دولة ليبيا
وزارة التعليم
مركز المناهج التعليمية والبحوث التربوية

الرياضيات

للسنة الثالثة من مرحلة التعليم الثانوي
القسم العلمي

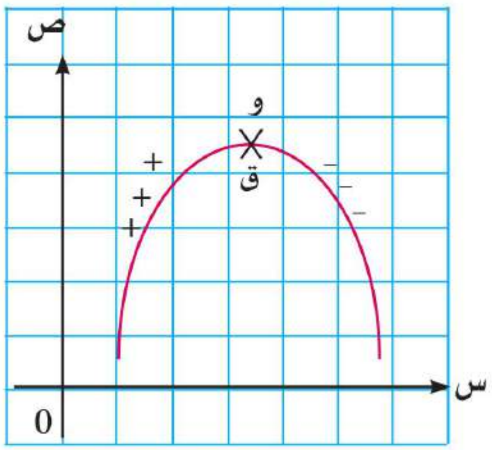
الدرس الثالث عشر

المدرسة الليبية بفرنسا ـ تور

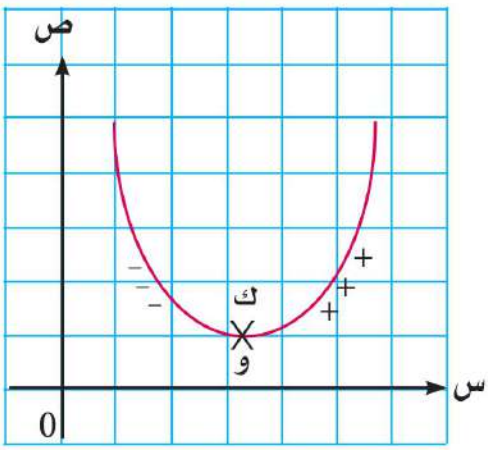
العام الدراسي
1441 / 1442 هـ - 2020 / 2021 م

3-4 النقط المحلية (الحرجة)

النقطة المحلية على منحنى تعرّف كنقطة على المنحنى حيث الميل يساوي صفرًا. إذا كان ص = د(س) تمثل معادلة منحنى، ق نقطة على المنحنى بحيث $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = 0$ عند ق، حينئذ تسمى ق نقطة محلية.



شكل 4-2

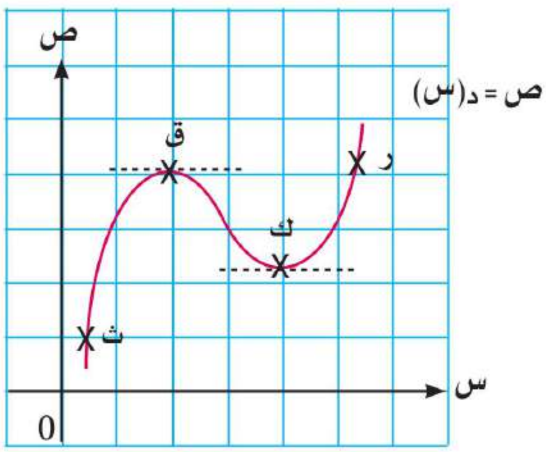


شكل 4-3

نقط الرجوع

في شكل 4-2 ق نقطة محلية على المنحنى المرسوم. يتغر ميل المنحنى من موجب إلى صفر إلى سالب كلما تتزايد س خلال النقطة ق، ينعطف المنحنى حول ق، لذلك تسمى ق نقطة رجوع لقيم المنحنى بجوار النقطة ق القيمة الأكبر موجودة عند ق، لذلك تسمى ق النقطة العظمى.

ك نقطة محلية على المنحنى الموضح في شكل 4-3 ميل المنحنى يتغير من سالب إلى صفر إلى موجب كلما تزداد س خلال النقطة ك.
كذلك ك أيضًا نقطة رجوع. لكن لقيمة المنحنى بجوار ك، أصغر قيمة توجد عند ك. كذلك تسمى ك نقطة صغرى.



شكل4-4

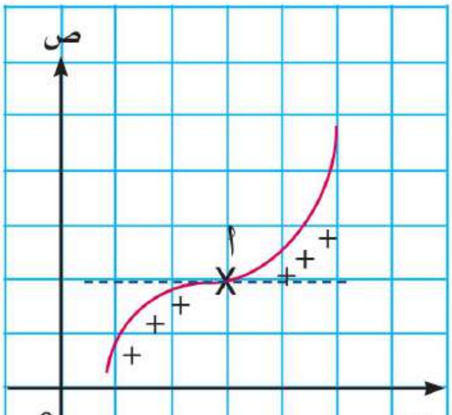
ق، ك نقطتان محليتان على المنحنى ص = د(س) كما هو موضح في شكل 4-4 ، ق نقطة عظمى. على كل حال هذا لايعنى بالضرورة أن قيمة الإحداثي الصادي عند ق عظمى على الإطلاق، حيث نرى أن قيمة الإحداثي الصادي عند ر، مثلا أكبر منه عند ق. إذن ق نقطة عظمى فقط لأجزاء المنحنى بجوار ق. بالمثل ك نقطة صغرى فقط لأجزاء المنحنى القريبة من ك. مرة أخرى، هذا ليس بالضرورة يعنى أن قيمة الإحداثي الصادي عند ك قيمة صغرى على الإطلاق، حيث ترى، مثلا أن قيمة الإحداثي الصادي عند ث أصغر منها عند النقطة ك.

باختصار، النقط العظمى أو الصغرى فقط ترتبط بالنقط بجوار نقط الرجوع المعينة. ما لم يذكر غير ذلك. فإن النقط العظمى و الصغرى شرحت بحيث تكون نقطًا عظمى وصغرى مرتبطة أو كلية وليست بالضرورة نقطًا عظمى وصغرى على إطلاقها على المنحنى.

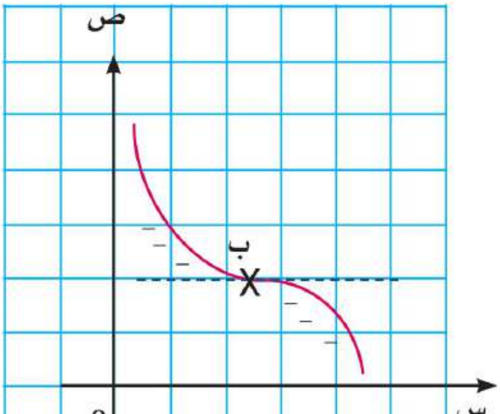
4-4 نقطة الإنقلاب:

النقطة أ نقطة محلية على المنحنى في شكل 4-5 يتغير الميل من موجب إلى صفر إلى موجب مرة أخرى حيث تزداد س حول أ.

النقطة ب نقطة محلية على المنحنى في شكل 4-6 يتغير الميل من سالب إلى صفر ثم إلى سالب مرة أخرى حيث تزداد س حول النقطة ب في كلتا الحالتين، بعد أن زادت س حول النقطة المحلية، فإن إشارة الميل تبقى من دون تغيير، لذلك فإن أ ، ب ليستا نقط رجوع، لكن يسميان نقطتي انقلاب. النمط الذي يتغير به ميل المنحنى كلما تزداد س حول نقطة معلومة محلية تحدد نوع النقطة المحلية فهي إما عظمى أو صغرى، أو نقطة انقلاب.



شكل 4-5



شكل 4-6

مثال 9:

إذا كان: $ص = س^3 - 2س^2 + س + 2$ ، فأوجد:

(أ) النقط المحلية على المنحنى. (ب) حدد إن كانت نقطًا عظمى أو صغرى.

الحل:

(أ) $ص = س^3 - 2س^2 + س + 2$

$\frac{ءص}{ءس} = 3س^2 - 4س + 1$

عند النقطة المحلية $\Leftarrow$ $\frac{ءص}{ءس} = 0$ المماس يوازي محور السينات

$\Leftarrow$ $3س^2 - 4س + 1 = 0$

$\Leftarrow$ $(3س - 1)(س - 1) = 0$ ومنها .... $س = \frac{1}{3}$ أو 1

بالتعويض بهذه القيم عن س في: $ص = س^3 - 2س^2 + س + 2$

عندما $س = \frac{1}{3}$ ، $ص = 2\frac{4}{27}$

عندما $س = 1$ ، $ص = 2$

النقط المحلية هي: $(\frac{1}{3}، 2\frac{4}{27})$، $(1، 2)$.

(ب) لتحديد نوع النقط المحلية $(\frac{1}{3} ، 2\frac{4}{27})$، $(1، 2)$. قم باستقصاء إشارات الميل عند كل نقطة قبل هذه النقطة مباشرة وبعدها.

عندما تساوي س قيمة أقل بقليل من $\frac{1}{3}$ (تكتب > $\frac{1}{3}$ قيمة أقل بقليل)، يكون $3س - 1$ سالبًا.

عندما تساوي س قيمة أقل قليلًا من $\frac{1}{3}$ ، فإن $س - 1$ يكون سالبًا.

$\therefore$ حاصل الضرب $(3س - 1)(س - 1)$ موجب.

عند $س = \frac{1}{3}$ ، $3س - 1 = 0$ ، $(3س - 1)(س - 1) = 0$

عندما تكون س أكبر قليلًا من $\frac{1}{3}$ (تكتب < $\frac{1}{3}$ قليلًا من س)، فإن $3س - 1$ يكون موجبًا.

عندما تكون س أكبر قليلاً من $\frac{1}{3}$ ، فإن $س - 1$ يكون سالبًا.

$\therefore$ حاصل الضرب $(3س - 1)(س - 1)$ يكون سالبًا.

بإعادة هذا بالنسبة للنقطة $(1 ، 2)$، ووضع النتائج في جدول، نجد أن:

س	قليلا > $\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	قليلا < $\frac{1}{3}$	قليلا > 1	1	قليلا < 1
$\frac{ءص}{ءس}$	+	0	−	−	0	+
شكل تخطيطي						
شكل تخطيطي						

يتغير الميل عند النقطة $(\frac{1}{3}، 2\frac{4}{27})$ من موجب إلى صفر إلى سالب.

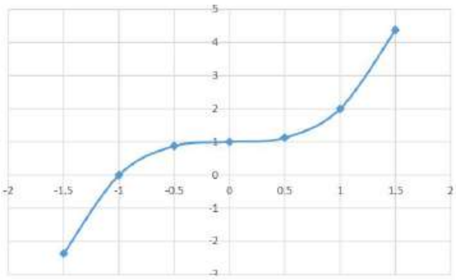
هذا يوضح أن $(\frac{1}{3}، 2\frac{4}{27})$ نقطة عظمى والرسم في الجدول السابق يعطي صورة واضحة عن النقطة العظمى.

يتغير الميل عند النقطة $(1، 2)$ من سالب إلى صفر ثم إلى موجب. هذا يوضح أن $(1، 2)$ نقطة صغرى، الرسم في الجدول السابق يوضح ذلك. إذن ، النقطة $(\frac{1}{3}، 2\frac{4}{27})$ نقطة عظمى وأن $(1، 2)$ نقطة صغرى على المنحنى.

مثال 10:

إذا علم أن المنحنى: $ص = س^3 + 1$ ، فأوجد النقطة المحلية عليه وحدد نوعها.

الحل:



شكل 4-7

$\because$ $ص = س^3 + 1$

$\frac{ءص}{ءس} = 3س^2$

♦ عند النقطة المحلية $\frac{ءص}{ءس} = 0$

♦ عند النقطة المحلية $3س^2 = 0 \Leftarrow س = 0$ ومنها ص $= 1$

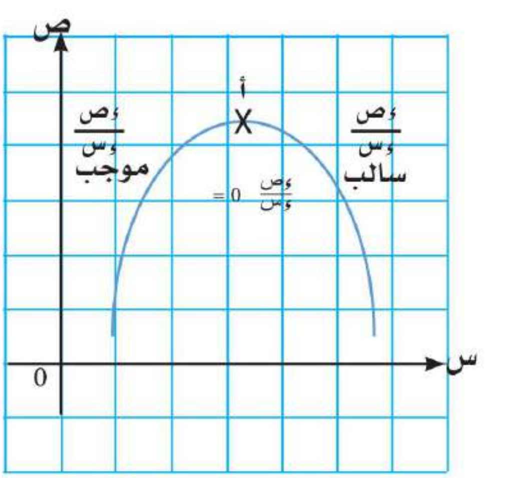
بوضع النتائج في جدول وتجميع أشكال المماسات والشكل البياني ، نجد أن :

س	$0 >$ قليلا	0	$0 >$ قليلا
$\frac{ءص}{ءس}$	+	0	+
شكل تخطيطي			
شكل تخطيطي			

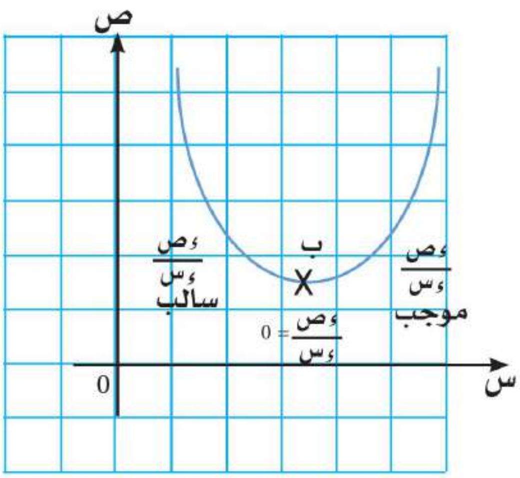
عند النقطة (0 ، 1) ، يتغير ميل المنحنى من موجب إلى صفر ثم إلى موجب مرة أخرى.
يوضح هذا أن النقطة (0 ، 1) نقطة انقلاب. (ليس للدالة نهاية عظمى ونهاية صغرى).

استخدم $\frac{ء^2ص}{ءس^2}$ في تمييز النقط العظمى والصغرى

في شكل (4-8)، أ نقطة محلية على المنحنى الموضح. حيث إن س تزداد حول أ ، والميل يتغير من موجب إلى صفر ثم إلى سالب. هذا معناه، أن $\frac{ءص}{ءس}$ يتناقص من موجب إلى صفر إلى سالب. بعبارة أخرى معدل تغير $\frac{ءص}{ءس}$ بالنسبة إلى س سالب.



شكل 4-8



شكل 4-9

بالرموز $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}\left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)=\frac{\text{ء}^2\text{ص}}{\text{ءس}^2}$ سالبًا

إذن النقطة حيث $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}=0$ ، $\frac{\text{ء}^2\text{ص}}{\text{ءس}^2}$ سالب تكون نقطة عظمى بمعنى $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$=- عند القيمة التى تنعدم عندها $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$

بالمثل في شكل 4-9 ، عند ب الميل يساوي صفرًا أي أن: $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}=0$ ، $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ يزداد من سالب إلى صفر ثم إلى موجب كلما تزداد س حول النقطة.

هنا معدل تغير $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ موجب أو $\frac{\text{ء}^2\text{ص}}{\text{ءس}^2}$ موجب. إذن النقطة التي عندها $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}=0$، $\frac{\text{ء}^2\text{ص}}{\text{ءس}^2}$ موجب هي نقطة صغرى.

على كل، الطريقة السابقة لتحديد النقط العظمى والصغرى تكون غير قاطعة عندما $\frac{\text{ء}^2\text{ص}}{\text{ءس}^2}=0$. في هذه الحالة، يمكن أن تكون النقطة نقطة انقلاب أو نقطة عظمى أو صغرى، لذلك يجب تحديد نوع النقطة بدراسة الميل كما أوضحنا في الأمثلة 9 و 10.

استخدام الميل لتحديد نوع النقط المحلية يسمى اختبار المشتقة الأولى.

استخدام $\frac{\text{ء}^2\text{ص}}{\text{ءس}^2}$ يسمى اختبار المشتقة الثانية .

مثال 11:

أوجد القيمة المحلية في الدالة ص = 2س^3 + 3س^2 - 12س - 12 وحدد إن كانت قيمًا عظمى أو صغرى.

الحل:

∵ ص = 2س^3 + 3س^2 - 12 س - 12

⇐ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = 6 س^2 + 6 س - 12

عند النقطة المحلية : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}=0$

لإيجاد القيمة المحلية : 6 س^2 + 6 س - 12 = 0

⇐ س^2 + س - 2 = 0

⇐ (س - 1) (س + 2) = 0

∴ س = 1 أو س = - 2

بالتعويض عن س = 1 في ص = 2س^3 + 3س^2 - 12س - 12، نجد أن ص = - 19

بالتعويض عن س = - 2 في ص = 2س^3 + 3س^2 - 12 س - 12، نجد أن ص = 8

أيضًا $\frac{\text{ء}^2\text{ص}}{\text{ءس}^2}$ = 12س + 6

عندما س = 1 ، ∴ $\frac{\text{ء}^2\text{ص}}{\text{ءس}^2}$

عند س = - 2 ، ∴ $\frac{\text{ء}^2\text{ص}}{\text{ءس}^2}$ سالب

عندما $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}=0$ ، س = 1 نجد أن $\frac{\text{ء}^2\text{ص}}{\text{ءس}^2}$ موجب يعني أن:

س = 1 تعطي قيمة صغرى لـ: ص أي يساوي - 19

عندما $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}=0$، س= -2، $\frac{\text{ء}^2\text{ص}}{\text{ءس}^2}$ سالب يعني أن س= -2

تعطي قيمة عظمى لـ : ص هي 8.

ملحوظة

في المنحني، عندنا نقط عظمى وصغرى. ولكن عند التعامل مع الدوال، نهتم بالقيمة المحلية والقيم العظمى والصغرى للدالة، هذا لأن شكل الدلة البياني لا نضمنه في الحل وبشكل عام تسمى القيم العظمى والصغرى أيضًا بالقيم المتطرفة.

مثال 12:

اثبت أن المنحنى ص = (س - 2)^4 لها نقطة عظمى عند س = 2. حدد إن كانت هذه النقطة المحلية نقطة عظمى أو نقطة صغرى أو نقطة انقلاب.

الحـل:

$\because$ ص = (س - 2)^4

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = 4 (س - 2)^3

عندما س = 2 $\therefore$ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = 0

س = 2 على المنحنى تعطي نقطة محلية

باكتشاف الميول عند النقطة حيث س = 2 ووضع النتائج في جدول نجد أن:

س	قليلا > 2	2	قليلا < 2
$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = 4 (س -2)^3	−	0	+
شكل المماس			
الشكل البياني			

قيمة $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ تتغير من سالب إلى صفر ثم إلى موجب حيث تزداد س حول النقطة حيث س = 2. هذا يوضح أن المنحنى له نقطة صغرى عند س = 2.

$\frac{\text{ء}^2\text{ص}}{\text{ءس}^2}$ = 12 (س - 2)^2 عندما س = 2، فإن:

لا نستطيع الحكم ندرس الميل عند س = 2

$\frac{\text{ء}^2\text{ص}}{\text{ءس}^2}$ = 0،

(i) س > 2 $\therefore$ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = $\boxed{-}$

(ii) س < 2 $\therefore$ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = $\boxed{+}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ **تغيرت من** $\boxed{-}$ **إلى** $\boxed{+}$ **تقعيرة المنحنى لأعلى**

للدالة نهاية صغرى عند (2 ، 0)