دولة ليبيا
وزارة التعليم
مركز المناهج التعليمية والبحوث التربوية

# أسس الإحصاء

للسّنة الثّالِثة بمرحلة التّعليم الثانوي
( القسم العلمي )

## الاسبوع الرابع عشر

المدرسة الليبية بفرنسا - تور

# الفصل الخامس
# التقدير الإحصائي

## (5-1) مقدمـــــــــة:

في أغلب الدراسات لا نستطيع معرفة القيمة الحقيقية لمعلمة المجتمع محل البحث، وذلك لأنه لكي نحسب قيمة معلمة يجب أن يكون لدينا بيانات عن كل مفردات المجتمع دون استثناء، ولكن في أغلب الدراسات لا يمكننا جمع بيانات عن كل مفردات المجتمع. فمن أهم المواضيع التي يهتم بها الاستنتاج الإحصائي هي كيفية تقدير معالم المجتمع المجهولة (المعالم المجهولة للتوزيعات الاحتمالية)، مثل الوسط الحسابي للمجتمع أو تباين المجتمع أو أي مقياس إحصائي آخر خاص بالمجتمع، باستخدام بيانات نتحصل عليها عينة عشوائية مسحوبة من ذلك المجتمع.

## (5-2) أنواع التقدير:

يوجد نوعان من التقدير الإحصائي للمعالم المجهولة هما:

1. **التقدير بقيمة.**
2. **التقدير بفتـرة.**

وسنقوم بعرض كل منهما فيما يلي.

### (5-2-1) التقدير بقيمة:

المقصود بهذا النوع من التقدير هو تقدير معلمة المجتمع المجهولة بإحصاءة نحسب قيمتها من بيانات عينة عشوائية مسحوبة من هذا المجتمع، أي نقوم بتقدير المعلمة بقيمة واحدة فقط تحسب من العينة ولذلك يسمى التقدير بقيمة، فمثلا نقدر الوسط الحسابي للمجتمع $\mu$ بالوسط الحسابي للعينة $\overline{X}$، ونقدر تباين المجتمع $\sigma^2$ بتباين العينة $S^2$ وهكذا ...

**مثال (5-1) :**

إذا سحبنا عينة عشوائية تشمل **10** عائلات من العائلات القاطنة في مدينة ما، وكان الإنفاق الشهري بالدينار لكل عائلة من هذه العائلات كما يلي:

**120 ، 165 ، 263 ، 252 ، 175 ، 168 ، 232 ، 255 ، 200 ، 240**

باستخدام بيانات هذه العينة قدِّر الوسط الحسابي للإنفاق الشهري لكل العائلات القاطنة في هذه مدينة.

**الحل:**

في هذه الدراسة نجد أن، المجتمع هو كل العائلات القاطنة في هذه مدينة، والمطلوب تقدير الوسط الحسابي لإنفاق هذه العائلات، أي المطلوب تقدير الوسط الحسابي للمجتمع $\mu$. فنستطيع تقدير المعلمة المجهولة وهي الوسط الحسابي للمجتمع **بقيمة واحدة** تحسب من العينة وهي الوسط الحسابي للعينة $\overline{X}$ حيث:

$$\overline{X} = \frac{\sum x}{n} = \frac{2070}{10} = 207$$

إذن نقدر الوسط الحسابي للإنفاق الشهري للعائلات القاطنة في هذه مدينة بالقيمة **207** دينار، وهذه القيمة ليست هي القيمة الحقيقية للوسط الحسابي للمجتمع وإنما هي تقدير لهذا الوسط، ونرمز للقيمة المقدّرة للوسط الحسابي للمجتمع بالرمز $\hat{\mu}$ أي أن :

$$\hat{\mu} = 207$$

الإشارة **^** تعنى في علم الإحصاء القيمة المقدَّرة.

وأحيانا نجد أكثر من إحصاءة يمكن استخدام قيمتها كتقدير للمعلمة المجهولة، لذلك توجد معايير تساعدنا على اختيار الإحصاءة التي تعتبر أفضل من غيرها لتقدير المعلمة المجهولة، أي توجد خصائص يجب أن تتوفر في المقدَّر حتى يكون مقدِّرا جيدا، ولكن لن نتعرض لها في هذا الكتاب.

## (5-2-2) التقدير بفترة:

بدلا من تحديد قيمة واحدة تستخدم لتقدير المعلمة المجهولة، فإننا في هذا النوع من التقدير نحدد فترة معينة تقع فيها المعلمة المجهولة، فمثلا إذا رمزنا للمعلمة المجهولة بالرمز $\theta$ حيث $\theta$ قد تكون الوسط الحسابي $\mu$ أو التباين $\sigma^2$ أو النسبة P أو أي مقياس إحصائي آخر خاص بالمجتمع ، فإننا نحدد فترة تقع فيها هذه المعلمة كما يلي :

$$\hat{\theta} - E \leq \theta \leq \hat{\theta} + E$$

**حيث:**

$\hat{\theta}$ **:** الإحصاءة المستخدمة كأفضل مقدِّر بالقيمة.

**E :** قيمة نعتمد في حسابها على بيانات العينة وحجم العينة ومستوى الثقة في التقدير.

وتسمى هذه الفترة بفترة الثقة للمعلمة $\theta$ ويسمى المقدار $(\hat{\theta} - E)$ بالحد الأدنى لفترة الثقة والمقدار $(\hat{\theta} + E)$ بالحد الأعلى لفترة الثقة .

وإذا كان معامل الثقة $(1 - \alpha)$ حيث $0 < \alpha < 1$ فيعنى ذلك أن :

$$p(\hat{\theta} - E \leq \theta \leq \hat{\theta} + E) = 1 - \alpha$$

والمقصود بذلك أن احتمال احتواء الفترة $(\hat{\theta} - E \text{ و } \hat{\theta} + E)$ على المعلمة المجهولة $\theta$ هو **$(1-\alpha)$** .

فمثلا إذا كان **$1 - \alpha = 0.95$** فيعنى ذلك أنه إذا سحبنا كل العينات العشوائية من المجتمع (أو عددا كبيرا جدا من العينات العشوائية من المجتمع) وحسبنا لكل عينة فترة الثقة، فسنجد أن **95%** من هذه الفترات تحتوى على المعلمة المجهولة $\theta$ وأن **5%** من الفترات لا تحتوى على $\theta$ وتسمى النسبة **95%** **بمستوى الثقة** .

وسنقوم فيما يلي باستعراض كيفية حساب فترة الثقة للوسط الحسابي للمجتمع.

## (3-5) فترة الثقة للوسط الحسابي للمجتمع $\mu$ :

### (5-3-1) عندما يكون تباين المجتمع $\sigma^2$ معلوما:

علمنا من دراستنا السابقة وفقا لنظرية النهاية المركزية، أنه إذا كان لدينا مجتمع وسطه $\mu$ وتباينه $\sigma^2$ (ليس من الضروري أن يكون توزيعه توزيعا طبيعيا) ، وسحبنا منه كل العينات العشوائية الممكنة ذات الحجم $n$ بحيث $n$ تكون كبيرة بما فيه الكفاية $(n > 30)$ فإن توزيع المعاينة للوسط الحسابي للعينة $\overline{X}$ سيكون قريبا من التوزيع الطبيعي بوسط حسابي وتباين قدرهما :

$$\sigma_{\overline{x}}^2 = \frac{\sigma^2}{n} \quad ، \mu_{\overline{X}} = \mu$$

أما إذا كان المجتمع يتوزع توزيعا طبيعيا، فإن توزيع المعاينة للوسط الحسابي للعينة $\overline{X}$ سيكون توزيعا طبيعيا، وذلك سواء كان حجم العينة $n$ صغيرا أو كبيرا، وفي هذه الحالات المذكورة نستطيع تحويل $\overline{X}$ إلى المتغير المعياري $Z$ حيث:

$$\boxed{Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sqrt{\sigma^2 | n}}}$$

ويكون توزيع المتغير $Z$ طبيعيا معياريا.

فمثلا نستطيع من جدول (م.1) الحصول على قيمة $Z$ التي على يمينها مساحة قدرها **0.025**، وبالتالي المساحة بينها وبين الصفر تساوى **0.4750** فسنجدها مقابلة للقيمة **1.96**، كذلك نستطيع الحصول على القيمة التي على يسارها في المساحة **0.025**، فسنجدها مقابلة للقيمة **1.96−**، ونلاحظ أن القيمة المطلقة للقيمتين متساوية والاختلاف بين القيمتين في الإشارة فقط، وبصفة عامة في حـالة التوزيع الطبيعي المعياري إذا كانت لدينا قيمتان متساويتان في القيمة المطلقة ومختلفتان في الإشارة

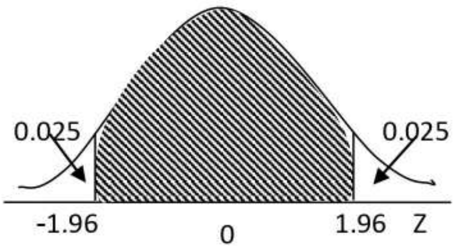
فقط، فستكون المساحة التي على يمين القيمة الموجبة تساوى المساحة التي على يسار القيمة السالبة ، لأن المنحنى الطبيعي المعياري متماثل.

وبما أن المساحة على يمين القيمة **1.96** تساوي **0.025** والمساحة على يسار القيمة **1.96−** تساوي **0.025** ، إذن المساحة بين القيمتين ستكون :

$$1-(0.025+0.025)=0.95$$

وشكل **(5−1)** يوضح ذلك، وحيث أن المساحة تحت المنحنى الاحتمالي هي عبارة عن احتمالات، فيعنى ذلك أن احتمال أن يأخذ المتغير ***Z*** قيمة محصورة بين القيمتين **1.96−** و **1.96** يساوى **0.95** ونعبر عن ذلك كما يلي :

$$P(-1.96\le Z\le 1.96)=0.95$$




**شكل (5−1)**

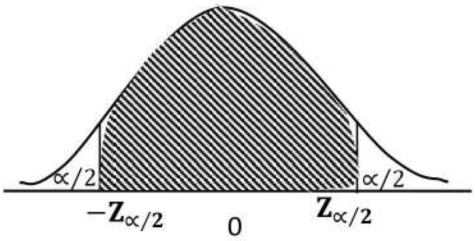
إذن نستطيع التعبير عن الاحتمال السابق كما يلي:

$$P\left(-1.96\le \frac{\overline{X}-\mu}{\sqrt{\sigma^2|n}}\le 1.96\right)=0.95$$

وبصفة عامة إذا رمزنا للمساحة **0.95** بالرمز **α –1** وبالتالي ستكون المساحة **0.025** مساوية للمساحة **α/2** وتكون القيمة **1.96** هي قيمة **Z** التي على يمينها مساحة **α/2** ونرمز لهذه القيمة بالرمز $Z\alpha_{/2}$، بالطبع سنرمز للقيمة **1.96−** بالرمز ، $-Z\alpha_{/2}$ وهكذا نستطيع التعبير عن الاحتمال السابق بصفة عامة كما يلي :

$$\boxed{P(-Z\propto_{/2}\le \frac{\overline{X}-\mu}{\sqrt{\sigma^2|n}}\le Z\propto_{/2})=1-\alpha}$$

وشكل (5−2) يوضح ذلك.




**شكل (5−2)**

وبإجراء بعض العمليات الجبرية على الحدود الثلاثة للمتباينة الموجودة بين القوسين بحيث نجعل الحد الأوسط للمتباينة يحتوي على المعلمة المجهولة $\mu$ فقط ، نحصل على :

$$P\left( \overline{X} - Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\sigma^2|n} \le \mu \le \overline{X} + Z_{\alpha/2}\sqrt{\sigma^2/n} \right) = 1 - \alpha$$

ويعنى ذلك أن احتمال وقوع الوسط الحسابي للمجتمع $\mu$ (المجهول) بين القيمة $(\overline{X} - Z_{\alpha/2}\sqrt{\sigma^2|n})$ والقيمة $(\overline{X} + Z_{\alpha/2}\sqrt{\sigma^2|n})$ يساوى **(1−α)** .

- ويسمى المقدار $\overline{X} - Z_{\propto/2}\sqrt{\sigma^2|n}$ بالحد الأدنى لفترة الثقة .
- ويسمى المقدار $\overline{X} + Z_{\propto/2}\sqrt{\sigma^2|n}$ بالحد الأعلى لفترة الثقـة .

أما الاحتمال **(1−α)** فيسمى معامل الثقة وعادة نعبر عنه بنسبة مئوية، أي يكتب **100% (1−α)** ويسمى مستوى الثقة، وقد تكون أية نسبة ولكن النسب الدارجة الاستعمال **90%**، **95%**، **99%** .

وبالتالي فإن فترة الثقة للوسط الحسابي للمجتمع $\mu$ عندما يكون تباين المجتمع معلوما وعند مستوى ثقة **100%(α − 1) هي :**

| |
|---|
| $\overline{X} - Z_{\alpha/2}\sqrt{\sigma^2\|n}$ ، $\overline{X} + Z_{\alpha/2}\sqrt{\sigma^2\|n}$ |

**مثال )2-5( :**

إذا علمت أن تباين أوزان كل الطلبة المسجلين في إحدى الجامعات في سنة معينة يساوى **144**، وسحبنا من هؤلاء الطلبة عينة عشوائية تشمل **100** طالب، ووجدنا أن الوسط الحسابي لأوزانهم يساوى **64** كيلو جرام، فمن هذه البيانات قدر الوسط الحسابي لأوزان كل طلبة المسجلين في هذه الجامعة تلك السنة، وذلك باستخدام فترة ثقة بمستوى قدرة **99%**.

**الحـل:**

المجتمع في هذه الدراسة يتكون من أوزان كل الطلبة المسجلين في هذه الجامعة في تلك السنة، وتباينه معلوم، وهنا بالرغم من عدم ذكر توزيع المجتمع فنستطيع استعمال المتغير الطبيعي المعياري $Z$ للحصول على فترة الثقة المطلوبة، لأن حجم العينة كبير **(*n*>30)** وذلك وفقا لنظرية النهاية المركزية. والفترة هي:

$$(\bar{X} - Z_{\alpha/2}\sqrt{\sigma^2|n} \quad ، \quad \bar{X} + Z_{\alpha/2}\sqrt{\sigma^2|n})$$

**حيث:** $(1-\alpha)100\% = 99\% \; \bar{X} = 64 \;\; n = 100 \, , \;\; \sigma^2 = 144$

**إذن:** $1-\alpha = 0.99 \text{ ، } \alpha = 0.01 \text{ ، } \alpha/2 = 0.005 \;\; , Z_{\alpha/2} = Z_{0.005} = 2.58$

وبالتعويض في الحد الأدنى والحد الأعلى لفترة الثقة نحصل على:

**الحد الأدنى لفترة الثقـة:**

$$\bar{X} - Z_{\propto/2}\sqrt{\sigma^2/n} = 64 - (2.58)\sqrt{144/100} = 64 - 3.096 = 60.904$$

**الحد الأعلى لفترة الثقة:**

$$\bar{X} + Z_{\propto/2}\sqrt{\sigma^2/n} = 64 + (2.58)\sqrt{144/100} = 64 + 3.096 = 67.096$$

إذن فترة الثقة للوسط الحسابي لأوزان كل الطلبة المسجلين في هذه الجامعة في تلك السنة، عند مستوى ثقة **99%** هي:

**(60.904 ، 67.096)**

أي نستطيع القول بثقة **99%** بأن الوسط الحسابي الحقيقي لأوزان كل الطلبة المسجلين في تلك السنة يقع بين **60.904** كيلو جرام **و 67.096** كيلو جرام .

**مثال (3-5) :**

إذا كان المبلغ المودع في الحسابات الجارية في أحد المصارف، يتبع توزيعا ما بانحراف معياري قدره **3150** دينار، فإذا اخترنا من هذا المصرف عينة عشوائية تشمل **100** حساب جارى، ووجدنا أن الوسط الحسابي للمبالغ المودعة في الحسابات التي تشملها العينة **8525** دينار. فقدر الوسط الحسابي للمبالغ المودعة في كل الحسابات الجارية في هذا المصرف، وذلك باستخدام فترة ثقة عند مستوى ثقة **95%** .

**الحل:**

بما أن المجتمع محل الدراسة توزيعه الاحتمالي غير معروف، وحجم العينة كبير **n=100** ، فبتطبيق نظرية النهاية المركزية، حيث أن تباين المجتمع $\sigma^2$ معلوم ، فنحسب فترة الثقة المطلوبة من الفترة التالية :

$$\left(\bar{X} - Z_{\propto/2}\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} \quad ، \bar{X} + Z_{\propto/2}\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}\right)$$

**حيث:**

$$(1-\propto)\ 100\% = 95\% \quad ، \quad \bar{X} = 8525 \quad ، \quad n=100 \quad ، \sigma = 3150$$

$$Z_{\propto/2} = Z_{0.025} = 1.96 \quad ، \quad \frac{\alpha}{2} = 0.025 \quad ، \quad \propto = 0.05 \quad ، \quad 1-\alpha = 0.95$$

وبالتعويض في الحد الأدنى والحد الأعلى، مع الانتباه أن القيمة التي عندنا هي قيمة الانحراف المعياري $\sigma$ وليس $\sigma^2$، نحصل على:

**الحد الأدنى لفترة الثقة:**

$$\overline{\mathbf{X}} - \mathbf{Z}_{\propto/2}\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} = 8525 - (1.96)\sqrt{\frac{(3150)^2}{100}} = 8525 - 617.400 = 7907.600$$

**الحد الأعلى لفترة الثقة:**

$$\overline{\mathbf{X}} + \mathbf{Z}_{\propto/2}\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} = 8525 + (1.96)\sqrt{\frac{(3150)^2}{100}} = 8525 + 617.400 = 9142.400$$

إذن فترة الثقة للوسط الحسابي للمبالغ المودعة في كل الحسابات الجارية في هذا المصرف، عند مستوى ثقة **95%** هي:

**(7907.600 ، 9142.400)**

أي نستطيع القول بثقة قدرها **95%** بأن الوسط الحسابي للمبالغ المودعة في كل الحسابات الجارية في هذا المصرف، تقع بين القيمتين **7907.600** و **9142.400**.

## ملخص الفصل الخامس

التقدير هو أحد فرعى الاستنتاج الإحصائي، فهو يهتم بكيفية تقدير معالم مجتمع باستخدام بيانات نحصل عليها من عينة عشوائية مسحوبة من هذا المجتمع، ويوجد نوعان من التقدير:

**1. التقدير بقيمة:**

هو تقدير معلمة المجتمع بإحصاءة نحسب قيمتها من العينة، أي نقدر المعلمة المجهولة بقيمة واحدة فقط، وأفضل مقدِّر بالقيمة للوسط الحسابي للمجتمع $\boldsymbol{\mu}$ هو الوسط الحسابي للعينة $\overline{X}$ وأفضل مقدِّر بالقيمة لتباين المجتمع $\boldsymbol{\sigma^2}$ هو تباين العينة $\boldsymbol{S^2}$.

**2. التقدير بفترة:**

المقصود به استخدام التقدير بقيمة لإنشاء فترة نعتقد وقوع المعلمة المجهولة بداخلها بدرجة ثقة معينة، فوجدنا أنه عندما يتبع المجتمع التوزيع الطبيعي أو حجم العينة كبير، فإن فترة الثقة للوسط الحسابي للمجتمع عندما يكون تباين المجتمع معلوما، وعند مستوى ثقة **(1−α) 100%** هي:

$$\left(\overline{X} - Z_{\alpha/2}\sqrt{\sigma^2/n} \quad ، \quad \overline{X} + Z_{\alpha/2}\sqrt{\sigma^2/n}\right)$$

وفترة الثقة للوسط الحسابي للمجتمع عندما يكون تباين المجتمع مجهولا، وعند مستوى ثقة **(1−α) 100%**:

$$\left(\overline{X} - t_{\alpha/2}(\nu)\sqrt{S^2/n} \quad ، \quad \overline{X} + t_{\alpha/2}(\nu)\sqrt{S^2/n}\right)$$

مع العلم أن: طول أية فترة = الحد الأعلى – الحد الأدنى.