دولة ليبيا
وزارة التعليم
مركز المناهج التعليمية والبحوث التربوية

أسس الإحصاء

للسّنة الثّالِثة بمرحلة التّعليم الثانوي

(القسم العلمي)

الدرس الثاني عشر

المدرسة الليبية بفرنسا ـ تور

العام الدراسي

1441 / 1442 هـ - 2020 / 2021 م

الفصل الرابع
توزيعات المعاينة

(4-1) مقدمة:

البيانات الإحصائية هي المعلومات التي يجمعها الباحث عن الظاهرة التي يقوم بدراستها، وتشكل البيانات المادة الرئيسية في أي بحث إحصائي فعلي قدر صحتها تتوقف دقة البحث والتحليل الإحصائي، ويقوم الباحث بجمع البيانات باتباع أحد أسلوبين وهما:

(4-1-1) أسلوب الحصر الشامـل:

يتطلب أسلوب الحصر الشامل جمع البيانات عن كل أفراد المجتمع الإحصائي محل الدراسة. حيث المقصود بالمجتمع الإحصائي هو مجموعة كل المفردات التي يهتم بها موضوع البحث، وقد تكون هذه المفردات أشخاص أو أسر أو شركات أو حيوانات أو أشياء.

ومن أمثلة الحالات التي يستخدم فيها هذا الأسلوب هي التعدادات العامة للسكان حيث يتم جمع بيانات عن كل مفردة من مفردات المجتمع سواء كانت المفردة شخصاً أو أسرة أو مزرعة ... الخ.

وإذا كان مجتمعنا الإحصائي يشمل جميع طلاب جامعة ما مثلاً، فعند جمع البيانات باستخدام أسلوب الحصر الشامل، يجب جمع بيانات عن كل طالب من طلاب هذه الجامعة. وإذا كانت دراستنا خاصة بالدخل الشهري للعائلات القاطنة في مدينة ما، فالمجتمع الإحصائي يشمل كل العائلات القاطنة في هذه المدينة، وعند استخدام أسلوب الحصر الشامل يجب أن نجمع بيانات من كل عائلة من هذه العائلات.

(4-1-2) أسلوب المعاينة (أسلوب العينات):

المقصود بأسلوب المعاينة هو تجميع البيانات عن جزء فقط من مفردات المجتمع الإحصائي محل الاهتمام والدراسة، ويطلق على هذا الجزء مصطلح العينة. ونستطيع تعريف العينة كما يلي:

تعريف العينة

العينة هي جزء يتم اختياره من المجتمع محل الدراسة وذلك لغرض دراسة المجتمع من خلالها لأن دراسة المجتمع ككل غير ممكنة.

في اية دراسة إحصائية يجب أن يكون الهدف هو دراسة المجتمع ككل وليس دراسة العينة، ولكن تُستخدم العينة في الدراسة لأن الباحث لا يستطيع أن يجمع بيانات عن كل مفردات المجتمع محل الدراسة، وذلك للأسباب التالية:

الإحصاءة عبارة عن متغير، وهذا هو الفرق الجوهري بين المعلمة والإحصاءة، **فالمعلمة عبارة عن قيمة ثابتة، بينما الإحصاءة عبارة عن متغير**. وبما أن الإحصاءة عبارة عن متغير فستكون متغيراً متقطعاً أو متغيرا مستمرا، وسيكون لها توزيع احتمالي، والتوزيع الاحتمالي لأية إحصاءة يسمى توزيع معاينة.

تعريف توزيع المعاينة :

توزيع المعاينة هو التوزيع الاحتمالي لأية إحصاءة تحسب قيمها من كل العينات العشوائية ذات الحجم المتساوي والممكن سحبها من المجتمع.

فإذا سحبنا من المجتمع كل العينات العشوائية الممكنة ذات الحجم n ولكل عينة حسبنا قيمة الوسط الحسابي $\overline{X}$ فالتوزيع الاحتمالي للإحصاءة $\overline{X}$ يسمى توزيع المعاينة للوسط الحسابي $\overline{X}$ ، وإذا حسبنا لكل عينة قيمة التباين S^2 فالتوزيع الاحتمالي للإحصاءة S^2 يسمى توزيع المعاينة للتباين S^2 ، وهكذا ... فتوزيع المعاينة يوضح لنا نمط تغيير تلك الإحصاءات، وبالتالي نتمكن من إجراء استنتاج أو استدلال إحصائي حول القيم المناظرة لها في المجتمع.

سنعرض أمثلة توضح كيفية إيجاد توزيعات المعاينة وعلاقة هذه التوزيعات بتوزيع المجتمع الأصلي الذي سحبت منه العينات.

(3-4) توزيع المعاينة للوسط الحسابي للعينة $\bar{X}$:

إذا كان لدينا مجتمع محدود حجمه N ووسطه الحسابي μ وتباينه σ^2، وسحبنا منه كل العينات العشوائية البسيطة الممكنة المتساوية في الحجم وليكن

حجمها n، وحسبنا الوسط الحسابي $\overline{X}$ لكل عينة ثم وضعنا هذه المتوسطات في جدول توزيع احتمالي، فهذا التوزيع الاحتمالي يطلق عليه توزيع المعاينة للوسط الحسابي للعينة $\overline{X}$.

تعريف المعاينة للوسط الحسابي للعينة : هو التوزيع الاحتمالي للوسط الحسابي للعينة $\overline{X}$

مثال (4-1) :

شركة بها **5** أقسام، وفيما يلي عدد الموظفين في كل قسم:

16 , 12 , 10 , 8 , 4

أ) أوجد التوزيع الاحتمالي للمجتمع، ومنه أحسب الوسط الحسابي للمجتمع، وتباين المجتمع.

ب) فإذا اخترنا من هذا المجتمع كل العينات العشوائية التي تشمل قسمين (الاختيار مع عدم الإرجاع)، فأكتب توزيع المعاينة للوسط الحسابي للعينة $\overline{X}$، وأحسب منه الوسط الحسابي والتباين للاحصاءة $\overline{X}$.

الحل :

أ) المجتمع الإحصائي (الشركة) يحتوي على **5** مفردات (أقسام)، والمتغير محل الدراسة هنا هو عدد الموظفين، فإذا رمزنا لهذا المتغير العشوائي المتقطع بالرمز X ، فبحساب دالة الاحتمال $f(x)$ لكل قيمة من قيم المتغير نحصل على توزيع المجتمع والموضح في جدول (4-1).

جدول (4-1): التوزيع الاحتمالي للمجتمع

x	4	8	11	12	16
$f(x)$	1/5	1/5	1/5	1/5	1/5

ومن جدول (4-1) نحسب الوسط الحسابي والتباين لهذا المجتمع كما يلي:

$$\mu = \sum x\, f\,(x) = (4)\left(\frac{1}{5}\right) + (8)\left(\frac{1}{5}\right) + (10)\left(\frac{1}{5}\right) + (12)\left(\frac{1}{5}\right) + (16)\left(\frac{1}{5}\right) = 10$$

$$\boldsymbol{\sigma^2} = \sum (x-\mu)^2\ f(x)$$

$$= (4-10)^2\left(\frac{1}{5}\right) + (8-10)^2\left(\frac{1}{5}\right) + (10-10)^2\left(\frac{1}{5}\right) + (12-10)^2\left(\frac{1}{5}\right) + (16-10)^2\ \frac{1}{5} = 16$$

ب- إذا سحبنا من هذا المجتمع مع عدم الإرجاع كل العينات الممكنة ذات الحجم **n = 2** ، سيكون العدد الكلي للعينات الممكن سحبها هو:

$$\boxed{C_2^5 = \frac{5!}{2!\,3!} = 10}$$

فإذا حسبنا لكل عينة من هذه العينات العشرة، وسطها الحسابي $\bar{X}$، حيث $\bar{X}$ يساوي مجموع كل قيم العينة $\sum_{i=1}^{n} x_i$ مقسوما على حجم العينة **n**، أي أن:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

سنحصل على النتائج الموضحة في جدول **(4-2)**. ومن هذا الجدول نستطيع تكوين جدول توزيع المعاينة للوسط الحسابي للعينة $\bar{X}$ في حالة السحب مع عدم الإرجاع والموضح في جدول **(4-3)**.

جدول (4-2)

العينات ذات الحجم **2** الممكن سحبها من المجتمع مع عدم الإرجاع مقرونة بأوساطها الحسابية.

العينة	$\bar{X}$	العينة	$\bar{X}$
4,8	6	8,12	10
4,10	7	8,16	12
4,12	8	10,12	11
4,16	10	10,16	13
8,10	9	12,16	14

جدول (4-3): توزيع المعاينة للوسط الحسابي $\bar{\mathbf{X}}$

$\bar{x}$	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$f(\bar{x})$	1/10	1/10	1/10	1/10	2/10	1/10	1/10	1/10	1/10

ونستطيع حساب $\mu_{\bar{x}}$ و $\sigma^2_{\bar{x}}$ لتوزيع المعاينة من الصيغ التي استخدمناها عند حساب الوسط الحسابي وتباين المجتمع مع ملاحظة أن المتغير الذي نتعامل معه في توزيع المعاينة هو $\bar{X}$ بينما المتغير الذي نتعامل معه في حالة المجتمع هو X وبالتالي تكون الصيغ كما يلي:

$$\mu_{\bar{x}} = \sum \bar{x}\, f(\bar{x}) \quad , \quad \sigma^2_{\bar{x}} = \sum \left(\bar{x} - \mu_{\bar{x}}\right)^2 f\,(\bar{x})$$

والجدول التالي يوضح العمليات الحسابية اللازمة للحصول على هذين المقياسين.

$\bar{x}$	$f(\bar{x})$	$\bar{x}f(\bar{x})$	$(\bar{x} - \mu_{\bar{x}})^2$	$(\bar{x} - \mu_{\bar{x}})^2 f(\bar{x})$
6	**1/10**	**6/10**	**16**	**16/10**
7	**1/10**	**7/10**	**9**	**9/10**
8	**1/10**	**8/10**	**4**	**4/10**
9	**1/10**	**9/10**	**1**	**1/10**
10	**2/10**	**20/10**	**0**	**0**
11	**1/10**	**11/10**	**1**	**1/10**

12	1/10	12/10	4	4/10
13	1/10	13/10	9	9/10
14	1/10	14/10	16	16/10
		100/10		60/10

إذن: $$\mu_{\bar{x}} = \sum \bar{x} f(\bar{x}) = \frac{100}{10} = 10$$

$$\sigma^2_{\bar{x}} = \sum \left(\bar{x} - \mu_{\bar{x}}\right)^2 f(\bar{x}) = \frac{60}{10} = 6$$

نلاحـــــــظ أن: $$\mu_{\bar{x}} = \mu$$

بينمــــــــــا: $$\sigma^2_{\bar{x}} \neq \sigma^2$$

ولكن إذا حسبنا: $$\frac{\sigma^2}{n} \times \frac{N-n}{N-1}$$

فسنجده يساوي تباين توزيع المعاينة $\sigma^2_{\bar{x}}$ ، حيث:

$$\frac{\sigma^2}{n} \times \frac{N-n}{N-1} = \frac{16}{2} \times \frac{5-2}{5-1} = 6$$

إذن: $$\sigma^2_{\bar{x}} = \frac{\sigma^2}{n} \times \frac{N-n}{N-1}$$

ويطلق على المقدار $\frac{N-n}{N-1}$ معامل التصحيح.

وإذا كانت عملية السحبّ تمت مع الإرجاع، فسنجد أن العلاقة بين تباين توزيع المعاينة للوسط الحسابي للعينة وتباين المجتمع كما يلي:

$$\sigma^2_{\bar{x}} = \frac{\sigma^2}{n}$$

وعندما يكون حجم المجتمع كبيراً جداً، أو عندما تكون نسبة حجم العينة إلى حجم المجتمع (n/N) أقل من أو تساوي 0.05، يؤول معامل التصحيح $\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$ إلى الواحد الصحيح. وتكون العلاقة في حالة عدم الإرجاع هي نفسها في حالة الإرجاع وهي:

$$\sigma^2_{\bar{x}} = \frac{\sigma^2}{n}$$

والنظرية التالية تلخص هذه العلاقات:

نظرية (4-1):

إذا كان لدينا مجتمع محدود، حجمه **N** ووسطه الحسابي **μ** وتباينه σ^2، وسحبنا منه كل العينات العشوائية الممكنة ذات الحجم **n** ، فإن الوسط الحسابي $\mu_{\bar{x}}$ والتباين $\sigma_{\bar{x}}^2$ لتوزيع المعاينة للوسط الحسابي للعينة يرتبط بالوسط الحسابي للمجتمع وتباين المجتمع حسب العلاقات التالية:

$$\mu_{\bar{X}} = \mu$$

في حالة السحب مع الإرجاع أو كان حجم المجتمع كبيراً أو $\frac{n}{N} \le 0.05$:

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

وفي حالة السحب مع عدم الإرجاع و $\frac{n}{N} > 0.05$:

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma^2}{N} \times \frac{N-n}{N-1}$$