دولة ليبيا

وزارة التعليم

مركز المناهج التعليمية والبحوث التربوية

الرياضيات

للصف التاسع من مرحلة التعليم الأساسي

الاسبوع الخامس عشر

المدرسة الليبية بفرنسا ـ تور

العام الدراسي 1441 / 1442 هجري
2020 / 2021 ميلادي

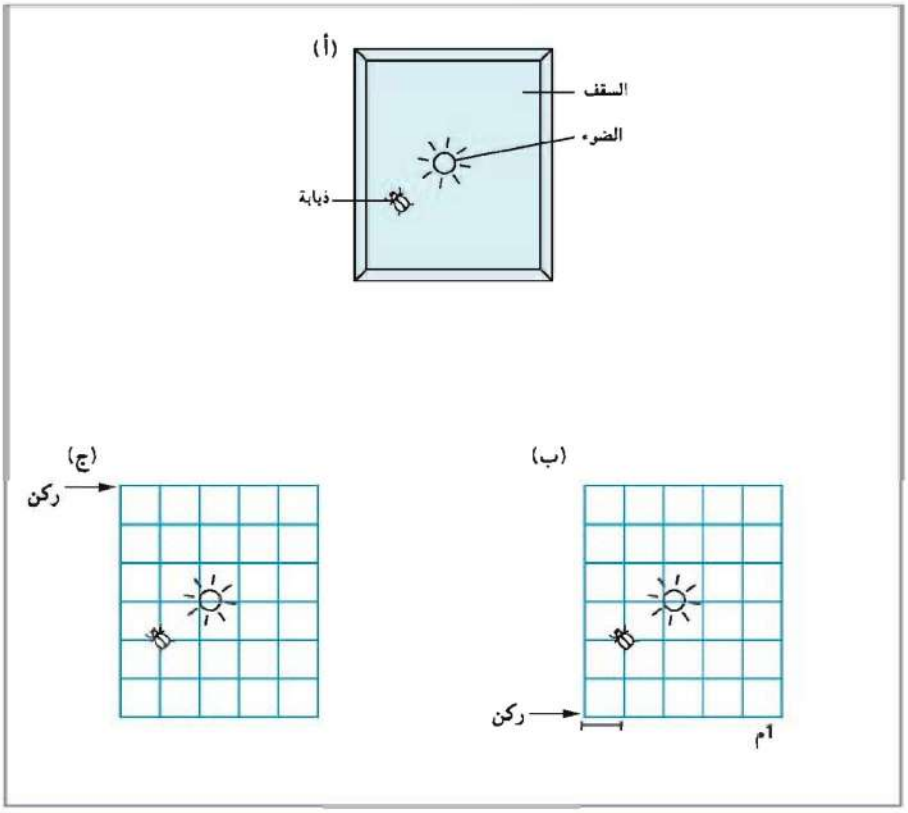
جميع الحقوق محفوظة لـ مركز المناهج التعليمية والبحوث التربوية ـ ليبيا

3

هندسة الإحداثيات

Coordinate Geometry

عـاش "رينيه ديكارت" عـالم رياضيات في فرنسا خلال القـرن السابع عشـر. بينما كان مـستلقـيًا على فراشـه في يوم بارد، نظر إلى أعلى فرأى ذبابة تـسير ببـطء على السقف كما هو موضح في الشكل (أ) . وأراد تـحـديـد طريقة ليصف مكان الذبابة.



وقرر أن أسهل طريقة تكون بتخيل السقف وكأنه مغطى بشبكة من الخطوط يبعد كل منها عن الآخر مسـافة متر، عندئذ يمكنه تحديد موضع الذبابة بعدّ المربعات التي تبعدها عن كل حائط. وعليه إذا بدأ بالركن في (ب) يمكنه القول بأن الذبابة على بعد مربع واحد أفقيًّا ومربعين رأسيًّا.

وبالتسـاوي كـان يمكـنه البـدء مـن أي الأركـان الثلاثة الأخـرى. بالبدء مـن الركن الأعلى في اليسار في (ج) يمكنه القول بأن الذبابة على بعد مربع أفقيًّا وأربعة مربعات لأسفل. من الركـن الأعلى في اليمين، كانت الـذبابة على بعد ٤ مربـعات أفقـيًّا و٤ مربعات لأسفل . ومن الركن الأسفل في اليمين، كانت الذبابة على بعد 4 مربعات أفقيًّا ومربعين لأعلى.

جميع الحقوق محفوظة لـ مركز المناهج التعليمية والبحوث التربوية ـ ليبيا

ولذا كان على ديكارت إرساء **قاعدة** حول المكان الذي يبدأ العد منه، وقرر البدء دائمًا من **الركن الأسفل في اليسار** كنقطة انطلاق وأن يتقدم دائمًا في **الاتجاه الأفقي ثم الرأسي**.

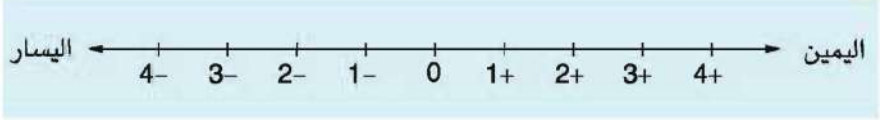
في نهاية هذا الفصل. سوف تكون قادرًا على:

- استخدام الزوج المرتب لكتابة الإحداثيات لنقطة معينة على المستوى الإحداثي.
- تحديد موقع النقطة بالإحداثيات المعطاة.
- تحديد ما إذا كانت نقطة معطاة تقع على الشكل البياني.
- رسم شكل بياني لمعادلة خطية.
- تمييز الخط المستقيم على الصورة ص = حـ أو س = حـ حيث حـ ثابت.
- رسم شكل بياني لمعادلة غير خطية.
- حل الرسوم البيانية في المواقف العملية.

1-3 استخدام الأعداد الموجهة لوصف موضع نقطة على المستوى الديكارتي

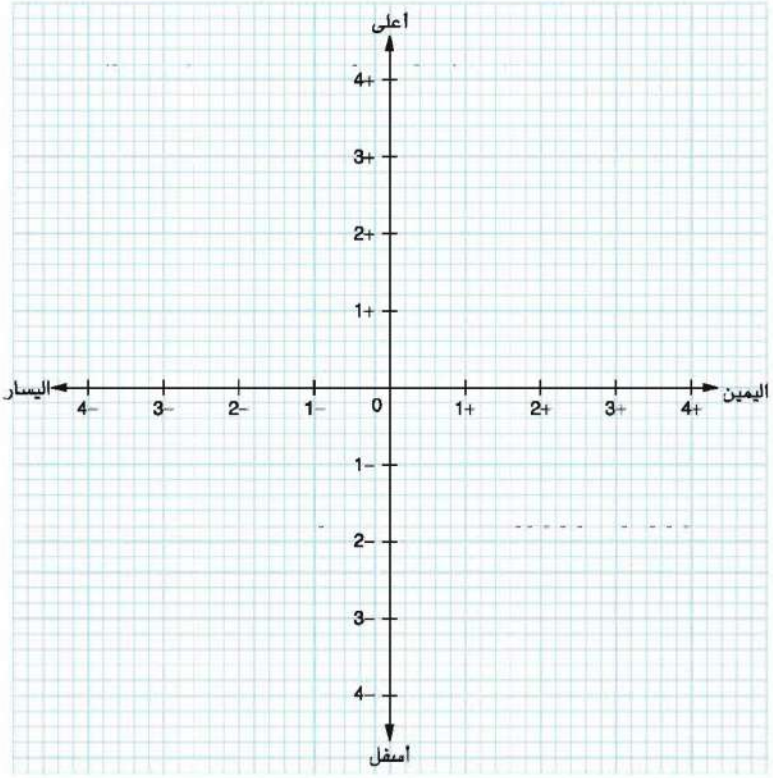
Using Directed Numbers to Describe a Position on a Cartesian Plane

يحاول عالم الرياضيات دائمًا التعبير عن الأشياء بأبسط الطرق. لذا عندما يصف موضع نقطة فإنه قد يستخدم نظام **الأعداد الموجهة** لأن العدد الموجه يدل على **المسافة والاتجاه** من نقطة معينة . تذكر أنه على خط الأعداد (انظر الكتاب الأول) كما هو مبين أدناه يقع العدد **الموجب** (+) على يمين الصفر والعدد **السالب** (-) على يساره.

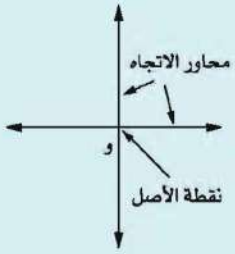


وكما أن اليمين واليسار عكس بعضهما كذلك أعلى (↑) وأسفل (↓). ولهذا يمكننا استخدام فكرة الأعداد الموجبة والسالبة بالنسبة للأعلى والأسفل على التوالي. ومن ثم نحصل على خطي أعداد بينهما زاوية قائمة يتقاطعان عند نقطتي الأصفار أو "**نقطة الأصل**" كما هو موضح بالصفحة التالية.

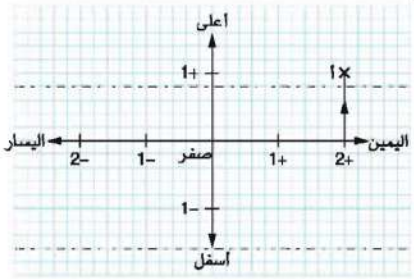
جميع الحقوق محفوظة لـ مركز المناهج التعليمية والبحوث التربوية ـ ليبيا



يمكن وصف موضع نقطة على سطح مستو بتعيين مقياسين للنقطة يتم تحديدهما من محورى الاتجاه. هذان المحوران متعامدان بصفة عامة ويتقاطعان فى نقطة تسمى "نقطة الأصل" ويشار إليها بالرمز (و).



تأمل النقطة أ الموضحة فى الشكل على اليسار.

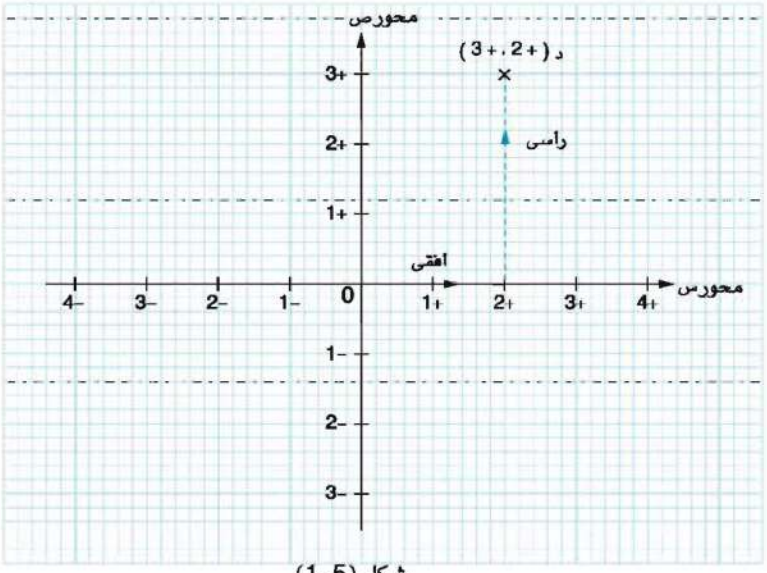


النقطة أ على بعد خطوتين ناحية اليمين (+2) وخطوة إلى أعلى (+1) من نقطة الأصل. ومن ثم فإن موضع النقطة يكون (+2، +1). موضع النقطة **يُعطى كزوج مرتب** من الأعداد المطردة و"مرتب" هنا بمعنى أن **إشارات** اتجاه اليمين/اليسار تكتب دائمًا أولًا ثم تكتب **إشارات** أعلى/أسفل ثانيًا.

جميع الحقوق محفوظة لـ مركز المناهج التعليمية والبحوث التربوية ـ ليبيا

ولهذا، نحدد المسافة الرأسية والأفقية (1، 2، 3، .....) والاتجاه (+ ، -) من نقطة الأصل لتحديد **موضع نقطة** في مستوى الإحداثيات. بمعنى **كم تبعد إلى يمين أو يسار نقطة الأصل وكم ترتفع أو تنخفض عن نقطة الأصل**.

هذه الطريقة لوصف وضع النقطة في مستوى الإحداثيات هي التي استخدمها "ديكارت" وعلى شرفه تم تسمية المستوى الذي يرسم عليه المحاور (أو خطوط الأعداد) باسم **"المستوى الديكارتي"**. المحور الأفقي يسمى **محور السينات** بينما المحور الرأسي يسمى **محور الصادات**. انظر (الشكل 5-1). هذا النظام للأزواج المرتبة من الأعداد الموجهة يعتبر أبسط طريقة لتفسير موضع نقطة في المستوى.



شكل (5-1)

ولتلخيص ما سبق (ارجع إلى المستوى الديكارتي المعطى في شكل 5-1).

1- **محور السينات** هو خط أعداد **أفقي** و**محور الصادات** هو خط أعداد رأسي.

2- يتقاطع محورا الإحداثيات السيني والصادي في نقطة تسمى نقطة **الأصل** (يشار إليها بالرمز "و" وتتطابق مع العدد صفر على خطي الأعداد الأفقي والرأسي) ونقطة الأصل هي النقطة المرجعية لوصف موضع أي نقطة في المستوى.

3- على محور السينات، أي نقطة تكون على **يمين** نقطة الأصل تعتبر **موجبة** (+) الاتجاه بينما أي نقطة على **يسار** نقطة الأصل تكون **سالبة الاتجاه** (-).

4- بالنسبة لمحور الصادات، أي نقطة تقع **فوق** نقطة الأصل يكون اتجاهها موجبًا وتأخذ العلامة (+) وأي نقطة تقع **أسفل** نقطة الأصل يكون اتجاهها **سالبًا** وتأخذ العلامة (-).

5- يمتد كلا المحورين السيني والصادي إلى ما لا نهاية على كل من جانبي نقطة الأصل. وعادة ما نضع علامات الأسهم فقط على الاطراف الموجب، بمعنى "الأيمن" و "الأعلى".

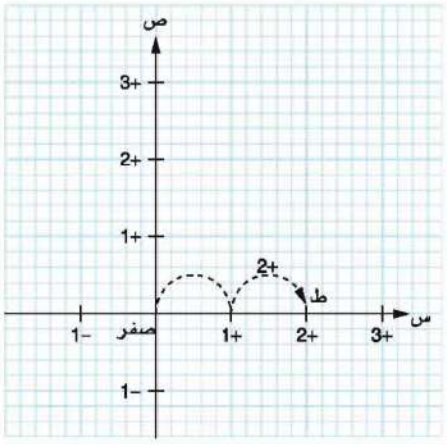
جميع الحقوق محفوظة لـ مركز المناهج التعليمية والبحوث التربوية ـ ليبيا

6- موضع نقطة في مستوى الإحداثيات يُعطى بدلالة المسافات الأفقية والرأسية واتجاهها من نقطة الأصل. ويمكن وصفها عن طريق مقياسين مطردين يُعطيان في صورة **زوج مرتب**، كما هو موضح بالنقطة (د) في الشكل (5 - 1).

ارجع إلى الزوج المرتب (+2 ، + 3) الذي يمثل موضع النقطة (د) في الشكل (5-1):

- العدد الأول من الزوج المرتب + 2 يسمى **الإحداثي السيني** ويعطي قياسًا للمسافة الأفقية واتجاه النقطة من نقطة الأصل.
- العدد الثاني من الزوج المرتب + 3 يسمى **الإحداثي الصادي** ويعطي قياسًا للمسافة الرأسية واتجاه النقطة **بالنسبة لنقطة الأصل**.

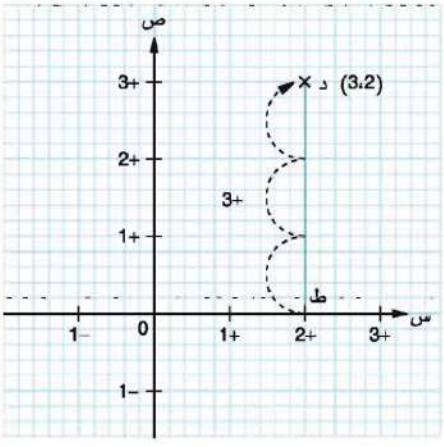
يوضح الشكلان (5 - 2) (أ) ، (ب) الخطوات المطلوبة للوصول إلى النقطة د (+2، +3).



أولًا نحرك وحدتين ناحية اليمين من نقطة الأصل حتى تصل إلى النقطة ط.

الإحداثي السيني يكون +2.

شكل (5 - 2 - أ)



بعد ذلك من النقطة ط نحرك 3 وحدات لأعلى. فيكون الموضع النهائي للنقطة د هو المحدد بالزوج المرتب (2، 3).

الإحداثي الصادي يكون +3.

شكل (5 - 2 - ب)

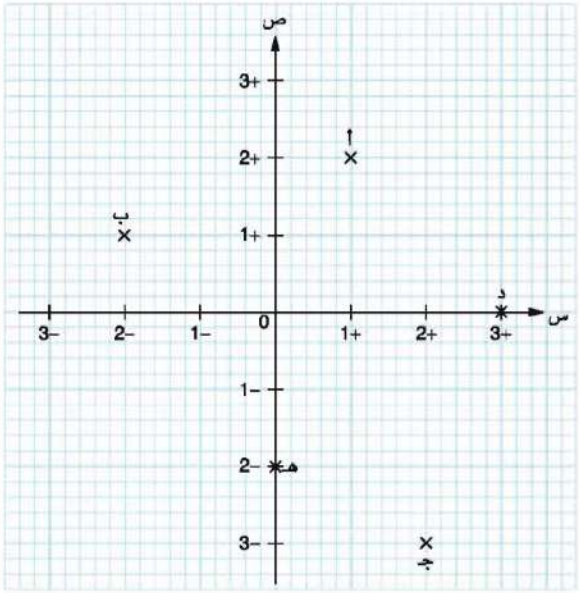
ترى من الشكل (5 - 2 - ب) أن النقطة د هي وحدتين يمين نقطة الأصل، 3 وحدات أعلى نقطة الأصل، وبدلاً من قول أن النقطة (د) موضعها (+2، +3). يمكن ببساطة القول إن إحداثيي النقطة د هما (2، 3).

جميع الحقوق محفوظة لـ مركز المناهج التعليمية والبحوث التربوية ـ ليبيا

يمكن التعبير عن إحداثيي أي نقطة في المستوى الديكارتي كزوج مرتب من الأعداد الموجهة التي تحدد موضع النقطة في المستوى. إحداثيا نقطة الأصل هما (0، 0).

مثال 1:

أعط إحداثيات النقط المشار إليها في المستوى الديكارتي أدناه.



الحل

بالنسبة للنقطة أ :

الإحداثي السيني 1 بمعنى وحدة واحدة على يمين نقطة الأصل،

الإحداثي الصادي 2 بمعنى وحدتين أعلى نقطة الأصل.

∴ إحداثيا النقطة أ هما (1، 2).

بالنسبة للنقطة ب :

الإحداثي السيني هو -2 بمعنى وحدتين على يسار نقطة الأصل،

الإحداثي الصادي هو 1 بمعنى وحدة واحدة أعلى نقطة الأصل.

∴ إحداثيا النقطة ب هما (-2، 1).

بالنسبة للنقطة جـ :

الإحداثي السيني هو 2 بمعنى وحدتين على يمين نقطة الأصل،

الإحداثي الصادي هو -3 بمعنى ثلاث وحدات أسفل نقطة الأصل.

∴ إحداثيا النقطة جـ هما (2، -3).

جميع الحقوق محفوظة لـ مركز المناهج التعليمية والبحوث التربوية ـ ليبيا

بالنسبة للنقطة ز

الإحداثي السيني هو 3 بمعنى ثلاثة وحدات على يمين نقطة الأصل،

الإحداثي الصادي هو 0 بمعنى أن النقطة تقع على محور السيني.

∴ إحداثيا النقطة ز هما (3، 0).

بالنسبة للنقطة هـ:

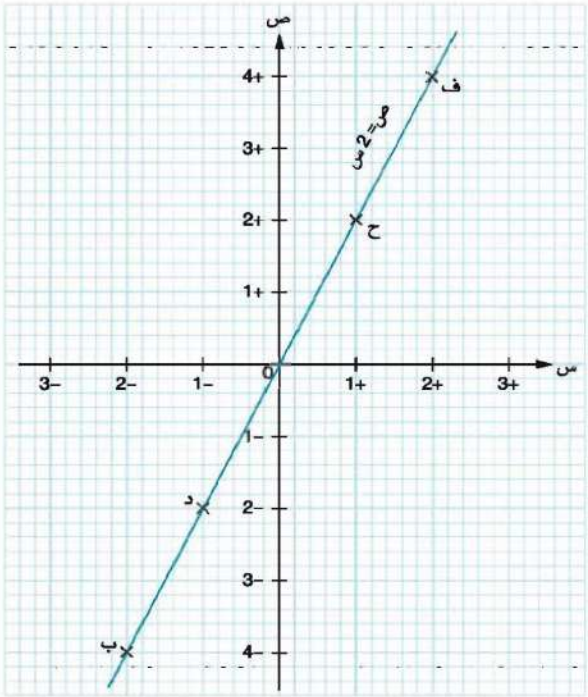
الإحداثي السيني هو 0 بمعنى أن النقطة لا على يمين ولا على يسار نقطة الأصل،

الإحداثي الصادي هو -2 بمعنى وحدتين أسفل نقطة الأصل.

∴ إحداثيا النقطة هـ هما (0، -2).

2-3 النماذج الخطية ومعادلاتها Linear Patterns and Their Equations

تضمنت الأسئلة الثلاثة الأخيرة في التمرين (5أ) تعيين نقط في **المستوى الديكارتي** ثم ملاحظة النموذج الناتج من توصيل النقاط ببعضها البعض وبصفة خاصة فإن السؤال الأخير قدم **النموذج الخطي** بمعنى: تقع جميع النقط المحددة على نفس الخط المستقيم. وسوف ندرس في هذا الفصل تلك النماذج الخطية.



جميع الحقوق محفوظة لـ مركز المناهج التعليمية والبحوث التربوية ـ ليبيا

في الشكل المرسوم بأعلى، وبرسم وتوصيل النقط (ب) حتى (ف) نحصل على خط **مستقيم**.

لاحظ أن الإحداثي الصادي لكل نقطة يساوي ضعف قيمة الإحداثي السيني لنفس النقطة بمعنى:

عندما س = -2 فإن ص = 2 × (-2) = -4

عندما س = 1 فإن ص = 2 × (1) = 2 وهكذا.

يمكن كتابة العلاقة اللفظية السابقة **كتعبير رياضي**:

ص = 2 س

مثل هذا التعبير الرياضي يسمى **معادلة**. والمستقيم الذى يمر بتلك الأزواج المرتبة. يسمى **التمثيل البياني للمعادلة**:

ص = 2 س.

كل نقطة تقع على هذا المستقيم تحقق المعادلة ص = 2 س، على سبيل المثال، لتكن النقطة د (0.5، 1) التي تقع على هذا المستقيم. هنا س = 0.5، ص = 2 (0.5) = 1 وبناءً عليه فإن إحداثيات النقطة (د) تحقق المعادلة ص = 2 س.

مثال 2:

ارسم الشكل البياني ص = 3 س لجميع قيم س المحصورة من 3 الى -3

الحل

الغرض من حصر قيم على محور السينات (-3 ≤ س ≤ 3) ليدلنا فقط على الجزء من الخط ص = 3 س المطلوب.

ولرسم الخط المستقيم سوف نحتاج فقط إلى إيجاد ورسم الإحداثيات لبعض النقط التي تنتمى إلى العلاقة المعطاة ثم رسم المستقيم المار بهذه النقط. وبما أن العلاقة تحدد أننا نريد قيم س التى تقع على المستقيم بين -3 ≤ س ≤ 3 فيكون من المناسب إيجاد تلك النقط ذات الإحداثي السيني -3، -2، -1، 0، 1، 2، 3 بمعنى آخر نريد إكمال الجدول التالي من القيم مستخدمين القاعدة المعطاة ص = 3 س:

س	-3	-2	-1	0	1	2	3
ص							
(س، ص)							

ولإكمال الجدول السابق. نعوض فقط عن كل قيمة س فى المعادلة ص = 3 س.

عندما س = -3، فإن ص = 3 س

= 3 × (-3) = -9

∴ نحصل على النقطة (-3، -9)

وبالمثل عندما س = -2 فإن ص = 3 س.

= 3 × (-2) = -6

∴ نحصل على النقطة (-2، -6)

وأيضًا عندما س = -1، ص = 3 س = 3 × (-1) = -3، ∴ النقطة هى (-1، -3).

جميع الحقوق محفوظة لـ مركز المناهج التعليمية والبحوث التربوية ـ ليبيا

بالاستمرار بهذه الطريقة لقيم س = 0، 1، 2، 3 نحصل على النقاط (0،0)، (1، 3)، (2، 6)، (3، 9) ويصبح الجدول بعد التكملة كما يلي.

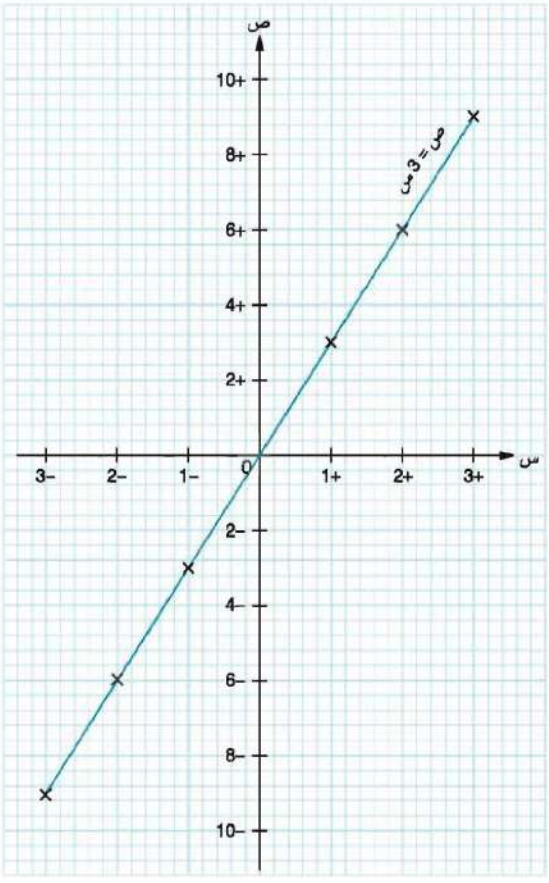
س	-3	-2	-1	0	1	2	3
ص=3س	-9	-6	-3	0	3	6	9
(س،ص)	(-3، -9)	(-2، -6)	(-1، -3)	(0،0)	(1، 3)	(2،6)	(3، 9)

ولرسم الشكل البياني للمعادلة ص = 3س، سوف نستخدم المقياس التالي:

- 1سم لكل وحدة على محور السينات.
- 1سم لكل وحدتين على محور الصادات.

يتم اختيار مقاييس مختلفة بالنسبة لمحور السينات ومحور الصادات لأن مدى القيم للمتغير ص أكبر من مدى القيم للمتغير س. يتم عمل هذا لإعطاء الرسم البياني فراغًا كافيًا.

وسبب آخر مهم هو أن الرسم البياني يجب أن يكون كبيرًا بدرجة كافية. من الأفضل أن تغطي المسافة الأفقية والرأسية بين النقطة الأولى والأخيرة 8سم من الفراغ أو أكثر.



ملحوظة

نخطط في هذا الفصل نقاطًا أكثر مما ينبغي للرسم البياني الخطي. وبالتدريب سوف نحتاج تخطيط نقاط أقل.

ملحوظة

لتخطيط رسم بياني اختر مقاييس مناسبة لمحور السينات ومحور الصادات.

جميع الحقوق محفوظة لـ مركز المناهج التعليمية والبحوث التربوية ـ ليبيا

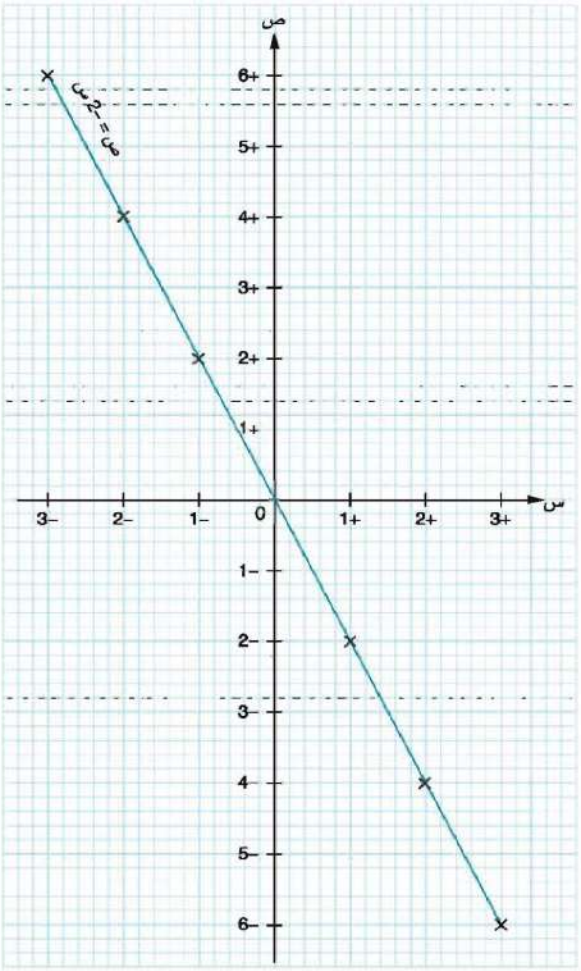
مثال 3:

ارسم الشكل البياني للمعادلة ص = -2س حيث -3 ≤ س ≤ 3 باستخدام مقياس رسم 1 سم لتمثل وحدة واحدة على كل من المحورين.

الحل

جدول قيم المعادلة ص = -2 س.

س	-3	-2	-1	0	1	2	3
ص	+6	+4	+2	0	-2	-4	-6
(س،ص)	(-3, 6)	(-2, 4)	(-1, 2)	(0,0)	(1, -2)	(2, -4)	(3, -6)



مثال 4:

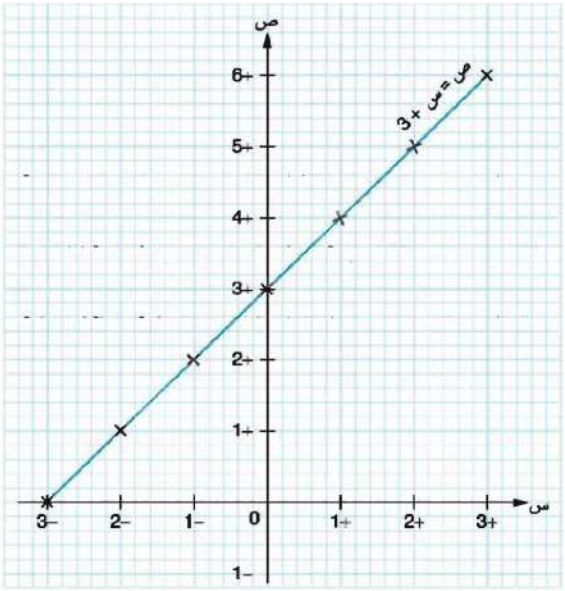
ارسم الشكل البياني للمعادلة ص = س + 3 حيث -3 ≤ س ≤ 3 باستخدام مقياس رسم 1 سم ليمثل كل وحدة على محوري الإحداثيات.

الحل

يبين الجدول التالي قيم ص = س + 3

س	-3	-2	-1	0	1	2	3
ص	0	1	2	3	4	5	6
(س،ص)	(-3,0)	(-2, 1)	(-1, 2)	(0, 3)	(1, 4)	(2, 5)	(3, 6)

جميع الحقوق محفوظة لـ مركز المناهج التعليمية والبحوث التربوية ـ ليبيا



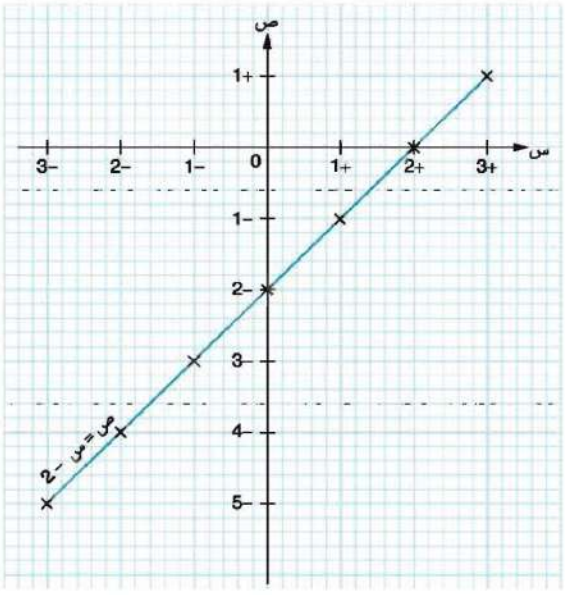
مثال 5:

ارسم الشكل البياني للعلاقة ص = س - 2 حيث $-3 \leq$ س ≤ 3 باستخدام مقياس رسم 1 سم ليمثل كل وحدة على محوري الإحداثيات.

الحل

جدول قيم المعادلة ص = س - 2.

س	3-	2-	1-	0	1	2	3
ص	5-	4-	3-	2-	1-	0	1
(س، ص)	(5-، 3-)	(4-، 2-)	(3-، 1-)	(2-، 0)	(1-، 1)	(0، 2)	(1، 3)



جميع الحقوق محفوظة لـ مركز المناهج التعليمية والبحوث التربوية ـ ليبيا

مثال 6:

ارسم الشكل البياني للعلاقة ص = - س + 3 حيث -3 ≤ س ≤ 3 مستخدمًا مقياس رسم 1 سم لكل وحدة من المحورين السيني والصادي.

الحل

جدول قيم المعادلة ص = - س + 3

س	-3	-2	-1	0	1	2	3
- س	3	2	1	0	-1	-2	-3
3+	3+	3+	3+	3+	3+	3+	3+
ص	6	5	4	3	2	1	0
(س،ص)	(-3، 6)	(-2،5)	(-1،4)	(0، 3)	(1،2)	(2،1)	(3،0)

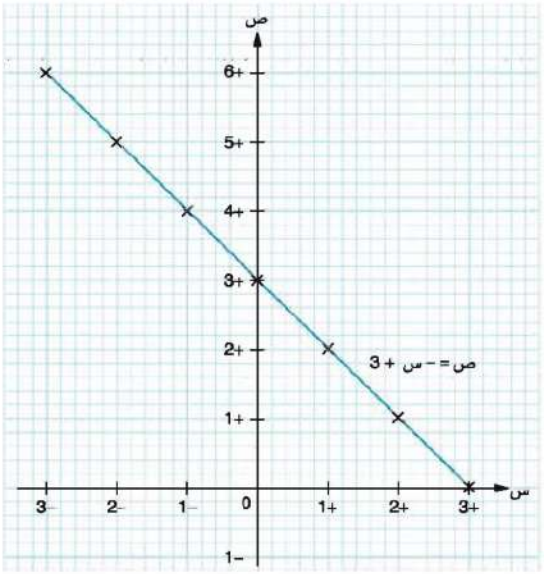
اجمع

يساعدنا الجدول السابق فى استخراج قيم ص بطريقة مرتبة بدلًا من تتابع العمل من النوع التالي:

"عندما س = -3 ، ص = - (-3) + 3 = 6"

والذي يجب عمله بالنسبة لكل قيمة من قيم س.

جميع الحقوق محفوظة لـ مركز المناهج التعليمية والبحوث التربوية ـ ليبيا



ملحوظة

تتراوح قيمة ص بين 0 و6

يُحذف في الأمثلة التالية الصف الأخير (س، ص)، تلاحظ الآن من الجدول أن الإحداثيات للنقاط التي سوف يتم رسمها (س، ص) يمكن قراءتها من صفوف القيم س، ص

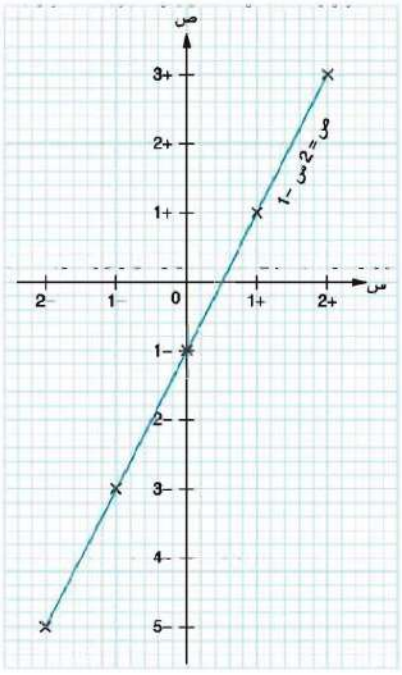
مثال 7:

ارسم الشكل البياني للعلاقة ص = 2 س - 1 حيث -2 ≤ س ≤2 . استخدم مقياس رسم 1سم لتشمل وحدة واحدة على كلا المحورين.

الحل

جدول قيم المعادلة ص = 2س -1 :

	2	1	0	1 -	2 -	س
اجمع	4	2	0	2-	4-	2س
	1-	1-	1-	1-	1-	1-
	3	1	1 -	3 -	5 -	ص



جميع الحقوق محفوظة لـ مركز المناهج التعليمية والبحوث التربوية ـ ليبيا

مثال 8:

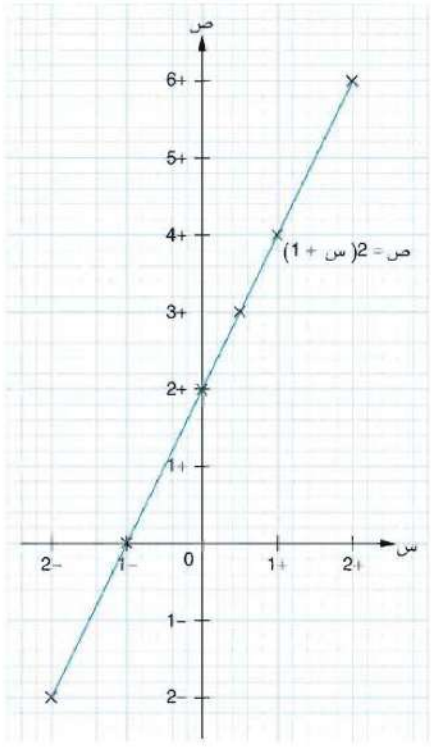
ارسم الشكل البياني للعلاقة ص = 2 (س +1) حيث -2 ≤ س ≤ 2، استخدم مقياس رسم 1سم ليمثل وحدة واحدة على كلا المحورين السيني والصادي.

الحل

جدول قيم العلاقة ص = 2 (س +1) ،

س	2-	1-	0	1	2
س+1	1-	0	1	2	3
ص	2-	0	2	4	6

نضرب في 2 لأن ص = 2 (س + 1)



مثال 9:

ارسم الشكل البياني للعلاقة س + ص = 2 حيث -2 ≤ س ≤ 2. استخدم 1 سم ليمثل وحدة واحدة على كلا المحورين السيني والصادي.

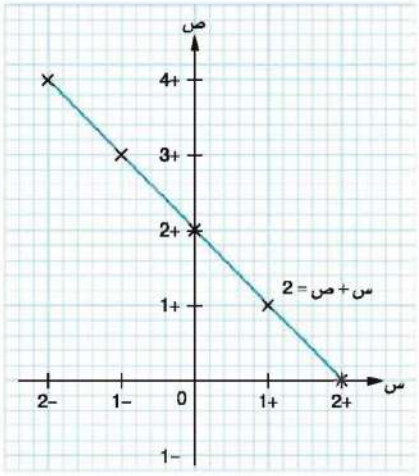
الحل

س + ص = 2 يمكن كتابة ص = -س + 2

جميع الحقوق محفوظة لـ مركز المناهج التعليمية والبحوث التربوية ـ ليبيا

جدول قيم العلاقة ص = - س + 2 :

	س	2-	1-	0	1	2
اجمع	- س	2	1	0	1-	2-
	2	2+	2+	2+	2+	2+
	ص	4	3	2	1	0



ملحوظة

عنون هذا الخط بمعادلته الأصلية س + ص = 2

جميع الحقوق محفوظة لـ مركز المناهج التعليمية والبحوث التربوية ـ ليبيا

3-3 العلاقات الخطية الرأسية والأفقية

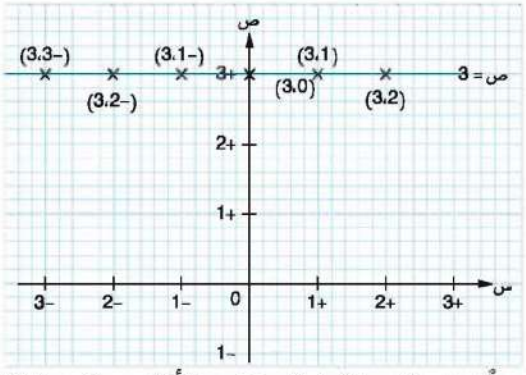
Horizontal and Vertical Linear Relationships

تأمل مجموعات النقاط التالية:

مجموعة I	(3، 3-)	(1، 3-)	(2، 2-)	(3، 2-)	(3، 1-)	(3، 0)
مجموعة II	(2، 1)	(3، 1)	(0، 2)	(3، 2)	(2، 3)	(4، 3)

أي من النقط السابقة تطابق القاعدة ص = 3؟ لاحظ أن القاعدة لا تحصر القيم للمتغير س. مع ذلك فإن **قيمة** ص **يجب** أن تكون 3

وجدنا في المجموعة (I)، النقط (3-، 3) ، (2-، 3)، (1-، 3)، (0، 3) جميعها تحقق القاعدة ص =3 بينما النقط (3-، 1) ، (2-، 3) لا تحقق . في المجموعة (II) فقط النقط (1 ، 3) ، (2، 3) تحقق القاعدة ص = 3، وعن طريق رسم النقط التي تحقق القاعدة ص =3 ، نحصل على:



تقع هذه النقط جميعًا على نفس الخط المستقيم **الأفقي**. يمثل هذا الخط الأفقي بيانيًا العلاقة ص = 3.

المعادلة التي على الصورة ص = حـ . حيث حـ عدد ثابت تمثل بيانيًا بخط مستقيم **أفقي**.

تأمل مجموعات النقاط التالية:

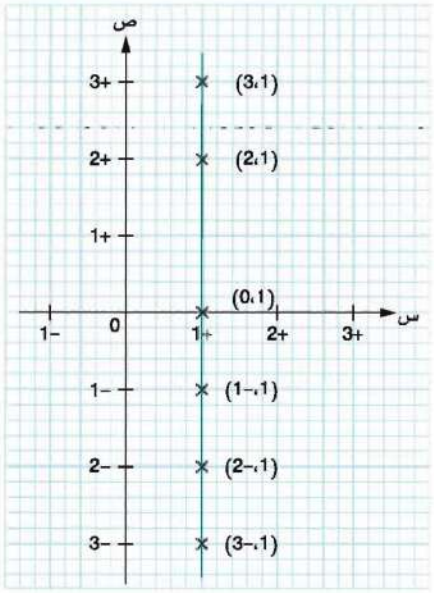
مجموعة I	(3- ،3-)	(3- ،1)	(2- ،1)	(1- ،0)	(1- ،1)	(0 ،1)
مجموعة II	(1 ،0)	(1 ،2)	(2 ،1)	(1 ،3)	(1 ،1)	(2 ،3)

أي من النقط السابقة تحقق القاعدة س = 1؟ لاحظ أن القاعدة لا تحصر القيم للمتغير ص ومع ذلك فإن قيمة س **يجب** أن تظل دائمًا كما هي = 1

من المجموعة (I) نجد أن النقط (1، 3-) ، (1، 2-) ، (1، 1-) ، (1، 0) جميعها تحقق القاعدة س =1 بينما النقط (3-، 3) ، (0 ، 2-) لا تحقق. في المجموعة (II) نجد أن النقطتين (1، 2)، (1، 3) كلاهما يحقق القاعدة المعطاة.

وبرسم النقط التي تحقق القاعدة س =1 نحصل على:

جميع الحقوق محفوظة لـ مركز المناهج التعليمية والبحوث التربوية ـ ليبيا



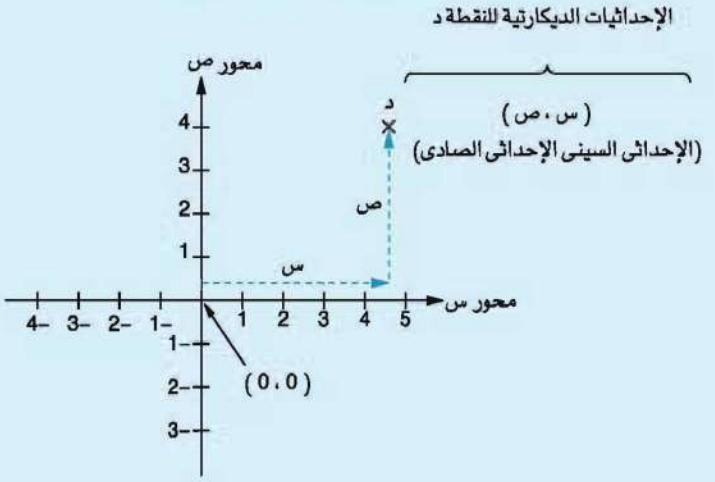
تقع جميع هذه النقط على نفس الخط المستقيم **الرأسي**. يمثل هذا الخط الرأسي بيانيًّا المعادلة س = 1

المعادلة التي على الصورة س = حـ، حيث حـ عدد ثابت تمثل بيانيًّا بخط مستقيم رأسي.

جميع الحقوق محفوظة لـ مركز المناهج التعليمية والبحوث التربوية ـ ليبيا

ملخص

1- ملخص وصفي للمستوى الديكارتي والنظام الإحداثي:

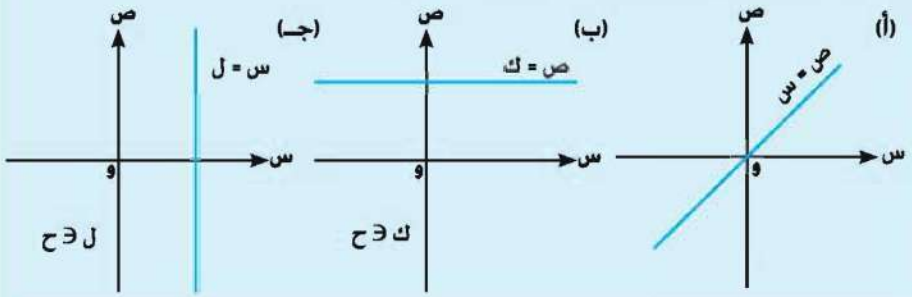


2- معادلة محور السينات هي ص = 0، معادلة محور الصادات هي س = 0.

3- إذا كانت إحداثيات نقطة تحقق معادلة الرسم البياني فإن النقطة تقع على الرسم البياني.

4- إذا كانت إحداثيات نقطة لا تحقق معادلة الرسم البياني فإن النقطة لا تقع على الرسم البياني.

5- بعض الرسوم البيانية الأساسية ومعادلاتها:



جميع الحقوق محفوظة لـ مركز المناهج التعليمية والبحوث التربوية ـ ليبيا