دولة ليبيا
وزارة التعليم
مركز المناهج التعليمية والبحوث التربوية

الرياضيات

للسنة الثالثة من مرحلة التعليم الثانوي
القسم العلمي

الدرس الثاني عشر

المدرسة الليبية بفرنسا ـ تور

العام الدراسي
1441 / 1442 هـ - 2020 / 2021 م

تطبيقات على التفاضل
Application of Differentiation

1-4 معدل التغير

$\frac{وص}{وس}$ هو معدل تغير ص بالنسبة إلى س. لذلك، $\frac{وص}{وس} = 3$ يعني تزايد ص بمقدار 3 وحدات لكل زيادة مقدارها 1 وحدة من س. بالمثل، إذا كان أ مترًا مربعًا تمثل مساحة، ن ثانية تمثل فترة زمنية بعد زمن معين معلوم، إذن $\frac{وا}{ون} = 2$ يعني أن المساحة تتزايد بمعدل 2م^2/ث.

إذا كان $\frac{وا}{ون}$ سالبًا، مثل $\frac{وا}{ون} = -1.5$ م^2/ث فهذا يشير إلى معدل تناقص المساحة هذا المعنى لـ: $\frac{وص}{وس}$ جنبًا إلى جنب مع قاعدة دالة الدالة: $\frac{وص}{وس} = \frac{وص}{ون} \times \frac{ون}{وس}$ يعطي طريقة لربط معدلات التغير.

مثال 1:

يزداد طول نصف قطر بالون كروي بمعدل 1 سم / ث. أوجد معدل تغير:

(أ) الحجم (ب) مساحة السطح.

البالون عندما يكون طول نصف القطر 5 سم.

الحل:

(أ) نفرض طول نصف قطر البالون نق سم بعد زمن قدره ن ثانية، إذن الحجم ح سم^3 بعد زمن ت ثانية يعطى بالعلاقة $ح = \frac{4}{3} \pi نق^3$ ويرمز لمساحة سطحه م سم^2 بعد زمن ثانية يعطى بالعلاقة، $م = 4 \pi نق^2$، طول نصف القطر يتزايد بمقدار 1 سم/ث وهو معدل تغير طول نصف القطر، $\frac{ونق}{ون} = 1$ سم/ث.

$ح = \frac{4}{3} \pi نق^3$

فإن $\frac{وح}{ونق} = 4 \pi نق^2$

$\frac{وح}{ون} = \frac{وح}{ونق} \times \frac{ونق}{ون}$ (قاعدة دالة الدالة)

عندما نق = 5، $\frac{وح}{ون} = 4 \pi (5)^2 (1) = 100 \pi$ سم^3/ث

أي أن الحجم يتزايد بمقدار 100π سم^3/ث عندما يكون طول نصف قطر البالون 5 سم.

(ب) $م = 4 \pi نق^2$

$\frac{م}{ق} = 8 \pi نق$

جميع الحقوق محفوظة لـ مركز المناهج التعليمية والبحوث التربوية

باستخدام قاعدة دالة الدالة مرة أخرى...

$$\frac{\text{و م}}{\text{و ن}} = \frac{\text{و م}}{\text{و نق}} \times \frac{\text{و نق}}{\text{و ن}}$$

عندما نق = 5 $\quad \frac{\text{و م}}{\text{و ن}} = 8\,(5)\,\pi\,(1) = 40\ \pi$ سم^2/ث

تزداد مساحة سطح البالون بمعدل 40 π سم^2/ث عندما يكون طول نصف قطره 5 سم.

مثال 2:

صب ماء في مخروط دائري مقلوب طول نصف قطر قاعدته 5 سم وارتفاعه 15 سم بمعدل 10 سم^3/ ث احسب :

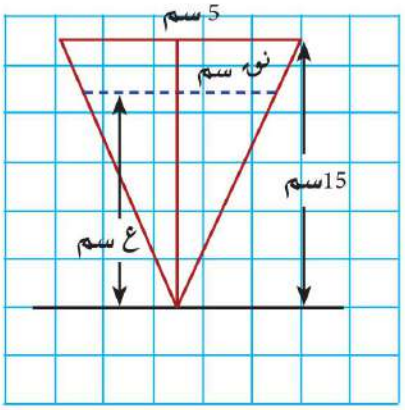
(أ) معدل زيادة ارتفاع سطح الماء، عندما يكون ارتفاع سطح الماء 4سم،

(ب) معدل زيادة مساحة سطح الماء، عندما يكون سطح الماء على ارتفاع 4سم.

(اترك الإجابات بدلالة π حيثما أمكن)

الحل:

(أ) نفرض ارتفاع سطح الماء ع سم بعد زمن قدره ن ثانية، وأن طول نصف قطر سطح الماء نق سم في هذه الفترة الزمنية في شكل 1-4 مقطع للمخروط.



شكل 1-4

بأخذ مثلثين متشابهين، $\quad \frac{\text{نق}}{\text{ع}} = \frac{5}{15}$

$$\text{نق} = \frac{\text{ع}}{3} \longleftarrow$$

نفرض حجم الماء ح:

$$\text{ح} = \frac{1}{3}\ \pi\ \text{نق}^2\ \text{ع}$$

ضع $\text{نق} = \frac{\text{ع}}{3}$ $\quad \text{ح} = \frac{1}{3}\ \pi\ \left(\frac{\text{ع}}{3}\right)^2\ \text{ع}$

$$\text{ح} = \frac{\pi\ \text{ع}^3}{27} \longleftarrow$$

$$\frac{\text{و ح}}{\text{و ع}} = \frac{\pi\ \text{ع}^2}{9}$$

$$\frac{\text{و ح}}{\text{و ن}} = \frac{\text{و ح}}{\text{و ع}} \times \frac{\text{و ع}}{\text{و ن}}$$

جميع الحقوق محفوظة لـ مركز المناهج التعليمية والبحوث التربوية ـ ليبيا

$\frac{د ع}{د ن} = 10$ سم^3/ ث ، ع = 4 ، $\frac{د ع}{د ن} \times \frac{4\pi^2}{9} = 10$

$\frac{د ع}{د ن} = \frac{10}{1} \times \frac{9}{4\pi^2} = \frac{45}{8\pi}$ سم/ث.

عند الارتفاع 4 سم يكون معدل تغير الارتفاع يساوي $\frac{45}{8\pi}$ سم/ث.

(ب) سطح الماء دائري، إذن مساحة السطح م = π نق^2 (في أية لحظة)

ضع نق = $\frac{ع}{3}$ ⟵ $م = \frac{\pi ع^2}{9}$

$\frac{د م}{د ع} = \frac{\pi 2 ع}{9}$

$\frac{د م}{د ن} = \frac{د م}{د ع} \times \frac{د ع}{د ن}$

عوض عن ع = 4 ، $\frac{د ع}{د ن} = \frac{45}{8\pi}$، نجد أن $\frac{د م}{د ن} = \frac{\pi 2 (4)}{9} \times \frac{45}{8\pi}$

$\frac{د م}{د ع} = 5$ سم^2 /ث

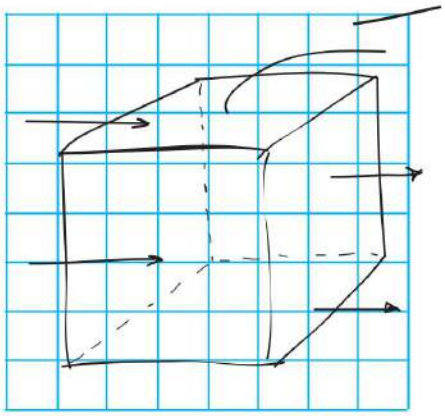
أي أن مساحة سطح الماء تتزايد بمعدل 5 سم^2/ث عندما يكون ارتفاع سطح الماء 4 سم.

مثال 3:

يتناقص طول ضلع مكعب طوله ل سم بمعدل 0.01 سم كل دقيقة.

أوجد معدل تغير الحجم، ح سم^3، عندما يكون طول كل ضلع 10 سم.

الحل:



معدل تغير ل يساوي – 0.01 سم/ق

أي أن $\frac{د ل}{د ن} = -0.01$ (القيمة السالبة نترمز للتناقص)

حجم المكعب ح:

$ح = ل^3$

$\frac{د ح}{د ن} = 3ل^2$ ⇦

$\frac{د ح}{د ن} = \frac{د ح}{د ل} \times \frac{د ل}{د ن}$ ⇦

عوض عن ل = 10 ، $\frac{د ل}{د ن} = -0.01$

نجد أن $\frac{د ح}{د ن} = 3(10)^2 \times (-0.01)$

= – 3 سم^3/ق

الحجم يتناقص بمعدل 3 سم^3/ق عندما يكون طول كل ضلع 10 سم.

جميع الحقوق محفوظة لـ مركز المناهج التعليمية والبحوث التربوية