دولة ليبيا
وزارة التعليم
مركز المناهج التعليمية والبحوث التربوية

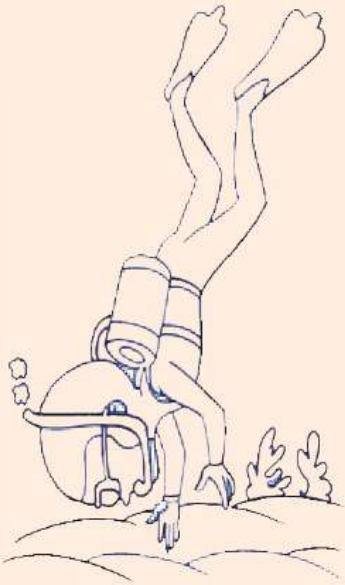
الرياضيات

للصف الأول من مرحلة التعليم الثانوي

الاسبوع السابع عشر

المدرسة الليبية بفرنسا ـ تور

5 التغير Variations



انتبه لا تغوص إلى العمق أكثر من اللازم فالضغط يزداد بزيادة العمق.

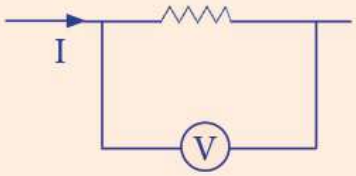
لربما وردت عليك عبارات في العلوم مثل:

يتناسب التيار (I) المار في موصل كهربائي مع الجهد (V) عبره.

بالنسبة لكتلة محددة من الغاز فإن الحجم يتناسب عكسياً مع الضغط (بشرط ثبات درجةالحرارة).

يزداد ضغط السائل بزيادة العُمق.

تبين كل هذه العبارات أهمية تطبيقات التغير في مجالات العلوم المتعددة.



وفي نهاية هذ الفصل سوف تتمكن من:

- تكوين معادلة تربط عدة متغيرات.
- حل مسائل تتضمن التغير الطردي والعكسي.

5-1 التغير الطردي Direct Variation

يبين الجدول التالي تكلفة كميات معينة من الأرز:

كمية الأرز بالكجم (أ)	4	8	12	16	20
التكلفة بالدينار (د)	6	12	18	24	30

تزداد تكلفة الأرز كلما زادت كميته كما أن نسبة التكلفة إلى كمية الأرز ثابتة لكل زوج من القيم الموجودة بالجدول بمعنى:

$$\frac{د}{أ} = \frac{6}{4} = \frac{12}{8} = \frac{18}{12} = \frac{24}{16} = \frac{30}{20} = \frac{3}{2}$$ أو 1.5

$$\therefore \quad د = \frac{3}{2} \, أ$$

ولهذا فإن كل كيلو جرام يتكلف 1.5 دينار، يمكن تمثيل هذه المعلومات في رسم بياني مثل الموجود في الصفحة التالية.

جميع الحقوق محفوظة لـ مركز المناهج التعليمية والبحوث التربوية ـ ليبيا

الشكل البياني هوخط مستقيم يمر بنقطة الأصل، يمكن رؤية أنه :

- إذا زادت كمية الأرز ثلاثة أضعاف، فإن التكلفة تتضاعف ثلاث مرات،
- وإذا انخفضت كمية الأرز إلى النصف انخفضت التكلفة إلى النصف،

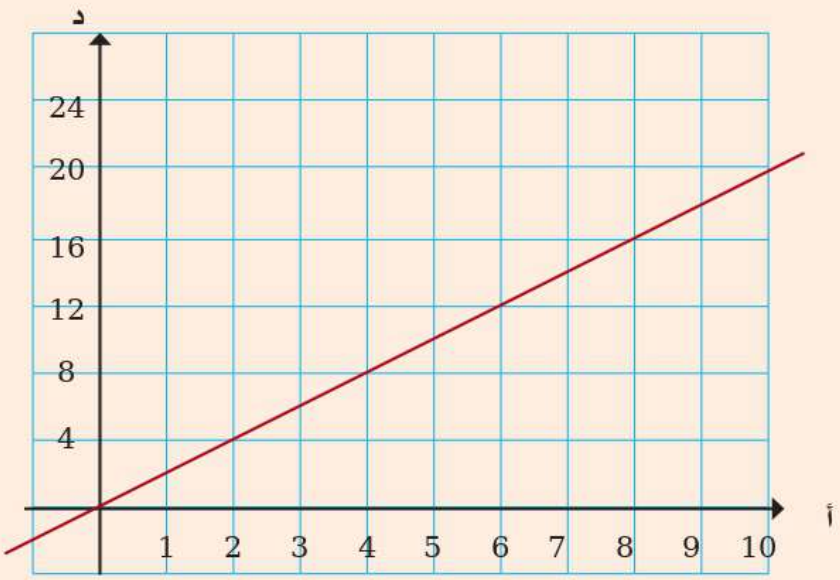
ولهذا فإن كلا من جـ ، أ متغيران حيث يأخذان قيم مختلفة.

تأمل الآن تكلفة كميات معينة من السكر مبينة في الجدول التالي:

كمية السكر بالكجم(أ)	2	4	6	8	10
التكلفة بالدينار (د)	4	8	12	16	20

$$\frac{د}{أ} = \frac{4}{2} = \frac{8}{4} = \frac{12}{6} = \frac{16}{8} = \frac{20}{10} = 2$$

∴ د = 2 أ وعليه فإن كل كيلو جرام سكر يتكلف 2 دينار.



جميع الحقوق محفوظة لـ مركز المناهج التعليمية والبحوث التربوية ـ ليبيا

مرة أخرى الشكل البياني هو خط مستقيم يمر بنقطة الأصل، وفي مواقف مثل هذه حيث العلاقة بين المتغيرين ثابتة ، نقول أن أحد المتغيرين يتناسب طرديا مع الآخر ولهذا :

د تتغير طرديا بتغير أ .

أو د تتناسب طرديا مع أ .

تشير العلامة ($\propto$) إلى (يتناسب مع) أي أن د $\propto$ أ .

ملاحظات Notes

وإذا كان $\frac{د}{أ}$ = ك حيث ك ثابت فإن العلاقة بين د ، أ يمكن كتابتها كمعادلة على الصورة: د = ك أ حيث ك ثابت.

● ماذا تمثل ك في العلاقة السابقة

ص $\propto$ س تعني أن ص = ك س حيث ك ثابت .

مثال 1 :

بالنسبة لكل جدول حدد ما إذا ص تتغير طرديا بتغير س ثم أوجد المعادلة التي تربط بين س ، ص .

(أ)

س	2	4	7
ص	8	16	28

(ب)

س	1	3	4
ص	2-	6	4

الحل :

● الكمية الثابتة ك = 4
يجب مقارنة جميع النسب.

(أ) $\frac{ص}{س} = \frac{8}{2} = \frac{16}{4} = \frac{28}{7} = 4$

∴ ص تتغير طرديا بتغير س ، ص = 4 س .

(ب) $\frac{ص}{س} = \frac{2-}{1} = 2-$

$\frac{ص}{س} = \frac{6}{3} = 2$

$\frac{ص}{س} = \frac{4}{4} = 1$

حيث $\frac{ص}{س}$ ليس ثابتا فإن ص لا تتغير طرديا بتغير س .

مثال 2 :

إذا كانت ع تتغير طرديا بتغير (ت) وكانت د = 120 عندما ت = 2.

(أ) أوجد المعادلة التي تربط بين د ، ت

(ب) أوجد قيمة د عندما ت = 60

(جـ) أوجد قيمة ت عندما د = 60

جميع الحقوق محفوظة لـ مركز المناهج التعليمية والبحوث التربوية ـ ليبيا

الحل :

(أ) حيث د $\propto$ ت

لدينا د = ك ت عندما ك متغير ثابت.

بمعلومية د = 120 عندما ت = 2

120 = ك (2)

ك = 60

∴ المعادلة د = 60 ت

ملحوظة Note

عوض عند د ، ت لتجد ك .

(ب) بالتعويض عن قيمة ت = 6 في د = 60 ت

نجد أن: د = 60 × 6 = 360

(جـ) بالتعويض عن قيمة د = 60 في د = 60 ت

نجد أن: 60 = 60 ت

ت = 1

مثال 3 :

بالنسبة للجدول التالي ب يتناسب طرديا مع أ

أ	1	2	3	
ب	7	14		49

(أ) أوجد المعادلة التي تربط بين أ ، ب

(ب) أوجد القيم المتروكة في الجدول

الحل :

(أ) حيث

$$\frac{ب}{أ} = \frac{7}{1} = \frac{14}{2} = 7$$

نجد أن: ب = 7 أ

(ب) بالتعويض عن: قيمة أ = 3 في ب = 7 أ

نجد ان: ب = 7 × 3 = 21

التعويض عن: قيمة ب = 49 في ب = 7 أ

نجد ان: 7 أ = 49

أ = 7

جميع الحقوق محفوظة لـ مركز المناهج التعليمية والبحوث التربوية ـ ليبيا

5 - 2 أشكال أخرى للتغير الطردي Other Forms of Direct Variation

افترض مكعبا طول ضلعه ت سم ، الجدول يوضح كيفية تغيير مساحة سطح المكعب أ سم^2 بدلالة ت .

ت سم	1	2	3	4	5
أ سم^2	6	24	54	96	150
$\frac{أ}{ت}$ سم	6	12	18	24	30

لاحظ $\frac{أ}{ت}$ ليست ثابتة ولذا فإن أ لاتتناسب طرديا مع ت ، ولكن إذا اعتبرنا النسبة $\frac{أ}{ت^2}$ سوف نحصل على:

$$\frac{أ}{ت^2} = \frac{6}{1} = \frac{24}{4} = \frac{54}{9} = \frac{96}{16} = \frac{150}{25} = 6 \text{ (ثابت)}$$

ولهذا فإن أ تتناسب طرديا مع ت^2 ، أي أن مساحة سطح المكعب تتغير طرديا بتغير مربع طول ضلعه، ومن ثم المعادلة هي أ = 6 ت^2

مثال 4 :

إذا كانت ص $\propto$ س^2، ص = 12 عندما س = 2 ، أوجد:

(أ) ص عندما س = 5 (ب) س عندما ص = 15

الحل :

(أ) إذا كانت ص $\propto$ س^2، ص = 12 عندما س = 2

ص = م س^2 حيث م مقدار ثابت.

بالتعويض عن قيمة كل من ص ،س نحصل على:

$12 = 4$ م

$\therefore$ م $= \frac{12}{4} = 3$

ولذا ص = 3 س^2

(أ) عندما س = 5 فإن ص = $3(5)^2 = 3 \times 25 = 75$

(ب) عندما ص = 15 فإن 3 س^2 = 15

$\therefore$ س^2 $= \frac{15}{3} = 5$

س = $\pm\sqrt{5}$

ملاحظات Notes

- نبحث دائما عن قيمة ك أولا
- تذكر التعويض عن س^2 وليس س
- استخدم كلا من الجذرين التربيعين الموجب والسالب

جميع الحقوق محفوظة لـ مركز المناهج التعليمية والبحوث التربوية ـ ليبيا

مثال 5 :

إذا كانت ل = ك $\sqrt{أ}$ حيث ك مقدار ثابت، ل = 6 عندما أ = 81 احسب:

(أ) قيمة ل عندما أ = 144 (ب) قيمة أ عندما ل = 10

الحل :

ل = ك $\sqrt{أ}$ ، ل = 6 عندما أ = 81

$\therefore$ ك $\sqrt{81}$ = 6

9 ك = 6

ك = $\frac{6}{9}$ = $\frac{2}{3}$

$\therefore$ المعادلة هي: ل = $\frac{2}{3}\sqrt{أ}$

(أ) عندما أ = 144

ل = $\frac{2}{3}\sqrt{144}$

ل = $\frac{2}{3}$ × 12 = 8

(ب) عندما ل = 10

$\frac{2}{3}\sqrt{أ}$ = 10

$\sqrt{أ}$ = $\frac{3}{2}$ × 10 = 15

$\therefore$ أ = 15^2 = 225

ملحوظة Note

$\sqrt{أ}$ يشير إلى جذر تربيعي موجب.

مثال 6 :

إذا كانت كتلة الكرة تتغير طرديا بتغير مكعب طول نصف القطر، انقل وأكمل الجدول التالي:

الكتلة (ك)	24		375
طول نصف القطر ($نو$)	2	3	

الحل :

ك $\propto$ $نو^3$

$\therefore$ ك = ك $نو^3$ عندما ت ك كون مقدار ثابت.

ك = 24 عندما $نو$ = 2 $\therefore$ 24 = ك $(2)^3$

8 ك = 24 $\Leftarrow$ ك = 3

$\therefore$ المعادلة هي : ك = 3 $نو^3$

عندما $نو$ = 3 فإن ك = $3(3)^3$ = 3 × 27 = 81

عندما ك = 375 فإن 375 = 3 $نو^3$

$نو^3$ = $\frac{375}{3}$ = 125

$نو$ = $\sqrt[3]{125}$ = 5

$\therefore$ يمكن تكملة الجدول كالآتي:

الكتلة (ك)	24	81	375
طول نصف القطر ($نو$)	2	3	5

جميع الحقوق محفوظة لـ مركز المناهج التعليمية والبحوث التربوية ـ ليبيا