دولة ليبيا
وزارة التعليم
مركز المناهج التعليمية والبحوث التربوية

مبادئ الإحصاء

للسنة الثانية بمرحلة التعليم الثانوي
«القسم العلمي»

الاسبوع الخامس عشر

المدرسة الليبية بفرنسا ـ تور

العام الدراسي:
1441 / 1442 هـ . 2020 / 2021 م.

جميع الحقوق محفوظة لـ مركز المناهج التعليمية والبحوث التربوية ـ ليبيا

ونظراً لسهولة التعامل مع الانحدار الخطي البسيط من جهة، وإن معظم العلاقات تربط بين متغيرين يمكن تقريبهما بشكل فرضي بعلاقة خطية بسيطة من جهة أخرى، لذا فسوف نتعرض للانحدار الخطي البسيط .

1.2.6 الانحدار الخطي البسيط :

الانحدار الخطي البسيط يهتم بدراسة العلاقة بين متغيرين أحدهما مستقل (X) والآخر تابع (y) مع افتراض أن العلاقة المناسبة بينهما في الصورة الخطية $y=ax+b$ حيث a , b ثابتان يجب تحديدها ، وبالتالي يتحدد شكل العلاقة التقديرية في صورة تامة . وهناك عدة طرق لتحديد هذه العلاقة منها التمهيد باليد (أو بمجرد النظر) وطريقة المربعات الصغرى . فعند اتّباع الطريقة الأولى يستخدم الشكل الانتشاري للمساعدة في تحديد العلاقة المناسبة بين المتغيرين . إلا أن هذه الطريقة لا يمكن الاعتماد عليها؛ لأنها تعطي علاقات مختلفة للبيانات نفسها باختلاف الباحثين ومهاراتهم .

وللخروج من هذه المشكلة وجدت طريقة المربعات الصغرى لتحديد العلاقة الخطية بين المتغيرين والتي سوف نتعرض لها باختصار .

طريقة المربعات الصغرى :

عند اتّباع طريقة التمهيد باليد لتحديد الخط المستقيم الذي يناسب بيانات الشكل الانتشاري أمر يتوقف على الخبرة والمهارة وبالتالي فإن هذا قد يختلف من شخص إلى آخر . ولذلك وجدت طريقة إحصائية يمكن استخدامها لتحديد أفضل خط مستقيم يمكن استخدامه كعلاقة بين متغيرين وهذه الطريقة تسمى طريقة المربعات الصغرى . وهي على النحو التالي:

$\hat{y} = \hat{a} X + \hat{b}$ وقد سميت هذه العلاقة بمعادلة انحدار y على X التقديرية .

حيث $\hat{y}$ القيمة التقديرية للمتغير التابع y و $\hat{a}$ القيمة التقديرية للمعلمة a (ميل معادلة انحدار y على x أى مقدار التغير في y عندما تتغير x بمقدار وحدة واحدة) و $\hat{b}$ القيمة التقديرية للمعلمة b (قيمة y عندما $x=0$ أي الجزء المقطوع من المحور الرأسي)

جميع الحقوق محفوظة لـ مركز المناهج التعليمية والبحوث التربوية ـ ليبيا

$$\hat{a} = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}$$

$$\hat{b} = \overline{y} - \hat{a}\,\overline{x}$$

حيث :

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \qquad \overline{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}$$

مثال (6-6) :

البيانات التالية تمثل الدخل والإنفاق الشهري بالدينار لعشر أسر .

الدخل (X)	73	50	128	170	87	108	135	69	148	132
الإنفاق (y)	30	20	60	80	40	50	60	30	70	60

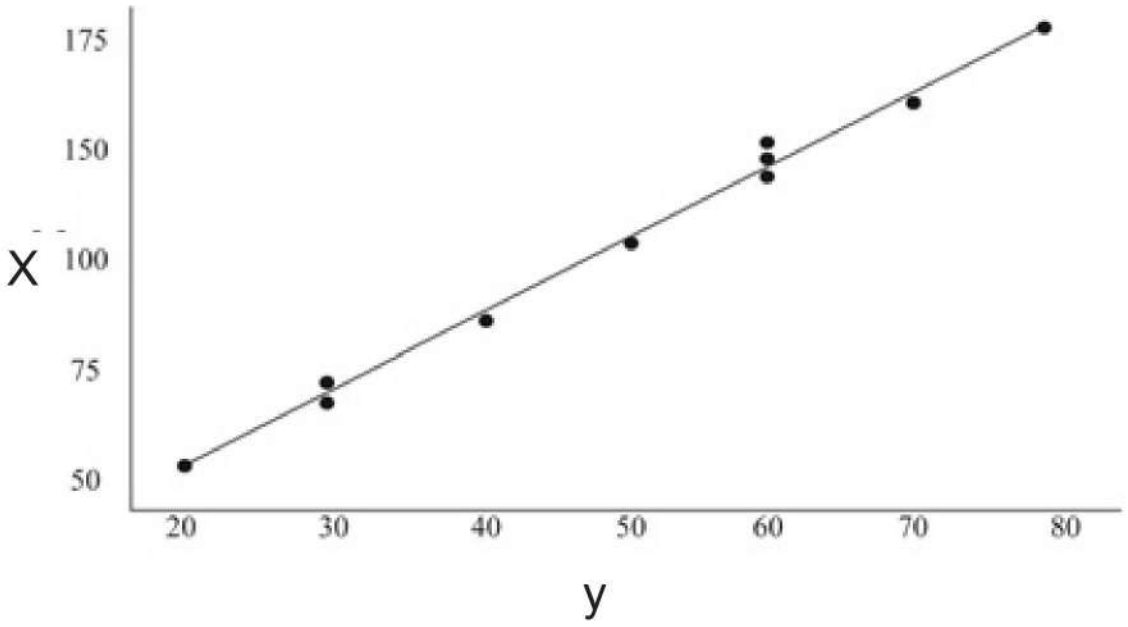
والمطلوب :

1. تحديد العلاقة المناسبة من خلال الشكل الانتشاري .
2. تقدير معادلة انحدار الإنفاق (y) على الدخل (X) المقدرة باستخدام طريقة المربعات الصغرى .
3. تحديد (تقدير) الإنفاق عندما يكون الدخل 110 دينارات .
4. تحديد معامل الارتباط بين الدخل والإنفاق .

الحلّ :

لتحديد العلاقة المناسبة بين المتغيرين X , y نرسم الشكل الانتشاري كما يلي :

جميع الحقوق محفوظة لـ مركز المناهج التعليمية والبحوث التربوية ـ ليبيا



1. من الشكل نلاحظ أن العلاقة الخطية $\hat{y} = \hat{a}x + \hat{b}$ هي العلاقة بين المتغيرين y، X .

2.لتحديد معاملات العلاقة الخطية $\hat{b}$ ، $\hat{a}$ نتبع الآتي :

Y^2	X^2	X Y	Y	x	ر.م
900	5329	2190	30	73	1
400	2500	1000	20	50	2
3600	16384	7680	60	128	3
6400	28900	13600	80	170	4
1600	7569	3480	40	87	5
2500	11664	5400	50	108	6
3600	18225	8100	60	135	7
900	4761	2070	30	69	8
4900	21904	10360	70	148	9
3600	17424	7920	60	132	10
28400	134660	61800	500	1100	المجموع

جميع الحقوق محفوظة لـ مركز المناهج التعليمية والبحوث التربوية ـ ليبيا

$$\hat{a} = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}$$

$$= \frac{10\,(61800) - (1100)\,(500)}{10\,(134660) - (1100)^2}$$

$$= \frac{618000 - 550000}{1346600 - 1210000} = \frac{68000}{136600} = 0.4978$$

لا حظ أن $\hat{a}$ هي معامل معادلة الانحدار المقدرة . أي أنه كلما تغيرت (زادت) X (الدخل) بدينار واحد تغيرت (زادت) y (الإنفاق) بمقدار 0.4978 دينارًا.

$$\hat{b} = \bar{y} - \hat{a}\,\bar{x}$$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{1100}{10} = 110 \quad ، \quad \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n} = \frac{500}{10} = 50$$

$$\hat{b} = 50 - 0.4978\,(110) = 50 - 54.758 = -4.758$$

وحيث أن $\hat{b}$ هي الجزء المقطوع في معادلة الانحدار المقدرة $\hat{y}$ أي أن قيمة y (الإنفاق) المقدرة = 4.758 - عندما يكون الدخل (X) = صفر ، وبالتالي فإن معادلة انحدار y على X التقديرية هي :

$$\hat{y} = 0.4978\,x - 4.758$$

3. الإنفاق عندما يكون الدخل $x = 110$ دنانير

$$\hat{y} = 0.4978(110) - 4.758 = 50$$

جميع الحقوق محفوظة لـ مركز المناهج التعليمية والبحوث التربوية ـ ليبيا

4. معامل الارتباط

$$r = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)}{\sqrt{\left[n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2\right]\left[n\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2\right]}}$$

$$= \frac{(10)(61800) - (500)(1100)}{\sqrt{[\,10(134660) - (1100)^2\,]\;[\,10(28400) - (500)^2]}}$$

$$= \frac{618000 - 550000}{\sqrt{(1346600 - 1210000)\;(284000 - 250000)}}$$

$$= \frac{68000}{\sqrt{(136600)\;(34000)}} = \frac{68000}{68149.835} = 0.9978$$

معامل الارتباط قريب من الواحد وفي هذه الحالة الارتباط طردي قوي وهذا دليل على قوة العلاقة الخطية بين الدخل (X) والإنفاق (y) .

جميع الحقوق محفوظة لـ مركز المناهج التعليمية والبحوث التربوية ـ ليبيا