دولة ليبيا
وزارة التعليم
مركز المناهج التعليمية والبحوث التربوية

الرياضيات

للسنة الثانية بمرحلة التعليم الثانوي
القسم العلمي

الاسبوع الثالث عشر

المدرسة الليبية بفرنسا ـ تور

العام الدراسي:
1441 / 1442 هـ . 2020 / 2021 م.

5 - 3 حساب النهايات بطرق مختلفة

رأينا من الأمثلة السابقة أنه يمكن حساب النهايات بالتعويض المباشر عن قيمة س ولكن في بعض المسائل نجد أن قيمة النهاية ليس لها وجود عندما نعوض عن س بالطرق المباشرة وبالتالي نلجأ إلى أساليب اخرى لحساب مثل هذه النهايات تتمثل في الأتي :

أ) حساب النهاية بالتحليل :

مثال 15 :

$$\lim_{س \to 3} \frac{س^2 - 9}{س - 3}$$

الحل :

نلاحظ أن هذه النهاية ليس لها وجود عند التعويض برقم 3 عن س

$$\lim_{س \to 3} \frac{3^2 - 9}{3 - 3} = \frac{9 - 9}{3 - 3} = \frac{0}{0} = \text{(كمية غير معرفة)}$$

إذا نلجأ إلى التحليل أي أن

$$\lim_{س \to 3} \frac{س^2 - 9}{س - 3} = \lim_{س \to 3} \frac{(س - 3)(س + 3)}{(س - 3)}$$

$$= 6$$

مثال 13 :

احسب قيمة النهايات الأتية إن كان لها وجود

$$\lim_{س \to 2} \frac{س^2 - س + 6}{س - 2}$$

الحل :

$$\lim_{س \to 2} \frac{س^2 - س + 6}{س - 2} = \lim_{س \to 2} \frac{(س - 3)(س - 2)}{س - 2}$$

$= -1$ لاحظ أن $س \neq 2$

مثال 14 :

احسب قيمة النهايات الأتية إن كان لها وجود

$$\lim_{س \to 2} \frac{س - 2}{س^2 - س - 2} = \lim_{س \to 2} \frac{س - 2}{(س + 1)(س - 2)}$$

$$= \frac{1}{3}$$

مثال 15:

احسب قيمة النهايات الأتية إن كان لها وجود

$$\lim_{\text{س} \to 3} \frac{\text{س}^2 + \text{س} - 12}{\text{س}^2 + 3\text{س} - 18}$$

الحل:

$$\lim_{\text{س} \to 3} \frac{\text{س}^2 + \text{س} - 12}{\text{س}^2 + 3\text{س} - 18} = \lim_{\text{س} \to 3} \frac{(\text{س} - 3)(\text{س} + 4)}{(\text{س} - 3)(\text{س} + 6)}$$

$= \frac{7}{9}$ **لاحظ أن** $\text{س} \neq 3$

مثال 16:

احسب قيمة النهايات الأتية إن كان لها وجود

$$\lim_{\text{س} \to \sqrt{3}} \frac{\text{س}^2 - 3}{\text{س} - \sqrt{3}}$$

الحل:

$$\lim_{\text{س} \to \sqrt{3}} \frac{\text{س}^2 - 3}{\text{س} - \sqrt{3}}$$

$$= \lim_{\text{س} \to \sqrt{3}} \frac{(\text{س} - \sqrt{3})(\text{س} + \sqrt{3})}{\text{س} - \sqrt{3}}$$

$$= \sqrt{3} + \sqrt{3}$$

$$= 2\sqrt{3}$$

مثال 17:

احسب قيمة النهايات الأتية إن كان لها وجود

$$\lim_{\text{س} \to 4} \frac{\text{س}^2 - 16}{\sqrt{\text{س}} - 2}$$

الحل:

$$\lim_{\text{س} \to 4} \frac{\text{س}^2 - 16}{\sqrt{\text{س}} - 2} = \lim_{\text{س} \to 4} \frac{(\text{س} - 4)(\text{س} + 4)}{(\sqrt{\text{س}} - 2)}$$

$$= \lim_{\text{س} \to 4} \frac{(\sqrt{\text{س}} - 2)(\sqrt{\text{س}} + 2)(\text{س} + 4)}{(\sqrt{\text{س}} - 2)}$$

$$\lim_{س \to 4} (\sqrt{س} + 2)(س + 4) = (\sqrt{4} + 2)(4 + 4)$$

$$= (4)(8)$$

$$= 32$$

مثال 18:

احسب

$$\lim_{س \to 1} \left(\frac{1 - \frac{1}{س}}{1 - س} \right) \quad ، \quad س \neq 1$$

الحل :

$\because \quad 1 - \frac{1}{س} = \frac{س - 1}{س}$

$\therefore \quad \frac{1 - \frac{1}{س}}{1 - س} = \frac{س - 1}{س\,(1 - س)}$ لاحظ أن $س \neq 1$

$$= -\frac{1}{س}$$

بهذا فإن

$$\lim_{س \to 1} \left(\frac{1 - \frac{1}{س}}{1 - س} \right) = -\lim_{س \to 1} \frac{1}{س}$$

$$= -1$$

مثال 19:

احسب $\lim_{س \to -3} \sqrt[3]{\frac{س^3 + 27}{س^2 - 9}}$

الحل :

$$\lim_{س \to -3} \sqrt[3]{\frac{س^3 + 27}{س^2 - 9}} \qquad \lim_{س \to -3} \sqrt[3]{\frac{س^2 - 3س + 9}{س - 3}}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{9 + 9 + 9}{-6}} = \sqrt[3]{\frac{-9}{2}}$$

ب) حساب النهاية بطريقة الضرب في المرافق

مثال 20:

احسب قيمة النهاية الأتية إن كان لها وجود

$$\lim_{س \to 0} \frac{\sqrt{س + 4} - 2}{س}$$

الحل

نلاحظ أن قيمة هذه النهاية كمية غير معينة بالتعويض المباشر ، وبذلك نضرب طرفي البسط والمقام في مرافق البسط فنجد أن :

$$\lim_{س \to 0} \frac{\sqrt{س + 4} - 2}{س} \cdot \frac{(\sqrt{س + 4} + 2)}{(\sqrt{س + 4} + 2)}$$

$$= \lim_{س \to 0} \frac{س + 4 - 4}{س\,[\sqrt{س + 4} + 2]}$$

$$= \lim_{س \to 0} \frac{1}{\sqrt{س + 4} + 2} = \frac{1}{4}$$

مثال 21:

احسب قيمة النهاية الأتية إن كان لها وجود

$$\lim_{س \to 0} \frac{س}{(\sqrt{س + 3} - \sqrt{3})}$$

$$= \lim_{س \to 0} \frac{س}{(\sqrt{س + 3} - \sqrt{3})} \cdot \frac{(\sqrt{س + 3} + \sqrt{3})}{\sqrt{س + 3} + \sqrt{3}}$$

$$= \lim_{س \to 0} \sqrt{س + 3} + \sqrt{3}$$

$$= 2\sqrt{3}$$

جـ) حساب النهايات بتوحيد المقامات

مثال 22:

احسب قيمة النهايات الأتية إن كان لها وجود

$$\lim_{س \to 2} \left(\frac{س^2}{س - 2} - \frac{4}{س - 2} \right)$$

الحل :

نلاحظ أن قيمة هذه النهاية ليس لها وجود ، توحيد المقامات وتكون كالآتي :

$$\lim_{س \to 2} \left(\frac{س^2}{س - 2} - \frac{4}{س - 2} \right) = \lim_{س \to 2} \frac{(س - 2)(س + 2)}{(س - 2)}$$

$$= 4$$