دولة ليبيا
وزارة التعليم
مركز المناهج التعليمية والبحوث التربوية

الرياضيات

للسنة الثالثة من مرحلة التعليم الثانوي
القسم العلمي

الاسبوع الثامن عشر

المدرسة الليبية بفرنسا - تور

العام الدراسي
1441 / 1442 هـ - 2020 / 2021 م

2-6 مشتقة جا س :

نفرض أن ص = جا س $\longleftarrow$ (1)

نفرض أن Δس كمية صغيرة في س ، Δص كمية مقابلة في ص.

ص + Δص = جا (س + Δس) $\longleftarrow$ (2)

بطرح (1) من (2)

Δص = جا (س + Δس) - جا س

$\Leftarrow$ Δص = 2 جتا (س + $\frac{\Delta س}{2}$) جا ($\frac{\Delta س}{2}$)

[باستخدام جا ق- جا ت = 2 جتا $\frac{ق + ت}{2}$ جا $\frac{ق - ت}{2}$]

بالقسمة على Δس: $\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{2 \text{ جتا } (س + \frac{\Delta س}{2}) \text{ جا } (\frac{\Delta س}{2})}{\Delta س}$

$= \frac{\text{جتا } (س + \frac{\Delta س}{2}) \text{ جا } (\frac{\Delta س}{2})}{\frac{\Delta س}{2}}$

$\Leftarrow$ $\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \text{جتا } (س + \frac{\Delta س}{2}) \times \frac{\text{جا } (\frac{\Delta س}{2})}{\frac{\Delta س}{2}}$

الآن نفرض Δس $\leftarrow$ 0 ، إذن $\frac{\Delta ص}{\Delta س} \leftarrow \frac{ءص}{ءس}$ ، جتا (س + $\frac{\Delta س}{2}$) $\leftarrow$ جتا س،

$\frac{\text{جا } (\frac{\Delta س}{2})}{\frac{\Delta س}{2}} \longrightarrow 1$

$\therefore$ $\lim\limits_{س \to 0} \frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ءص}{ءس} =$ جتا س

$\therefore$ $\frac{ء}{ءس}$ (جا س) = جتا س

مثلا : $\frac{ء}{ءس}$ (جا 3 س) = 3 جتا 3 س

3-6 مشتقة جتا س :

نفرض أن ص = جتا س $\longrightarrow$ (1)

نفرض أن Δس كمية صغيرة في س ، Δص كمية مقابلة في ص.

ص + Δص = جتا (س + Δس) $\longrightarrow$ (2)

بطرح (1) من (2)

Δص = جتا (س + Δس) - جا س

$\Leftarrow$ Δص = 2 جا (س + $\frac{\Delta س}{2}$) جا ($\frac{\Delta س}{2}$)

[باستخدام جتا ق - جتا ت = $-$ 2 جا $\frac{ق + ت}{2}$ جا $\frac{ق - ت}{2}$]

بالقسمة على Δس: $\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{-2 \text{ جا } (س + \frac{\Delta س}{2}) \text{ جا } (\frac{\Delta س}{2})}{\Delta س}$

$= \frac{-\text{ جا } (س + \frac{\Delta س}{2}) \text{ جا } (\frac{\Delta س}{2})}{\frac{\Delta س}{2}}$

$\Leftarrow$ $\frac{\Delta ص}{\Delta س} = -\text{ جا } (س + \frac{\Delta س}{2}) \times \frac{\text{جا } (\frac{\Delta س}{2})}{\frac{\Delta س}{2}}$

الآن نفرض Δس $\leftarrow$ 0 ، إذن $\frac{\Delta ص}{\Delta س} \leftarrow \frac{ءص}{ءس}$ ، $-$ جا (س + $\frac{\Delta س}{2}$) $\leftarrow$ $-$ جا س،

$\frac{\text{جا } (\frac{\Delta س}{2})}{\frac{\Delta س}{2}} \longrightarrow 1$

$\therefore$ نهـــا$_{س \leftarrow 0}$ $\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ءص}{ءس} = -$ جا س

$\therefore$ $\frac{ء}{ءس}$ (جتا س) = $-$ جا س

مثلا : $\frac{ء}{ءس}$ (جتا 3 س) = - 3 جا 3 س

6-4 مشتقة ظا س :

يمكن إيجاد مشتقة ظا س باستخدام قاعدة القسمة في التفاضل.

$$\frac{ء}{ءس}(\text{ظا س}) = \frac{ء}{ءس}\left(\frac{\text{جا س}}{\text{جتا س}}\right)$$

$$= \frac{\text{جتا س}\frac{ء}{ءس}(\text{جا س}) - \text{جا س}\frac{ء}{ءس}(\text{جتا س})}{\text{جتا}^2\text{ س}}$$

$$= \frac{\text{جتا س جتا س + جا س جا س}}{\text{جتا}^2\text{ س}}$$

$$= \frac{\text{جا}^2\text{ س + جتا}^2\text{ س}}{\text{جتا}^2\text{ س}}$$

$$= \frac{1}{\text{جتا}^2\text{ س}} = \text{قا}^2\text{ س}$$

$$\frac{ء}{ءس}(\text{ظا س}) = \text{قا}^2\text{ س}$$

6-5 مشتقات جا (أ س + ب)، جتا (أ س + ب)، ظا (أ س + ب) حيث أ ، ب ثابتان

نفرض ص = جا (أ س + ب)

$\therefore$ $\frac{ءص}{ءس}$ = جتا (أس + ب) $\frac{ء}{ءس}$ (أس + ب) [باستخدام قاعدة دالة الدالة]

= [جتا (أ س + ب)] × أ

= أ جتا (أ س + ب)

$\frac{ء}{ءس}$ جا (أ س + ب) = أ جتا (أ س + ب)

بالمثل $\frac{ء}{ءس}$ جتا (أ س + ب) = - أ جا (أ س + ب)،

$\frac{ء}{ءس}$ ظا (أ س + ب) = أ قا^2 (أ س + ب)

مثال 8:

فاضل كلا مما يأتي بالنسبة إلى س:

(أ) جا 5 س

(ب) جتا 2 س

(جـ) 4 ظا $\frac{1}{2}$ س

(د) جا (2 س - 1)

(هـ) جتا (1 - 3 س)

(و) ظا (1+ 5 س)

الحل:

(أ) $\frac{ء}{ءس}$ (جا 5 س) = 5 جتا 5 س

(ب) $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}$ (جتا 2 س) = − 2 جا 2 س

(جـ) $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}$ (4 ظا $\frac{1}{2}$ س) = $\frac{1}{2}$ × 4 قا^2 $\frac{1}{2}$ س = 2 قا^2 $\frac{1}{2}$ س

(د) $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}$ [جا (2 س − 1)] = جتا (2 س − 1) $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}$ (2 س − 1)

= 2 جتا (2 س − 1)

(هـ) $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}$ [جتا (1 - 3 س)] = - جا (1 − 3 س) × (−3)

= 3 جا (1 - 3 س)

(و) $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}$ [ظا (1 + 5 س)] = قا^2 (1 + 5 س) × (5)

= 5 قا^2 (1 + 5 س)

مثال 9:

أوجد مشتقة كل مما يأتي بالنسبة إلى س:

(أ) $\frac{\text{جا 2س}}{\text{3س}}$ (ب) 3 س جتا 2 س

الحل:

باستخدام قاعدة خارج القسمة في التفاضل

(أ) $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}$ ($\frac{\text{جا 2س}}{\text{3س}}$) = $\frac{\text{3س } \frac{\text{ء}}{\text{ءس}}\text{(جا 2س) - جا 2س } \frac{\text{ء}}{\text{ءس}}\text{(3س)}}{\text{(3س)}^2}$

= $\frac{\text{3 س (2 جتا 2 س) - (جا 2 س) (3)}}{\text{9س}^2}$

= $\frac{\text{6 س جتا 2 س - 3 جا 2 س}}{\text{9س}^2}$

= $\frac{\text{2 س جتا 2 س - جا 2 س}}{\text{3 س}^2}$

باستخدام قاعدة حاصل الضرب في التفاضل

(ب) $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}$(3 س جتا 2 س) = جتا 2 س $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}$(3 س) + 3 س $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}$(جتا 2س)

= (جتا 2 س) (3) + 3 س (- 2 جا 2 س)

= 3 (جتا 2 س - 2 س جا 2 س)

6-7 تكامل جا س، جتا س، قا^2 س:

∵ $\frac{d}{dس}$(جتا س) = - جا س

∴ $\int$ - جا س ءس = جتا س + ث (حيث ث ثابت)

إذن، يتبع هذا أن تكامل جا س يعطى كالآتي:

$\int$ جا س ءس = - جتا س + ث (حيث ث ثابت)،

∵ $\frac{d}{dس}$(جا س) = جتا س

∴ $\int$ جتا س ءس = جا س + ث (حيث ث ثابت)،

∵ $\frac{d}{dس}$(ظا س) = قا^2 س

∴ $\int$ قا^2 س ءس = ظا س + ث (حيث ث ثابت)

8-6 تكامل جا أ س، جتا أ س، قا^2 أ س حيث أ ثابت

∵ $\frac{د}{د س}$ جتا أ س = - أ جا أ س

∴ $\int$ - أ جا أ س د س = جتا أ س + ث (حيث ث ثابت)

∴ $\int$ - جا أ س د س = $\frac{1}{أ}$ جتا أ س + $ث_1$ (حيث $ث_1$ ثابت)

⇐ $\int$ جا أ س د س = - $\frac{1}{أ}$ جتا أ س + $ث_2$ (حيث $ث_2$ ثابت)

بالمثل:

$\frac{د}{د س}$ جا أ س = أ جتا أ س

∴ $\int$ جتا أ س د س = $\frac{1}{أ}$ جا أ س + ث (حيث ث ثابت)

$\frac{د}{د س}$ ظا أ س = أ قا^2 أ س

∴ $\int$ قا^2 أ س د س = $\frac{1}{أ}$ ظا أ س + ث (حيث ث ثابت)

مثال 12:

كامل كلا مما يأتي بالنسبة إلى س:

(أ) جا 2 س (ب) جتا 5 س

(جـ) قا^2 3 س (د) 2 جتا 4 س

الحل:

(أ) $\int$ جا 2س د س = $\frac{\text{- جتا 2 س}}{2}$ + ث (حيث ث ثابت)،

(ب) $\int$ جتا 5 س د س = $\frac{\text{جا 5س}}{5}$ + ث (حيث ث ثابت)،

(جـ) $\int$ قا^2 3 س د س = $\frac{\text{ظا 3س}}{3}$ + ث، (حيث ث ثابت)،

(د) $\int$ 2 جتا 4 س د س = $\frac{\text{2جا 4 س}}{4}$ + ث (حيث ج ثابت)،

9-6 تكامل جا (أ س + ب)، جتا (أ س + ب)، قا^2 (أ س + ب)

لإيجاد تكامل جا (أ س + ب)، حيث أ ، ب ثابتان، نلاحظ $\frac{ى}{ى س}$ [جتا (أ س + ب)].

نعلم أن: $\frac{ى}{ى س}$ [جتا (أ س + ب)] = - أ جا (أ س + ب)،

∴ $\int$ - أ جا (أ س + ب) ى س = جتا (أ س + ب) + ث$_1$، (حيث ث$_1$ ثابت)

∴ $\int$ - جا (أ س + ب) ى س = $\frac{1}{أ}$ جتا (أ س + ب) + ث$_2$، (حيث ث$_2$ ثابت)

⇐ $\int$ جا (أ س + ب) ى س = - $\frac{1}{أ}$ جتا (أ س + ب) + ث، (حيث ث ثابت)

بالمثل: $\frac{ى}{ى س}$ جا (أ س + ب) = أ جتا (أ س + ب)

⇐ $\int$ جتا (أ س + ب) ى س = $\frac{1}{أ}$ جا (أ س + ب) + ث، (حيث ث ثابت)

$\frac{ى}{ى س}$ [ظا (أ س + ب)] = أ قا^2 (أ س + ب)

⇐ $\int$ قا^2 (أ س + ب) ى س = $\frac{1}{أ}$ ظا (أ س + ب) + ث (حيث ث ثابت)

جميع الحالات السابقة صواب بشرط أ ≠ 0. إذا كان أ = 0 تصبح المقادير الجبرية ثوابت ومشتقة الثابت تساوي صفرًا . هذا مناسب حيث التكامل الناتج يجب أن يُقسم على مشتقة أ س ، القسمة على صفر غير مُعرَّفة.

مثال 13: كامل بالنسبة إلى س:

(أ) جا (س + 2) (ب) جا (1 - 2 س) (جـ) جتا (3 س -2)

(د) قا^2 (1+ 5 س) (هـ) 3 جتا (2 س + 1)

الحل:

(أ) $\int$ جا (س + 2) ى س = -جتا (س + 2) + ث، (حيث ث ثابت)

(ب) $\int$ جا (1 -2 س) ى س = $\frac{1}{2}$ جتا (1 -2 س) + ث، (حيث ث ثابت)

(جـ) $\int$ جتا (3 س- 2) ى س = $\frac{1}{3}$ جا (3 س - 2) + ث، (حيث ث ثابت)

(د) $\int$ قا^2 (1+ 5 س) ى س = $\frac{1}{5}$ ظا (1+ 5 س) + ث، (حيث ث ثابت)

(هـ) $\int$ 3 جتا (2 س + 1) ى س = $\frac{3}{2}$ جا (2 س + 1) + ث، (حيث ث ثابت)

مثال 14: احسب $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$ جتا س ءس

الحل:

$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$ جتا س ءس = جا س $\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$

= جا π - جا $\frac{\pi}{2}$

= - 1

الملخص:

(1) ء/ءس (جا س) = جتا س

ء/ءس (جتا س) = – جا س

ء/ءس (ظا س) = قا² س

(2) ∫ جا س ءس = – جتا س + ث، حيث ث ثابت

∫ جتا س ءس = جا س + ث، حيث ث ثابت

∫ قا² س ءس = ظا س + ث، حيث ث ثابت

(3) ء/ءس [جا (أ س + ب)] = أ جتا (أ س + ب)

ء/ءس [جتا (أ س + ب)] = – أ جا (أ س + ب)

ء/ءس [ظا (أ س + ب)] = أ قا² (أ س + ب)

(4) ∫ جا أ س ءس = – $\frac{1}{أ}$ جتا أ س + ث، حيث ث ثابت

∫ جتا أ س ءس = $\frac{1}{أ}$ جا أ س + ث، حيث ث ثابت

∫ قا² أ س ءس = $\frac{1}{أ}$ ظا أ س + ث، حيث ث ثابت

(5) ∫ جا (أ س + ب) ءس = – $\frac{1}{أ}$ جتا (أ س + ب) + ث، حيث ث ثابت

∫ جتا (أ س + ب) ءس = $\frac{1}{أ}$ جا (أ س + ب) + ث، حيث ث ثابت

∫ قا² (أ س + ب) ءس = $\frac{1}{أ}$ ظا (أ س + ب) + ث، حيث ث ثابت

بشرط أنه في جميع الحالات السابقة أ ≠ 0

(6) ء/ءس (جاⁿ س) = ن جا^(ن–1) س جتا س

ء/ءس (جتاⁿ س) = – ن جتا^(ن–1) س جا س

ء/ءس (ظاⁿ س) = ن ظا^(ن–1) س قا² س