دولة ليبيا
وزارة التعليم
مركز المناهج التعليمية والبحوث التربوية

أسس الإحصاء

للسّنة الثّالِثة بمرحلة التّعليم الثانوي

(القسم العلمي)

الدرس الثالث عشر

المدرسة الليبية بفرنسا ـ تور

العام الدراسي

1441 / 1442 هـ - 2020 / 2021 م

(4–4): المعاينة من مجتمع يتبع التوزيع الطبيعي:

سندرس فيما يلي توزيع المعاينة للوسط الحسابي، عندما يكون المجتمع الذي سحبت منه العينات يتبع التوزيع الطبيعي، وذلك في حالتين:

(4–4–1) المجتمع يتوزع توزيعا طبيعيا بتباين σ^2 معلوم:

إذا كان لدينا مجتمع يتوزع توزيعا طبيعيا وسطه الحسابي μ وتباينه σ^2، وسحبنا منه كل العينات العشوائية الممكنة ذات الحجم **n**، فتوزيع المعاينة للوسط الحسابي للعينة $\overline{X}$ سيتوزع توزيعــاً طبيعيــاً بوسط حسابي قدره $\mu_{\overline{x}}$ ، وتباين قدره $\sigma_{\overline{x}}^2$، إذن:

$$z = \frac{\overline{x} - \mu_{\overline{x}}}{\sigma_{\overline{x}}}$$

ستتوزع توزيعا طبيعيًا معياريا، ويكون هذا صحيحًا بغض النظر عن حجم العينة كبيراً أم صغيراً.

ملاحظة:

يجب الانتباه هنا إلى أن المتغير الذي نحوله إلى المتغير المعياري **Z** هو المتغير $\bar{X}$ وبالتالي يجب أن نطرح منه وسطه الحسابي $\mu_{\bar{X}}$ ونقسم على انحرافه المعياري $\sigma_{\bar{X}}$

مثال (2-4)

إذا علمت أن أوزان مجتمع كبير جدا من الطلبة تتوزع توزيعًا طبيعيًا بوسط حسابي قدره **65** كيلو جرام وتباين قدره **25** فإذا سحبنا مع عدم الإرجاع من هذا المجتمع عينة بها **16** طالبًا، فما احتمال أن يكون الوسط الحسابي لأوزان هذه العينة أكبر من **67** كيلو جرام؟

الحل:

الاحتمال المطلوب: $P(\bar{X} > 67) =?$

في هذه الدراسة المتغير محل الدراسة X هو الوزن، وبما أن مجتمع الأوزان تتوزع توزيعًا طبيعيًا، إذن توزيع المعاينة للوسط الحسابي للعينة سيكون توزيعًا طبيعيًا بغض النظر عن حجم العينة، وسيكون متوسط هذا التوزيع وتباينه كما يلي:

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{25}{16} \quad , \quad \mu_{\bar{x}} = \mu = 65$$

عند حساب تباين توزيع المعاينة، لم نستخدم معامل التصحيح بالرغم من أن السحب تم مع عدم الإرجاع، لأن المجتمع كبير.

بما أن توزيع المعاينة توزيع طبيعي إذن لحساب الاحتمال المطلوب نحسب القيمة المعيارية المقابلة للقيمة $\bar{x} = 67$ وذلك كما يلي:

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_{\bar{x}}}{\sigma_{\bar{x}}} = \frac{67 - 65}{\sqrt{\frac{25}{16}}} = \frac{2 \times 4}{5} = 1.60$$

وبالتالي فإن:

$$P(\bar{X} > 67) = P(Z > 1.60) = 0.50 - 0.4452 = 0.0548$$

مثال (4-3):

إذا علمت أن درجات **100** طالباً في امتحان في مادة الإحصاء تتوزع توزيعاً طبيعياً بوسط حسابي قدره **70** وتباين قدره **9** ، فإذا سحبنا من هؤلاء الطلبة عينة عشوائية تشمل **25** طالباً حيث السحب تم مع عدم الإرجاع ، فما احتمال أن يكون الوسط الحسابي لهذه العينة أكبر من **71** ؟

الحل:

في هذا المثال يتكون المجتمع من كل الطلبة المشتركين في هذا الامتحان، أما المتغير العشوائي **X** محل الدراسة فهو درجة الطالب.

و المطلوب: $P(\bar{X} > 71) = ?$

بما أن المجتمع يتوزع توزيعاً طبيعياً، فإن توزيع المعاينة للوسط الحسابي للعينة سيتوزع هو الآخر توزيعاً طبيعياً بمتوسط حسابي وتباين قدرهما على التوالي كما يلي:

$$\mu_{\bar{X}} = \mu = 70$$

$$\sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{\sigma^2}{n} \times \frac{N - n}{N - 1} = \frac{9}{25} \times \frac{100 - 25}{100 - 1} = 0.2727$$

ملخص الفصل الرابع

علمنا أن الاحصاءة هي أي مقياس إحصائي نحسب قيمته من العينة المسحوبة من المجتمع محل الدراسة، وبما أن قيمة الاحصاءة تتغير من عينة عشوائية إلى أخرى، فهي متغير عشوائي، ولها توزيع احتمالي يطلق عليه توزيع المعاينة، وقد درسنا توزيع المعاينة للوسط الحسابي للعينة بإسهاب ووجدنا أن هناك علاقة تربط الوسط الحسابي وتباين توزيع المعاينة للوسط الحسابي للعينة مع الوسط الحسابي وتباين توزيع المعاينة للوسط الحسابي للعينة مع الوسط الحسابي وتباين المجتمع الذي سحبت منه العينات، حيث:

$$\mu_{\bar{x}} = \mu$$

في حالة السحب مع الإرجاع أو كان حجم المجتمع كبيرا: $\sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}$

في حالة السحب مع عدم الإرجاع وكان حجم المجتمع صغيرا:

$$\sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{\sigma^2}{n} \times \frac{N-n}{N-1}$$

وعرفنا أنه إذا كان توزيع المجتمع الذي سحبت منه العينات يتوزع توزيعاً طبيعياً بتباين معلوم، فإن توزيع المعاينة للوسط الحسابي للعينة سيتبع هو الآخر توزيعاً طبيعياً، أما إذا كان توزيع المجتمع ليس توزيعاً طبيعياً، فإن توزيع المعاينة للوسط الحسابي للعينة سيتوزع توزيعاً قريباً من التوزيع الطبيعي إذا كان حجم العينة كبيراً، أي $n \geq 30$ **(نظرية النهاية المركزية)**. ويكون المتغير العشوائي التالي:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_{\bar{X}}}{\sigma_{\bar{X}}}$$

يتوزع توزيعا قريباً من التوزيع الطبيعي المعياري.

وعندما يتوزع المجتمع توزيعاً طبيعياً بتباين مجهول، فنستعمل تباين العينة s^2 كتقدير لتباين المجتمع المجهول σ^2 ، ونحصل على المتغير العشوائي التالي:

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{s^2/n}}$$

وهذا المتغير يتبع توزيع $\mathbf{t}$ بدرجات حرية $(n-1)$.