دولة ليبيا
وزارة التعليم
مركز المناهج التعليمية والبحوث التربوية

الرياضيات

للسنة الثانية بمرحلة التعليم الثانوي
القسم العلمي

الاسبوع الرابع عشر

المدرسة الليبية بفرنسا ـ تور

العام الدراسي:
1441 / 1442 هـ . 2020 / 2021 م.

جميع الحقوق محفوظة لـ مركز المناهج التعليمية والبحوث التربوية ـ ليبيا

4 - 5 النهايات من الجهتين اليمنى واليسرى

للبحث عن نهاية د (س) عند نقطة أ والتي تتغير بجوارها قاعدة الدالة نتبع مايلي :

أولاً : نبحث وجود النهاية اليمنى للدالة عند أ وهي :

$$\lim_{س \to أ^+} د(س) = د(أ) \quad ، \quad س > أ$$

ثانياً : نبحث وجود النهاية اليسرى للدالة عند أ وهي :

$$\lim_{س \to أ^-} د(س) = د(أ) \quad ، \quad س < أ$$

فيكون لدينا الحالات الأتية :

1) إذا كان $د(أ^-) = د(أ^+) = ل$

2) $\lim_{س \to أ^-} د(س) = \lim_{س \to أ^+} د(س) = ل$

ملحوظة

لا يشترط لوجود د النهاية عند س = أ أن تكون دالة معرفة عند أ

إذا توفرت تلك الشروط تكون للدالة د(س) نهاية بمعنى إذا تتساوى النهايتان اليمنى واليسرى للدالة تكون للدالة نهاية عند س = أ

مثال 23 :

$$\text{إذا كانت } د(س) = \begin{cases} 3 & ، \ س \leq 0 \\ 3 - س & ، \ س > 0 \end{cases}$$

فابحث وجود نهاية الدالة عند س = 0

الحل

$$\lim_{س \to 0^-} د(س) = \lim_{س \to 0^-} (3 - س) \ ،$$

$$\therefore \lim_{س \to 0^-} د(س) = 3$$

$$\lim_{س \to 0^+} د(س) = 3$$

$$\therefore \lim_{س \to 0^-} د(س) = \lim_{س \to 0^+} د(س)$$

جميع الحقوق محفوظة لـ مركز المناهج التعليمية والبحوث التربوية ـ ليبيا

مثال 24 :

أوجد نهاية الدالة د(س) عند النقطة المبينة إن وجدت :

$$\text{د(س)} = \begin{cases} 4\text{س} - 5 & ، \quad \text{س} > 3 \\ \dfrac{\text{س}^2 + \text{س} - 12}{\text{س} - 3} & ، \quad \text{س} < 3 \end{cases} \qquad \text{عند س} = 3$$

الحل :

$$\text{نهـــا}_{\text{س} \to 3^+} \text{د(س)} = \text{نهـــا}_{\text{س} \to 3^+} \frac{\text{س}^2 + \text{س} - 12}{\text{س} - 3}$$

$$= \text{نهـــا}_{\text{س} \to 3^+} \frac{(\text{س} - 3)(\text{س} + 4)}{\text{س} - 3} \qquad \text{لاحظ أن س} = 3 \text{ ليست في نطاق الدالة}$$

$$= \text{نهـــا}_{\text{س} \to 3^+} (\text{س} + 4)$$

$$= 4 + 3$$

$$= 7$$

$$\text{نهـــا}_{\text{س} \to 3^-} \text{د(س)} = \text{نهـــا}_{\text{س} \to 3^-} (4\text{س} - 5) \quad ،$$

$$= 4 \times 3 - 5$$

$$= 12 - 5$$

$$= 7$$

$$\therefore \text{نهـــا}_{\text{س} \to 3^-} \text{د(س)} = \text{نهـــا}_{\text{س} \to 3^+} \text{د(س)}$$

$\therefore$ للدالة وجود عند س $= 3$

مثال 25:

ابحث نهاية الدالة د (س) $= \dfrac{|\text{س} + 2|}{\text{س} + 2} + 5$ عند س $= -2$

الحل

$$\because |\text{س} + 2| = \begin{cases} (\text{س} + 2) & ، \quad \text{س} \geq -2 \\ -(\text{س} + 2) & ، \quad \text{س} < -2 \end{cases}$$

نعبر عن د(س) دون استحدام رمز القيمة المطلقة

جميع الحقوق محفوظة لـ مركز المناهج التعليمية والبحوث التربوية ـ ليبيا

$$\therefore \text{د}(س) = \begin{cases} 6 & ، \ س \leq -2 \\ 4 & ، \ س > -2 \end{cases}$$

نهـــا د(س) = نهـــا (4) = 4
س←-2 س←-2

، نهـــا د(س) = نهـــا (6) = 6
س←+2 س←+2

∴ النهاية ليس لها وجود

مثال 26:

إذا كان د (س) = $\begin{cases} س - ل & ، \ س > 3 \\ م س^{2} - 4 & ، \ س < 3 \end{cases}$

عين الثابتين ل ، م إذا كان نهـــا د(س) = 5
س←3

الحل

∵ نهـــا (س - ل) = 5 ⇐ 3 - ل = 5 ∴ ل = -2
س←-3

، نهـــا (م س^{2} - 4) = 5 ⇐ م (3)^{2} - 4 = 5
س←+3

⇐ 9 م = 9

∴ م = 1

جميع الحقوق محفوظة لـ مركز المناهج التعليمية والبحوث التربوية ـ ليبيا