq Z \leq 1.41) = 0.4207 - 0.3686 = 0.0521$$



شكل (3−12)

و-الاحتمال المطلوب $P(Z \geq 1.28)$ يساوي المساحة بين المنحنى الطبيعي الميعاري ومحور السينات والتي على يمين القيمة **1.28**، أي المساحة من **1.28** إلى∞ وبما أن المساحة على يمين **0** تساوي **0.50**، إذن المساحة التي تمثل الاحتمال المطلوب ، تساوي **0.50** مطروحاً منه المساحة من **0** إلى **1.28**، وذلك كما هو موضح في الشكل **(3−13)** ، ومن جدول **Z** نجد أن ، المساحة من **0** إلى **1.28 = 0.3997** ، إذن الاحتمال المطلوب يساوي:

$$P(Z \geq 1.28) = 0.50 - 0.3997 = 0.1003$$



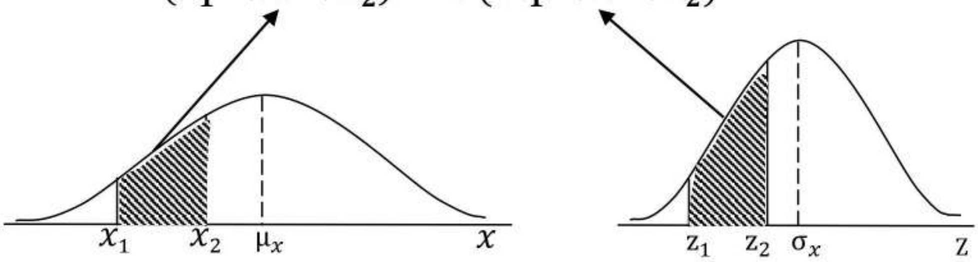
شكل (3−13)

وباستخدام التوزيع الطبيعي المعياري نستطيع تحديد أي احتمال لأي متغير عشوائي طبيعي **X** وذلك لأن المساحة المحصورة تحت دالة كثافة الاحتمال للمتغير X والمحور الأفقي وبين القيمتين $X = x_1$,$X = x_2$ هي نفسها المساحة المحصورة تحت دالة كثافة الاحتمال للمتغير Z وبين القيمتين $Z = z_1$،$Z = z_2$ حيث z_1 هي القيمة المعيارية للقيمة x_1، والقيمة z_2 هي القيمة المعيارية للقيمة x_2 ، أي أن:

$$z_1 = \frac{x_1 - \mu_x}{\sigma_x} \qquad\qquad z_2 = \frac{x_2 - \mu_x}{\sigma_x}$$

وذلك كما هو موضح في شكل **(3−14)**

$$P(x_1 < X < x_2) = P(z_1 < Z < z_2)$$



شكل (3−14)

المساحة المظلة تحت المنحني الطبيعي الأصلي = المساحة المظلة تحت المنحنى المعياري.

$$P(x_1 < X < x_2) = P(z_1 < Z < z_2)$$

حيث :

$$z_1 = \frac{x_1 - \mu_x}{\sigma_x}$$

$$z_2 = \frac{x_2 - \mu_x}{\sigma_x}$$

مثال)3-8(:

إذا كانت أوزان وحدات منتجة من سلعة ما، تتبع توزيعاً طبيعياً بوسط حسابي قدره **65** جرام وتباين قدره **25**، فأحسب احتمال أن يكون وزن وحدة مختارة عشوائياً من هذه السلعة:

1. محصور بين **58.75** جرام **و 67.50** جرام.

2. أقل من **61.25** جرام.

3. أكثر من **71.25** جرام.

الحل:

-1 المطلوب احتمال أن يكون الوزن محصوراً بين **58.75** و **67.50** جرام، أي

الاحتمال المطلوب هو: $P(58.75 < X < 67.50) = ?$

بما أن: $P(58.75 < X < 67.50) = P(z_1 < Z < z_2)$

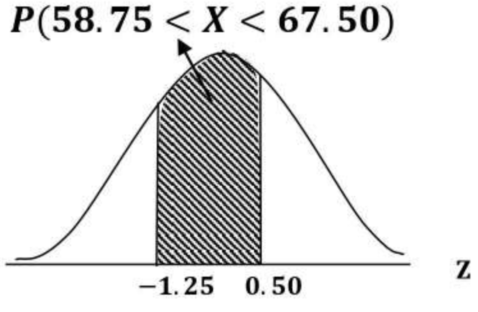
حيث:

$$z_1 = \frac{58.75 - 65}{5} = -1.25$$

$$z_2 = \frac{67.50 - 65}{5} = 0.50$$

$$\therefore \; P(58.75 < X < 67.50) = P(-1.25 < Z < 0.50)$$

أي أن الاحتمال المطلوب يساوي احتمال أن يقع المتغير بين القيمتين، **0.50**، **1.25**-، وهو يساوي المساحة المحصورة بين هاتين القيمتين، وباستخدام جدول، (م.1)وكما هو واضح في شكل **(3−15)**، نجد أن:



شكل (3−15)

$$P(58.75 < X < 67.50) = P(-1.25 < Z < 0.5)$$
$$= 0.3944 + 0.1915 = 0.5859$$

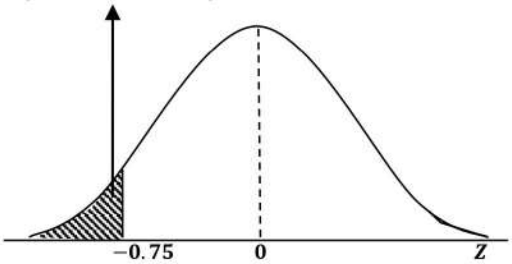
2- المطلوب احتمال أن يكون وزن الوحدة أقل من **61.25** جرام أي:

$$\mathbf{P(X < 61.25) = ?}$$

نحسب القيمة المعيارية **Z** المقابلة للقيمة **61.25** حيث:

$$\mathbf{Z} = \frac{x-\mu_x}{\sigma_x} = \frac{\mathbf{61.25-65}}{\mathbf{5}} = \mathbf{-0.75}$$

إذن: $\mathbf{P(X < 61.25) = P(Z < -0.75) = 0.50 - 0.2734 = 0.2266}$



شكل (3−16)

3− المطلوب هو احتمال أن يكون وزن الوحدة أكثر من **71.25** جرام، أي:

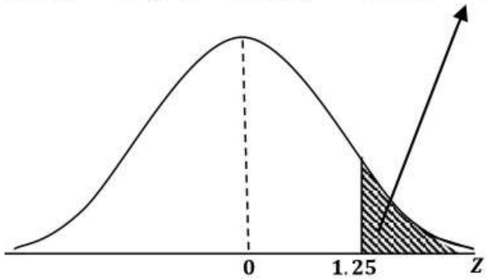
$$\mathbf{P(X > 71.25) = ?}$$

نحسب القيمة المعيارية المقابلة للقيمة **71.25** حيث:

$$\mathbf{z} = \frac{x-\mu_x}{\sigma_x} = \frac{\mathbf{71.25-65}}{\mathbf{5}} = \mathbf{1.25}$$

إذن:

$$\mathbf{P(}X\mathbf{ > 71.25) = P(Z > 1.25) = 0.50 - 0.3944 = 0.1056}$$



شكل (3−17)

ملخص الفصل الثالث

درسنا في هذا الفصل توزيعين احتماليين متقطعين هامين، هما توزيع ذات الحدين وتوزيع بواسون، حيث دالة كتلة الاحتمال لتوزيع ذات الحدين هي:

$$f(x;n,p) = C_x^n P^x q^{n-x} \qquad x = 0,1,2,\dots\dots\dots n$$

P,n هما المعلمتان اللتان يعتمد عليهما توزيع ذات الحدين:

والوسط الحسابي والتباين لتوزيع ذات الحدين هما:

الوسط الحسابي $np = \mu$، **التباين** $npq = \sigma^2$

أما دالة كتلة الاحتمال لتوزيع بواسون فتأخذ الصيغة التالية:

$$f(x;\lambda) = \frac{e^{-\lambda}\ \lambda^x}{x!} \qquad x = 0,1,2,\dots\dots$$

يعتمد التوزيع على معلمة واحدة وهي λ

والوسط الحسابي للتوزيع = تباين التوزيع $=\lambda$

كذلك تطرقنا لأهم توزيع مستمر وهو التوزيع الطبيعي، ودالة كثافة الاحتمال لهذا التوزيع تأخذ الصيغة التالية:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2} \qquad -\infty < x < \infty$$

ولحساب $P(x_1 < X < x_2)$ يجب تحويل $x_2 . x_1$ إلى قيم معيارية $z_2 . z_1$ حيث:

$$z_2 = \frac{x_2 - \mu_X}{\sigma_X}, z_1 = \frac{x_1 - \mu_X}{\sigma_X} \quad \text{و} \quad , \quad P(x_1 < X < x_2) = P(z_1 < Z < z_2)$$

كما درسنا توزيع مستمر آخر هام وله علاقة مباشرة بالتوزيع الطبيعي، وهو توزيع t.