دولة ليبيا
وزارة التعليم
مركز المناهج التعليمية والبحوث التربوية

الرياضيات

للسنة الثالثة من مرحلة التعليم الثانوي
القسم العلمي

الاسبوع الخامس عشر

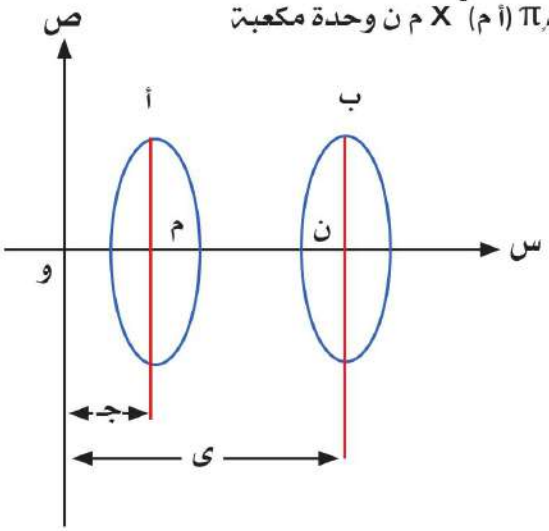
المدرسة الليبية بفرنسا ـ تور

العام الدراسي
1441 / 1442 هـ - 2020 / 2021 م

4-5 حجم المجسم الناشئ من الدوران:

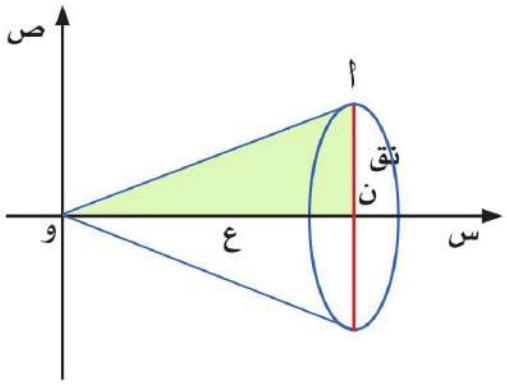
في شكل 5-14 ، أ ب ن م مستطيل حيث م، ن النقطتان (جـ ، 0) ، (ى، 0) على الترتيب. دار المستوى أ ب ن م حول محور س بزاوية قياسها 360°.

إذن أ ب ن م ينشئ مجسمًا دورانيًّا على شكل أسطوانة دائرية طول نصف قطرها أ م وطولها (جـ . ى) يكون حجم الأسطوانة حينئذ π (أ م)^2 × م ن وحدة مكعبة

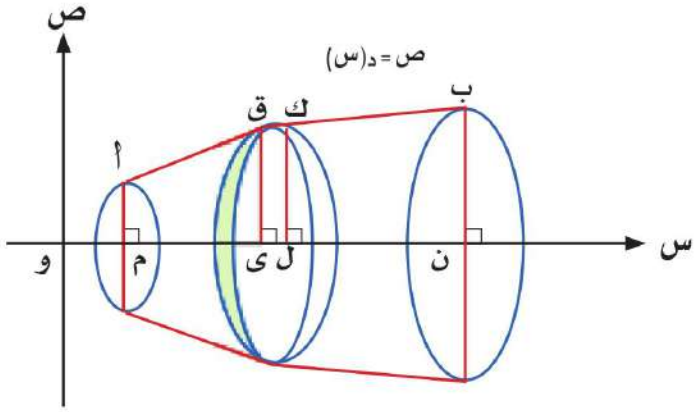


شكل 5-14

بالمثل في شكل 5-15، إذا كان و ن = ع، أ ن = نق، ودار المثلث و أ ن حول محور س بزاوية قياسها 360°، فإن مجسم الدوران هو مخروط دائري قائم حجمه يساوي $\frac{1}{3}\pi$ نق^2 ع وحدة مكعبة



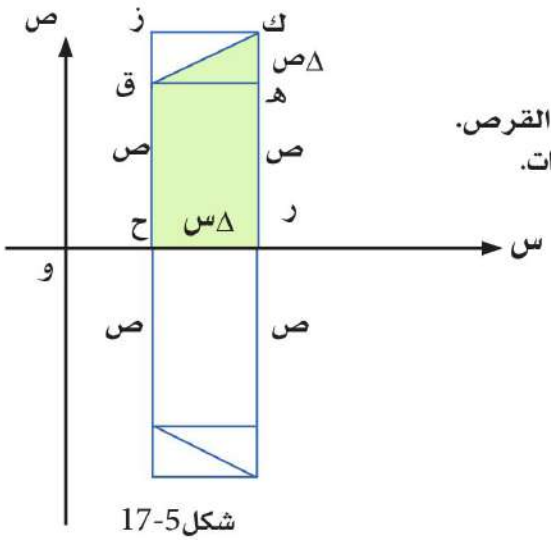
شكل 5-15



شكل 5-16

جميع الحقوق محفوظة لـ مركز المناهج التعليمية والبحوث التربوية ـ ليبيا

في شكل 5-17 أ ب جزء من المنحنى. ص = د(س) أ م ، ب ن خطان مستقيمان يوازيان محور الصادات، حيث م، ن هما النقطتان (أ ، 0)، (ب ، 0) علي الترتيب. وعند دوران أ ب ن م دورة كاملة حول محور السينات نحصل علي جسم دوارني. وبفرض أن جحم هذا الجسم ح وحدة مكعبة.
وإذا كان ق (س، ص) أية نقطة بين أ ، ب وأن نقطة ك (س + Δس، ص + Δص) حيث Δس زيادة صغيرة في س يتبعها تغير صغير في Δص. عند دوران الشريحة ق ك ل ى دورة كاملة حول محور السينات نحصل على قرص رقيق.
نفرض جحم هذا القرص Δح وحدة مكعبة.



شكل5-17

يوضح شكل 5-17 تكبيرًا لهذا القرص.
ك ز، هـ ق يوازيان محور السينات.

لذلك حجم القرص الدوراني الناتج عن:
دوران المنطقة هـ ق ح ر = π ص^2 Δس
دوران المنطقة ز ك ر ح = π (ص + Δص)^2 Δس
إذن π ص^2 Δس < Δح < π (ص + Δص)^2 Δس
وبالقسمة على Δس، π ص^2 < $\frac{\Delta ح}{\Delta س}$ < π (ص + Δص)^2
وعندما Δس ← 0 ، فإن: Δص ← 0، $\frac{\Delta ح}{\Delta س}$ ← $\frac{ء ح}{ء س}$

$$\pi \text{ ص}^2 = \frac{ء ح}{ء س} = \lim_{\Delta س \to 0} \frac{\Delta ح}{\Delta س}$$

$$ح = \int \left(\frac{ء ح}{ء س} \right) ء س$$

$$= \int \pi \text{ ص}^2 \, ء س$$

لدينا الآن جحم جسم دوراني كتكامل للدالة ص.

جميع الحقوق محفوظة لـ مركز المناهج التعليمية والبحوث التربوية

وعند تحرك نقطة ق من أ إلى ب فإن الحجم يعطى بتكامل محدود، لذلك حجم مجسم الدوارن يساوي:

$$ح = \int_{أ}^{ب} \frac{ح}{س} \, ح س$$

$$ح = \int_{أ}^{ب} \pi \, ص^2 \, \Delta س$$

$$ح = \int_{أ}^{ب} \pi \, ص^2 \, ح س$$

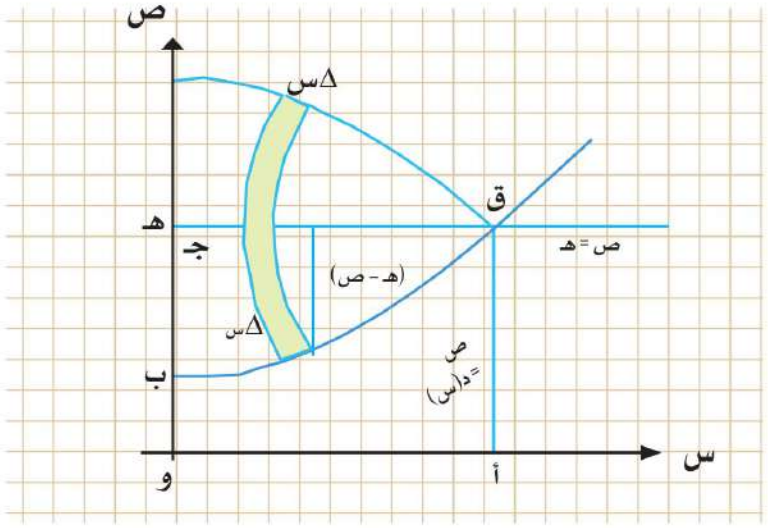
إذا دار المنحنى ص = د(س) حول محور ص دورة كاملة، فإن حجم الجسم الدوراني المتولد بين النقطتين اللتين إحداثياهما الصاديان هما أ، ب يعطيان بالعلاقة

$$ح = \int_{أ}^{ب} \pi \, س^2 \, ح ص \quad \Leftarrow \quad ح = \pi \int_{أ}^{ب} [\, د(ص) \,]^2 \, ح ص$$

تمرين :
أي خط مستقيم خلاف محور السينات ومحور الصادات يمكن استخدامه أيضًا كمحور دوران.

الطريقة السابقة لإجاد مجسم الدوران تعرف بطريقة القرص.

يوضح شكل 5-18 جزءًا من المنحنى ص = د(س) والخط المستقيم ص = هـ. نفرض أن نقطة تقاطع المنحني والمستقيم هي ق (أ، هـ)، فأوجد حجم الجسم الدوراني ق ب هـ، أي دوران المنطقة المحاطة بالمنحني والخط المستقيم ص = هـ ومحور ص حول المستقيم.



شكل 5-18

تأمل حجم العنصر المظلل في شكل 5-18 نفرض أن سمك هذه الشريحة الأسطوانية Δس، طول نصف قطر الأسطوانة الرقيقة يساوي (هـ - ص).

جميع الحقوق محفوظة لـ مركز المناهج التعليمية والبحوث التربوية ـ ليبيا

إذن: حجم الشريحة = π (هـ - ص)$^2 \Delta$س وإذا اعتبرناها شريحة للحجم من س = 0 إلى س = أ للمنحنى، فإن الحجم المطلوب يساوي :

$$\pi \int_0^{أ} (هـ - ص)^2 \, ؤس$$

بالمثل عند س = أ إلى س = ب، حيث أ < ب فإن:

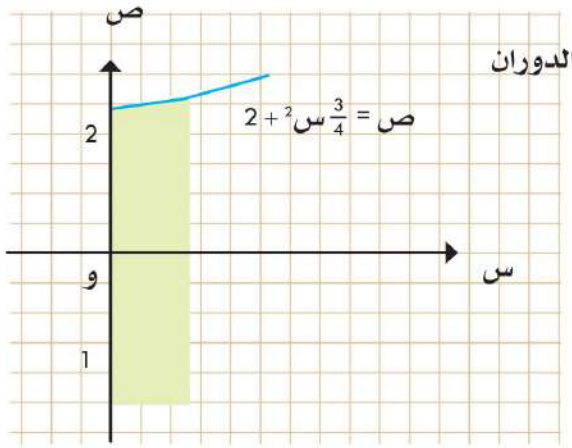
حجم الجسم الدوراني = $\pi \int_0^{أ} (هـ - ص)^2 \, ؤس$

مثال 9:

أوجد حجم الجسم الدوراني الناتج عن دوران المنطقة المحاطة بالمنحنى: ص = $\frac{3}{4}$ س^2 + 2، المحور س، المستقيمان س = 1، س = 0 عندما يدور دورة كاملة حول المحور س.

الحل:

يوضح شكل 5-19 جزءًا من مجسم الدوران



شكل 5-19

حجم الجسم الدوراني:

$$= \pi \int_0^1 ص^2 \, ؤس$$

$$= \pi \int_0^1 \left(2 + \frac{3}{4} س^2\right)^2 \, ؤس$$

$$= \pi \int_0^1 \left(2 + 3 س^2 + \frac{9 س^4}{16}\right) \, ؤس$$

(يمكن إخراج π خارج علامة التكامل)

$$= \pi \left[4س + س^3 + \frac{9 س^5}{5 \times 16}\right]_0^1$$

$$= \pi \left[4 + 1 + \frac{9}{5 \times 16}\right) - 0$$

$$= \pi \left(\frac{9}{80}\right) 5$$

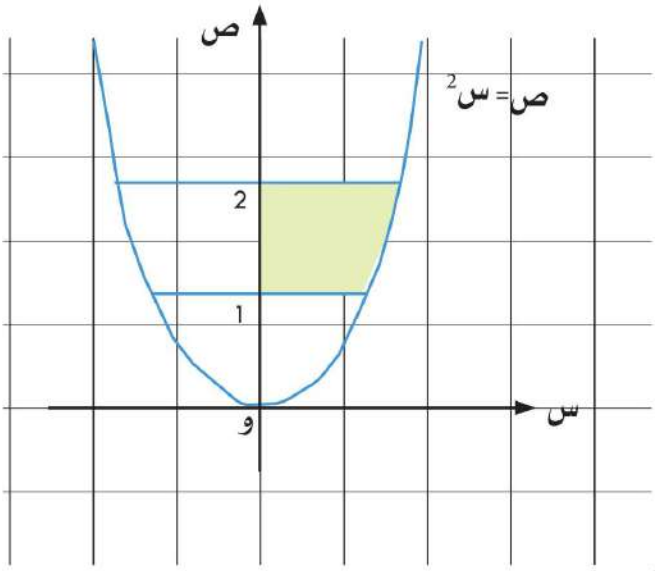
$$= \pi 5 \frac{9}{80} \text{ وحدة مكعبة}$$

الحجم المطلوب $\pi 5 \frac{9}{80}$ وحدة مكعبة

جميع الحقوق محفوظة لـ مركز المناهج التعليمية والبحوث التربوية

مثال 10:

أوجد حجم الجسم الدوراني عندما تدور المنطقة المحاطة بالمنحنى ص = س^2، المستقيمات س = 0 ، ص = 1 ، ص = 2 في الربع الأول حول محور ص دورة كاملة.



شكل5-20

الحجم المطلوب

$$ع = \pi \int_1^2 س^2 \, ءص$$

$$= \pi \int_1^2 ص \, ءص$$

$$= \pi \left[\frac{ص^2}{2}\right]_1^2$$

$$= \pi 2 - \pi \frac{1}{2}$$

$$= \pi 1\frac{1}{2} \text{ وحدة مكعبة.}$$

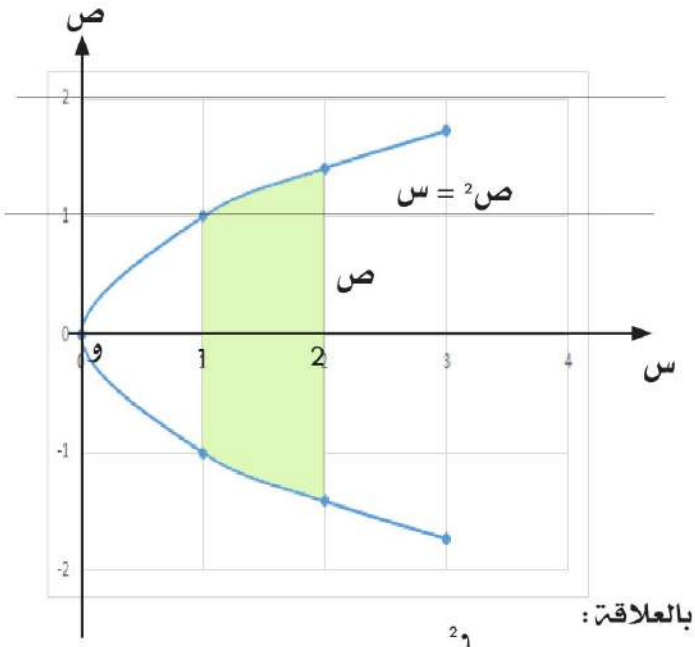
الحجم المطلوب يساوي $\pi 1\frac{1}{2}$ وحدة مكعبة.

جميع الحقوق محفوظة لـ مركز المناهج التعليمية والبحوث التربوية ـ ليبيا

مثال 11:

دارت المنطقة المحاطة بالمنحنى $ص^2 = س$ والمستقيمان $س = 1$ ، $س = 2$ حول محور س بزاويتين قائمتين، احسب حجم الجسم الناشئ عن الدوران

الحل:



شكل 5-21

يعطى الحجم بالعلاقة:

$$= \pi \int_1^2 ص^2 \, ؤ س$$

حيث المساحة المطلوبة تساوي $= \pi \int_1^2 س \, ؤ س$

$$= \pi \left[\frac{س^2}{2} \right]_1^2$$

$$= \pi \left(\frac{4}{2} - \frac{1}{2} \right)$$

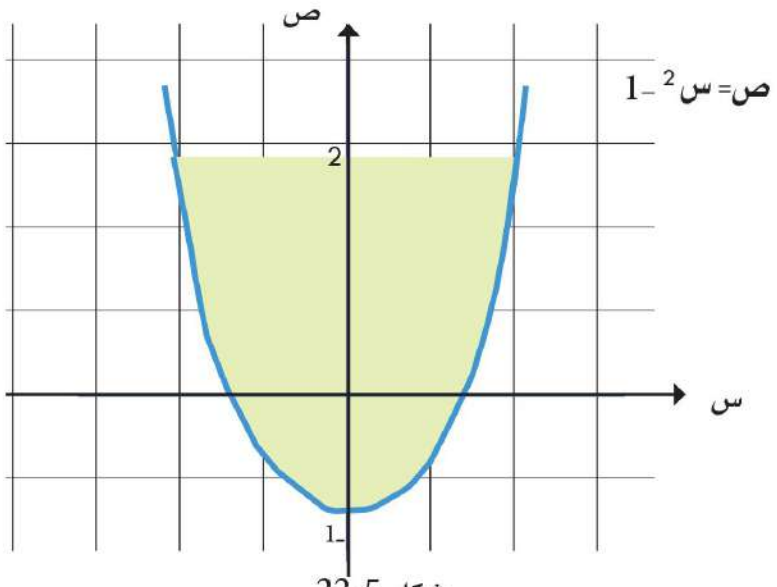
$$= \pi \, 1\frac{1}{2}$$

الحجم المطلوب $\pi \, 1\frac{1}{2}$ وحدة مكعبة.

جميع الحقوق محفوظة لـ مركز المناهج التعليمية والبحوث التربوية

مثال 12:

احسب حجم الجسم الدوراني الناشئ عن دوران المنطقة المحاطة بالمنحنى والمستقيم ص=2 حول محور ص بزاويتين قائمتين.



شكل 5-22

ملحوظة

في هذا المثال كان الدوران بزاويتين قائمتين فقط حول محور الدوران. لاحظ أن محور الدوران هنا هو أيضًا محور تماثل للمنطقة المطلوب دورانها، في هذه الحالة، نحصل على جسم دوراني. عندما يكون محور الدوران ليس محور تماثل المنطقة، فإن الدورة الكاملة تلزم للحصول على جسم دوراني.

المنطقة المحاطة بالمنحنى ص = س^2 - 1 والمستقيم ص = 2 هي المنطقة المظللة في شكل 5 ـ 22. عندما تدور هذه المنطقة حول محور ص زاويتين قائمتين، فإن الحجم المولد من الدوران ح يعطى بالعلاقة.

$$ح = \pi \int س^2 \, د ص$$

ولدينا $ص = س^2 - 1$

$$\Leftarrow س^2 = ص + 1$$

$$\therefore ح = \pi \int_{1-}^{2} (ص + 1) \, د ص$$

$$= \pi \left[ص + \frac{ص^2}{2} \right]_{1-}^{2}$$

$$= \pi (2 + 2) - \pi \left(1 - \frac{1}{2} \right)$$

$$= \pi (4) + \frac{1}{2} \pi$$

$$= \pi 4 \frac{1}{2} \text{ وحدة مكعبة}$$

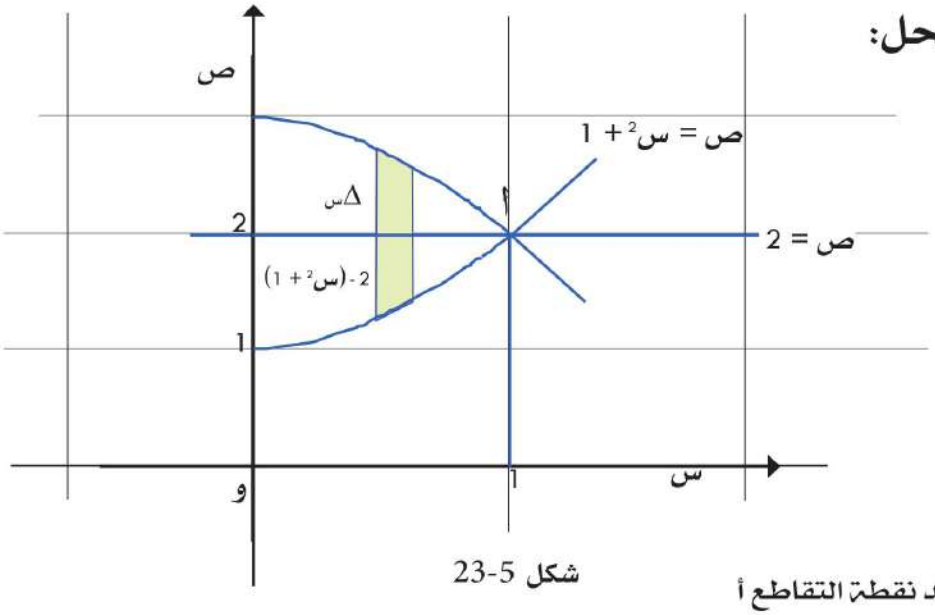
الحجم المطلوب يساوي $\pi 4 \frac{1}{2}$ وحدة مكعبة

جميع الحقوق محفوظة لـ مركز المناهج التعليمية والبحوث التربوية ـ ليبيا

مثال 13:

دارت المنطقة المحاطة بالمنحنى ص = س^2 + 1 والمستقيم ص = 2، محور ص 360 ° في الربع الأول دورة كاملة حول المستقيم ص = 2 . أوجد حجم المجسم الناشئ من الدوران.

الحل:



شكل 5-23

عند نقطة التقاطع أ

س^2 + 1 = 2

س^2 = 1

س = 1 (أخذنا القيمة الموجبة فقط)

حجم الشريحة يساوي = π { 2 - (س^2 + 1)}^{2} Δس

الحجم المطلوب يساوي = $\pi \int_0^1 \{2 - (س^2 + 1)\}^2$ دس

$= \pi \int_0^1 (2 - س^2 + 1)^2$ دس

$= \pi \int_0^1 (1 - س^2)^2$ دس

$= \pi \int_0^1 (1 - 2س^2 + س^4)$ دس

$= \pi \left[س - \frac{2س^3}{3} + \frac{س^5}{5}\right]_0^1$

$= \pi \left(1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5}\right) - 0$

$= \frac{8}{15}\pi$ وحدة مكعبة

حجم الجسم المطلوب يساوي $\frac{8}{15}\pi$ وحدة مكعبة

جميع الحقوق محفوظة لـ مركز المناهج التعليمية والبحوث التربوية