دولة ليبيا
وزارة التعليم
مركز المناهج التعليمية والبحوث التربوية

الرياضيات

للسنة الثالثة من مرحلة التعليم الثانوي
القسم العلمي

الاسبوع الرابع عشر

المدرسة الليبية بفرنسا ـ تور

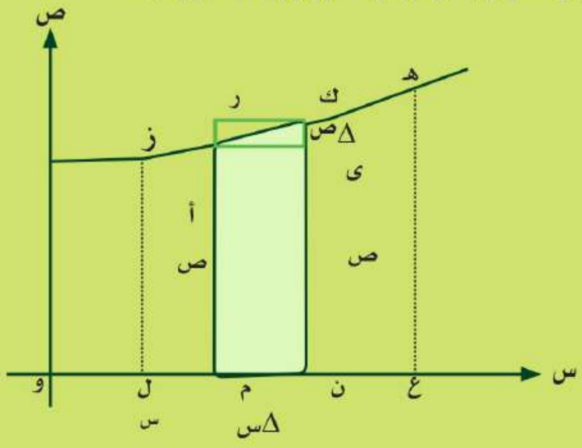
العام الدراسي
1441 / 1442 هـ - 2020 / 2021 م

تطبيقات على التكامل
Applications of Integration

5-1 المساحة بين منحنى ومحور السينات

يُوضح شكل 5-1 (أ) جزءًا من منحنى ص = د(س). مطلوب إيجاد المساحة المحاطة بالمنحنى ز هـ، المحور س والمستقيمين ل ز ، ع هـ. نفرض أن ق (س،ص) نقطة متغيرة تقع على المنحنى بين ز، هـ، وأن مساحة ل م ق ز تساوي أ.

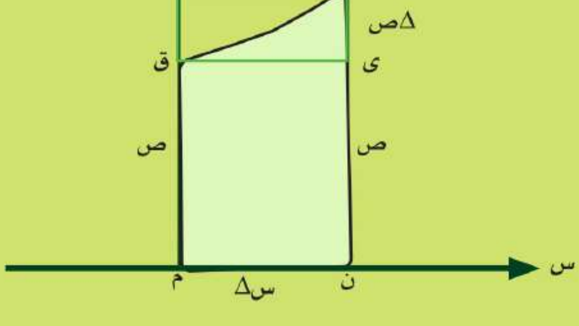
إذا تحركت نقطة ق على المنحنى إلى نقطة ك هي (س+ Δس، ص + Δص)، وأن Δس ،Δص كميات صغيرة للمتغيرين س ، ص على الترتيب. ق ى، ر ك يوازيان المحور س .



شكل 5 -1 (أ)

أثناء الحركة من ق إلى ك فإن المستقيم ق م يمسح المساحة ق ك ن م.

انظر شكل 5-1(ب). نفرض هذه المساحة Δ أ .



شكل 5 -1 (ب)

المستطيل ق ى ن م < Δ أ،

Δ أ < المستطيل ر ك ن م

لذلك، المستطيل ق ى ن م < Δ أ < المستطيل ر ك ن م .

جميع الحقوق محفوظة لـ مركز المناهج التعليمية والبحوث التربوية ـ ليبيا

$$\Leftarrow \quad \text{ص}\ \Delta\text{س} < \Delta\text{أ} < (\text{ص} + \Delta\text{ص})\ \Delta\text{س}$$

بالقسمة على Δس :

$$\text{ص} < \frac{\Delta\text{أ}}{\Delta\text{س}} < \text{ص} + \Delta\text{ص}$$

نفرض Δس $\leftarrow$ 0، إذن، Δص $\leftarrow$ 0، ص + Δص $\leftarrow$ ص

الآن $\frac{\Delta\text{أ}}{\Delta\text{س}}$ تقع بين ص، ص + Δص

$$\therefore \quad \text{نهـا}\ \frac{\Delta\text{أ}}{\Delta\text{س}} = \frac{\text{ءأ}}{\text{ءس}} = \text{ص}$$

$$\frac{\text{ءأ}}{\text{ءس}} = \text{ص}$$

تكامل بالنسبة إلى س

$$\text{أ} = \int \text{ص ء س}$$

$$\text{ص} = \text{د(س)}، \qquad \therefore \quad \text{أ} = \int \text{د(س) ء س}$$

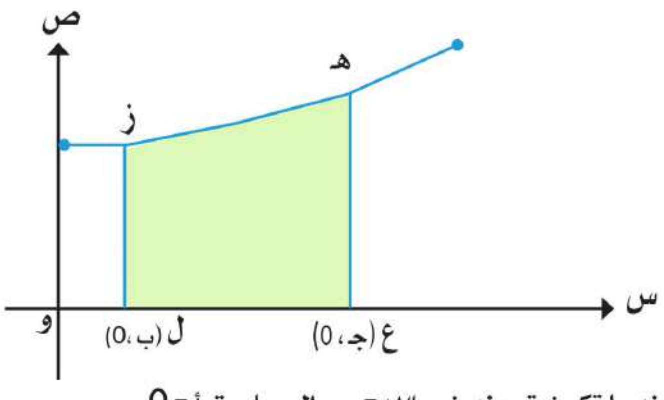
نفرض :

$$\int \text{د(س) ء س} = \text{ذ(س)} + \text{ث} \quad \text{(حيث ث ثابت)}$$

$$\text{أ} = \text{ذ(س)} + \text{ث} \quad \cdots\cdots\cdots \longrightarrow (1)$$

الآن عبرنا عن المساحة أ كدالة لـ س في (1)

نفرض الإحداثي س لكل من النقطتين ز، هـ هي ب، جـ على الترتيب لاحظ شكل 5-1 (جـ).
لكي توجد مساحة ل ع هـ ز، نفرض م ق يمسح من ل ز إلى ع هـ.



شكل 5-1 (جـ)

عندما تكون ق عند ز، س = ب ، المساحة أ = 0

باستخدام (1) نجد أن 0 = ذ(ب) + ث $\Leftarrow$ ث = − ذ(ب)

بالتعويض عن هذا في (1).

$$\text{أ} = \text{ذ(س)} - \text{ذ(ب)} \quad \cdots\cdots\cdots \longrightarrow (2)$$

هذا يعطي مساحة ل م ق ز ، أي أن المساحة الممسوحة عندما يتحرك م ق من ل ز إلى م ق. لاحظ شكل 5-1 (أ).

للحصول على مساحة ل ع هـ ز ، نفرض م ق يتحرك من ل ز إلى ع هـ.

جميع الحقوق محفوظة لـ مركز المناهج التعليمية والبحوث التربوية ـ ليبيا

بالتعويض عن س بالقيمة جـ في (2)،

نجد أن : أ = ذ(جـ) − ذ(ب)

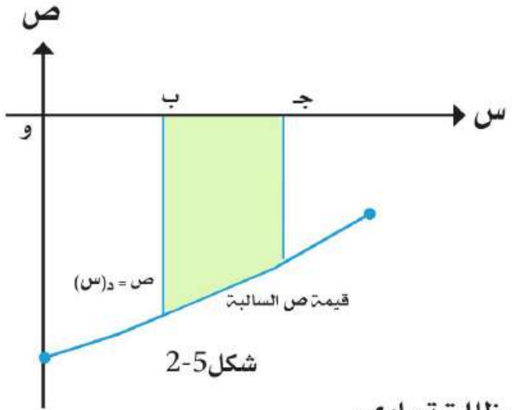
هذا يمكن أن يُعبَّر عنه كتكامل محدود

$$أ = \int_{ب}^{جـ} د(س)\, ء س = [ذ(س)]_{ب}^{جـ}$$

$$= ذ(جـ) - ذ(ب)$$

على هذا فالتكامل المحدد يعطي المساحة تحت المنحنى بين الحدين المعلومين

يوضح شكل 5-2 المنطقة المظللة بين منحنى ص= د (س) محور س والمستقيمين س = ب، س = جـ



شكل5-2

مساحة المنطقة المظللة تساوي:

$$\int_{ب}^{جـ} د(س)\, ء س$$

ولكن د(س) سالبة في جزء المنحنى الموضح، حيث إن هذا الجزء تحت محور س حيث الإحداثي الصادى سالب.

$$\therefore \int_{ب}^{جـ} د(س)\, ء(س)$$ سوف يتحول إلى سالب

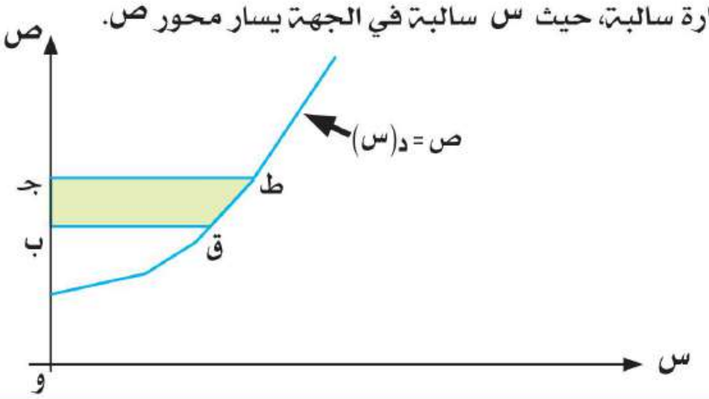
على كل حال هذه هي النتيجة الوحيدة لقيمة د(س) السالبة هنا. المساحات يجب أن تكون موجبة، أية إجابة لأية مساحة يجب أن تعطى كقيمة موجبة

5-2 المساحة بين منحنى ومحور الصادات:

مساحة المنطقة المظللة أ الموضحة في شكل 5-3 يمكن الحصول عليها بطريقة مماثلة للطريقة الموضحة في الجزء 5-1 . لكن المساحة أ هنا تحت مستقيم يوازي محور س. يمكن أن يتضح لنا أن :

$$أ = \int_{ب}^{جـ} س\, ء ص$$

لحساب المساحة أ ، يجب أن يُعبَّر عن س بدلالة ص ليمكن إجراء التكامل. إشارة المساحة هنا موجبة. إذا كانت المساحة جهة اليسار من محور ص، سوف تكون الإشارة سالبة، حيث س سالبة في الجهة يسار محور ص.



شكل 5-3

جميع الحقوق محفوظة لـ مركز المناهج التعليمية والبحوث التربوية ـ ليبيا

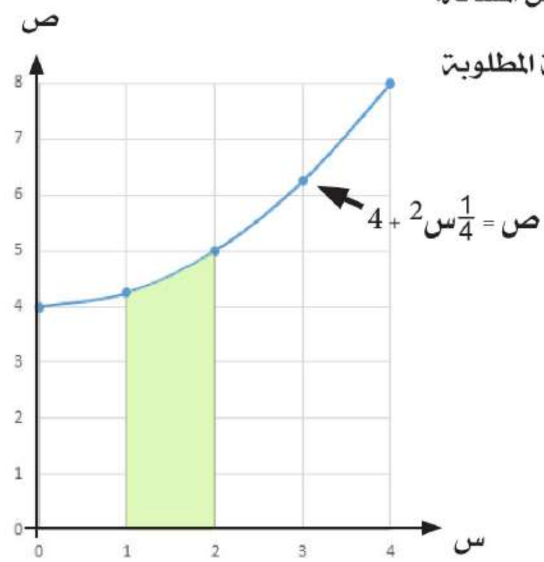
مثال 1:

أوجد مساحة المنطقة المحاطة بالمنحنى $ص = \frac{1}{4} س^2 + 4$، محور س، المستقيمان $س = 1$، $س = 2$

الحل:

الشكل مفيد جدًا، وفي معظم الحالات يساعد في حل المسألة.

يوضح شكل 4-5 المنحنى والجزء المظلل للمساحة المطلوبة



شكل 4-5

المساحة المطلوبة $= \int_1^2 \left(\frac{1}{4} س^2 + 4\right) ءس$

$= \left[\frac{س^3}{12} + 4س\right]_1^2$

$= \left(\frac{8}{12} + 8\right) - \left(\frac{1}{12} + 4\right)$

$= 4\frac{7}{12}$ وحدة مربعة.

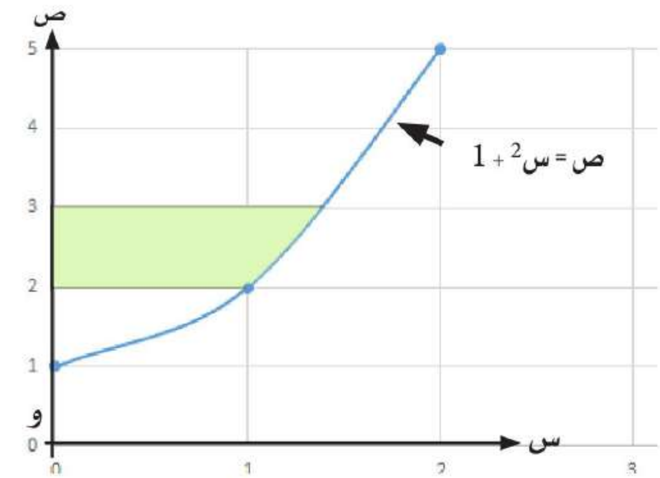
جميع الحقوق محفوظة لـ مركز المناهج التعليمية والبحوث التربوية - ليبيا

مثال 2 :

احسب مساحة المنطقة المحاطة بالمنحنى ص= $س^2 + 1$، محور ص والمستقيمين ص = 2، ص = 3 للجزء في الربع الأول فقط.

الحل:

المنطقة المطلوبة هي المنطقة المظللة كما هو موضح في شكل.5-5



شكل5 -5

$$ص = س^2 + 1$$

$$س^2 = (ص - 1)$$

$$س = (ص - 1)^{\frac{1}{2}}$$

المساحة المطلوبة تساوي $\int_{2}^{3} س \, ء ص$

$$= \int_{2}^{3} (ص - 1)^{\frac{1}{2}} \, ء ص$$

$$= \frac{2}{3} (ص - 1)^{\frac{3}{2}} \Big|_{2}^{3}$$

$$= \frac{2}{3} (2\sqrt{2} - 1)$$

المساحة المطلوبة تساوي $\frac{2}{3}(2\sqrt{2} - 1)$ وحدة مربعة.

جميع الحقوق محفوظة لـ مركز المناهج التعليمية والبحوث التربوية - ليبيا

مثال 3:

أوجد مساحة المنطقة المحاطة بالمنحنى: ص = س (س – 1) (س + 3) ومحور س.

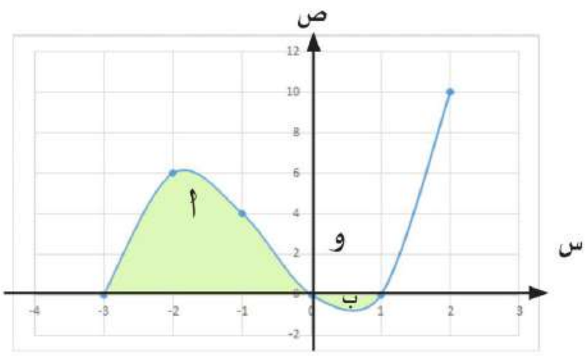
الحل:

المنطقة المطلوبة هي المنطقة المظللة في شكل 5-6

ص = س (س – 1) (س + 3)

= س (س² + 2س – 3)

= س³ + 2س² – 3س



شكل 5-6

المنحنى يقطع محور س عند نقطة الأصل. إذن نوجد المساحتان أ، ب كل على حدة

$$أ = \int_{-3}^{0} ص \, ءس = \int_{-3}^{0} (س^3 + 2س^2 - 3س) \, ءس$$

$$= \left[\frac{س^4}{4} + \frac{2س^3}{3} - \frac{3س^2}{2} \right]_{-3}^{0}$$

$$= 0 - \left(\frac{81}{4} - 18 - \frac{27}{2} \right)$$

$= 11\frac{1}{4}$ وحدة مربعة

$$ب = \int_{0}^{1} ص \, ءس = \int_{0}^{1} (س^3 + 2س^2 - 3س) \, ءس$$

$$= \left[\frac{س^4}{4} + \frac{2س^3}{3} - \frac{3س^2}{2} \right]_{0}^{1}$$

$$0 - \left(\frac{3}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \right) =$$

$$= \left| \frac{-7}{12} \right|$$

مساحة المنطقة ب $= \frac{7}{12}$ وحدة مربعة

المساحة الكلية تساوي $11\frac{1}{4} + \frac{7}{12} = 11\frac{5}{6}$ وحدة مربعة

ملحوظة

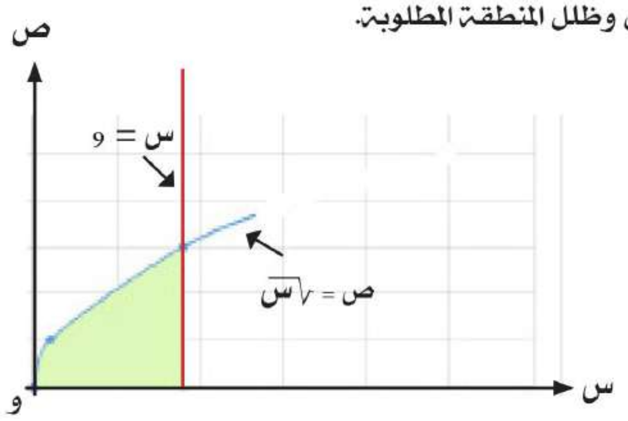
عند إيجاد مساحة المنطقة المحاطة بالمنحنى، محور س (أو محور ص) لأجزاء معينة من المنحنى، يجب أن تحدد أولاً أن هذا الجزء من منحنى يقطع المحور السيني (أو الصادي المعني). يجب حينئذٍ أن تقسم المنطقة المعينة إلى جزأين أو أكثر عند نقط تقاطع المنحنى مع المحور لإيجاد مساحات الأجزاء المنفصلة، ثم جمع القيم العددية لهذه المساحات. هذا المجموع سوف يمثل المساحة المحاطة بالمنحنى والمحور المعني.

جميع الحقوق محفوظة لـ مركز المناهج التعليمية والبحوث التربوية ـ ليبيا

مثال 4:

أوجد مساحة المنطقة المحاطة بالمنحنى ص = $\sqrt{س}$ ، ومحور السينات والمستقيم:

س = 9 ، ارسم الشكل وظلل المنطقة المطلوبة.



شكل5 -7

الحل:

ص = $\sqrt{س}$ ، س = 9

المساحة = $\int_{0}^{9}$ ص ء س

المساحة المطلوبة =

$\int_{0}^{9} \sqrt{س}$ ء س

= $\frac{2}{3}$ س$^{\frac{3}{2}}$ $|_{0}^{9}$

= $\frac{2}{3}(\sqrt{9})^{3} - \frac{2}{3}(0)$

= 18 وحدة مربعة

مثال 5:

من الشكل 5-8 أوجد المساحة المظللة

الحل:

نرسم المساحة المظللة ثم نسقط عمود على محور السينات من النقطة (2 ، 4)

فنحصل على مساحتين لدينا

أ = $\int_{0}^{2}$ ص$_1$ ء س ، ب = $\int_{2}^{4}$ ص$_2$ ء س

أ = $\int_{0}^{2}$ س^2 ء س ، ∴ أ = $\frac{س^3}{3} = \frac{8}{3}$ وحدة مربعة

نوجد ص$_2$ بدلالة س من معادلة المستقيم المار بالنقطتين (4 ، 0) ، (2 ، 4)

فيكون ص = -2س + 8

ب = $\int_{2}^{4}$ (-2س + 8) ء س

= (-س^2 + 8 س)

ب = (-16 + 32) − (-4 + 16)

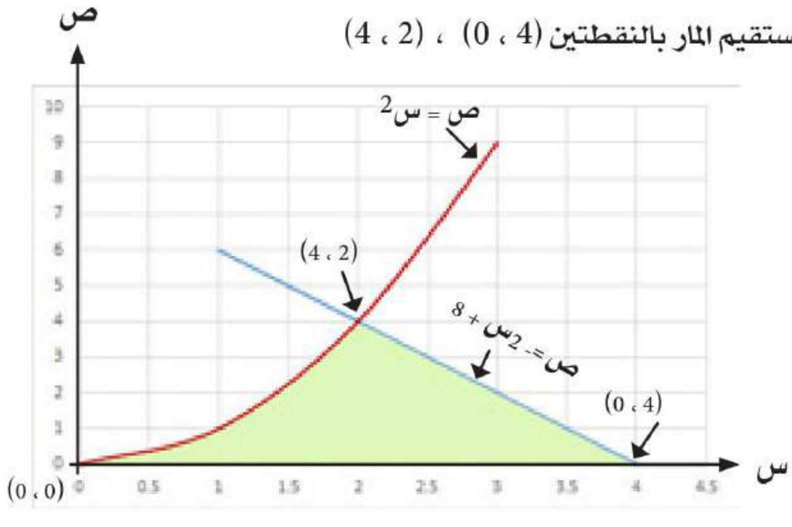
= 16 − 12

∴ ب = 4 وحدة مربعة

∴ المساحة المطلوبة = أ + ب

= $\frac{8}{3}$ + 4

= $\frac{20}{3}$ وحدة مربعة



شكل5 -8

جميع الحقوق محفوظة لـ مركز المناهج التعليمية والبحوث التربوية ـ ليبيا