دولة ليبيا
وزارة التعليم
مركز المناهج التعليمية والبحوث التربوية

الرياضيات

للسنة الثانية بمرحلة التعليم الثانوي
القسم العلمي

الاسبوع التاسع عشر

المدرسة الليبية بفرنسا ـ تور

العام الدراسي:
1441 / 1442 هـ . 2020 / 2021 م.

جميع الحقوق محفوظة لـ مركز المناهج التعليمية والبحوث التربوية ـ ليبيا

3 - 6 الإتصال والإشتقاق

Continuity and Differentiatian

إذا كانت د قابلة للإشتقاق عند س$_1$ فإنها تكون متصلة عند هذه النقطة

البرهان

∵ دَ (س) موجودة

∴ د معرفة عند س$_1$

$$د(س) - د(س_1) = \frac{د(س) - د(س_1)}{(س - س_1)} \cdot (س - س_1)$$

، $س \neq س_1$

وبأخذ النهاية للطرفين عندما س $\longrightarrow$ س$_1$

$$\underset{س \to س_1}{نهـــا} [د(س) - د(س_1)] = \underset{س \to س_1}{نهـــا} \frac{د(س) - د(س_1)}{س - س_1} \times \underset{س \to س_1}{نهـــا} (س - س_1)$$

$$= دَ(س_1) \times 0$$

$$\underset{س \to س_1}{نهـــا} د(س) - د(س_1) = 0$$

$$\therefore \underset{س \to س_1}{نهـــا} د(س) = د(س_1)$$

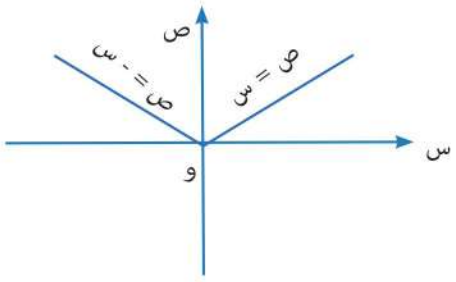
∵ د(س$_1$) معرفة فإن د(س) متصلة عند س$_1$

ملحوظة هامة

اتصال دالة عند نقطة لا يعني بالضرورة أنها قابلة للإشتقاق عند تلك النقطة

❖ لتكن ص = | س | ، ∀ س ∈ ح

بين أنها متصلة وغير قابلة للإشتقاق عند س = 0



شكل - 3

الحل

إذا كانت هـ > 0

فإن $\frac{|هـ|}{هـ} = \frac{هـ}{هـ} = 1$

وإذا كانت هـ < 0

فإن $\frac{|هـ|}{هـ} = - \frac{هـ}{هـ} = -1$

ومن ذلك نستنتج أن :

$$\underset{هـ \to 0^+}{نهـــا} د(س) = 1 \text{ ، } \underset{هـ \to 0^-}{نهـــا} د(س) = -1$$

جميع الحقوق محفوظة لـ مركز المناهج التعليمية والبحوث التربوية ـ ليبيا

نهـــا د(س) ≠ نهـــا د(س)

هـ ← 0^+ هـ ← 0^-

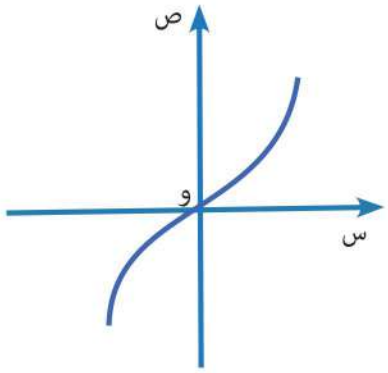
يعني نهـــا $\frac{د(0 + هـ) - د(0)}{هـ}$ ≠ نهـــا $\frac{د(0 + هـ) - د(0)}{هـ}$

هـ ← 0^+ هـ ← 0^-

وبالتالي نهـــا $\frac{د(0 + هـ) - د(0)}{هـ}$ ليس لها وجود

هـ ← 0

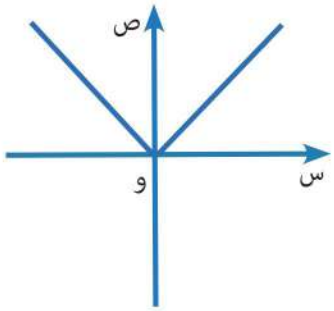
، دَ (0) ليس لها وجود (لا يمكن إيجاد مماساً واحداً عند (0، 0) لمنحنى د)



ص = $س^3$

دالة متصلة و قابلة للإشتقاق

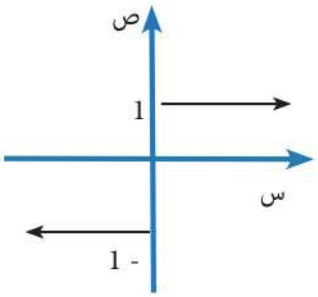
عند س= 0



ص = | س |

دالة متصلة و قابلة للإشتقاق

عند س= 0



ص = { 1 ، ص > 0 ; 1 - ، ص < 0 }

د الة غير متصلة و غير قابلة للإشتقاق

عند س= 0

❖ قواعد الإشتقاق

Differentiation Rules

قاعدة (1)

إذا كانت د(س) = ك حيث ك عدد ثابت فإن

دَ (س) = صفر ∀ س ∈ ح

البرهان

بإستخدام تعريف المشتقة يكون

دَ(س) = نهـــا $\frac{د(س + هـ) - د(س)}{هـ}$

هـ ← 0

جميع الحقوق محفوظة لـ مركز المناهج التعليمية والبحوث التربوية ـ ليبيا

$$= \text{نهـــا}_{هـ \to 0} \frac{ك - ك}{هـ}$$

= صفراً

مثال 4:

أوجد دَ(س) ، دَ (- 3)

إذا كان د(س) = 8

الحل :

∵ د(س) = 8 دالة ثابتة ∴ دَ (س) = 0

∀ س ∈ ح ومنه : دَ (– 3) = 0

قاعدة (2) : إذا كانت ص= س^{ن} حيث ن عدد صحيح موجب فإن

$$\frac{د ص}{د س} = ن\ س^{ن-1}$$

البرهان

$$\because \frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{(س+\Delta س)^{ن} - س^{ن}}{\Delta س}$$

$$\therefore \frac{د ص}{د س} = \text{نهـــا}_{\Delta س \to 0} \frac{(س+\Delta س)^{ن} - س^{ن}}{\Delta س}$$

وحيثما $\Delta س \to 0$ فإن $س + \Delta س \to س$

$$\therefore = \text{نهـــا}_{س+\Delta س \to س} \frac{(س+\Delta س)^{ن} - س^{ن}}{(س+\Delta س) - س}$$

$\frac{د ص}{د س} = ن\ س^{ن-1}$ حسب قاعدة 2 ونظراً لإن ن $س^{ن-1}$ هي عدد حقيقي دائماً ، فإن

الدالة المعطاة تكون قابلة للتفاضل ولجميع قيم س

جميع الحقوق محفوظة لـ مركز المناهج التعليمية والبحوث التربوية ـ ليبيا

مثال 5:

إذا كانت ص = $س^{3}$ فإن $\frac{ء ص}{ء س} = 3س^{2}$

مثال 6:

إذا كانت ص = $س^{-5}$ فإن $\frac{ء ص}{ء س} = -5س^{-6}$

مثال 7:

إذا كانت ص= $س^{4} + س^{-3} - 11$ فاوجد $\frac{ء ص}{ء س}$

الحل :

$$\frac{ء ص}{ء س} = 4 س^{3} + (-3) س^{-4} - 0$$

$$= 4س^{3} - 3 س^{-4}$$

مثال 8:

إذا كانت ص= $\frac{1}{\sqrt{س}}$ فاوجد $\frac{ء ص}{ء س}$ ، س

الحل :

$$ص = \frac{1}{\sqrt{س}} = \frac{1}{س^{\frac{1}{2}}}$$

$$ص = س^{-\frac{1}{2}} \Longleftarrow \frac{ء ص}{ء س} = -\frac{1}{2} س^{-\frac{1}{2}-1}$$

$$\frac{ء ص}{ء س} = -\frac{1}{2} س^{-\frac{3}{2}}$$

قاعدة (3)

إذا كانت د دالة قابلة للإشتقاق عند س ، ك ثابت فإن ك د(س) تكون أيضاً قابلة للإشتقاق ويكون

$$\frac{ء}{ء س} (ك د(س)) = ك دَ (س)$$

جميع الحقوق محفوظة لـ مركز المناهج التعليمية والبحوث التربوية ـ ليبيا

❖ مشتقة حاصل ضرب مقدار ثابت في دالة للمتغير س يساوي حاصل ضرب المقدار الثابت في مشتقة الدالة

مثلاً :-

$$\frac{د}{دس}\left(\frac{2}{3}س^{6}\right) = \frac{2}{3}\frac{د}{دس}(س^{6})$$

$$= \frac{2}{3} \times 6س^{5}$$

$$= 4س^{5}$$

مثال 9 :

إذا كانت ص = $6س^{3} + 2\sqrt{س}$

فاوجد $\frac{دص}{دس}$

الحل :

$$\frac{دص}{دس} = د'(س) = \frac{د}{دس}(6س^{3}) + \frac{د}{دس}(2\sqrt{س})$$

$$= 6\frac{د}{دس}(س^{3}) + 2\frac{د}{دس}(\sqrt{س})$$

$$= 6 \times 3س^{2} + 2 \times \frac{1}{2\sqrt{س}}$$

$$\frac{د}{دس}(6س^{3} + 2\sqrt{س}) = 18س^{2} + \frac{1}{\sqrt{س}}$$

مثال 10 :

إذا كانت ص = $\frac{1}{س} + \frac{2}{س^{2}} + \frac{3}{س^{3}}$

فاوجد $\frac{دص}{دس}$

الحل :

∵ ص = $\frac{1}{س} + \frac{2}{س^{2}} + \frac{3}{س^{3}}$

∴ ص = $س^{-1} + 2س^{-2} + 3س^{-3}$

جميع الحقوق محفوظة لـ مركز المناهج التعليمية والبحوث التربوية ـ ليبيا

$\frac{ص}{س}$ = (- 1) $س^{-2}$ + (2) (- 2) $س^{-3}$ + (3) (- 3) $س^{-4}$

= - $س^{-2}$ - 4$س^{-3}$ - 9$س^{-4}$

= -($\frac{1}{س^2}$ + $\frac{4}{س^3}$ + $\frac{9}{س^4}$)

*** نتيجة :**

إذا كانت د دالة كثيرة الحدود ، فإن د قابلة للإشتقاق لكل س ∈ ح

مثال 11 :

إذا كانت

د(س) = 5$س^9$ - 3$س^5$ + 4 س + 8 فاوجد دَ (س)

الحل :

دَ(س) = 5 × 9$س^8$ - (3)(5)$س^4$ + 4 + 0

= 45$س^8$ - 15$س^4$ + 4

مثال 12 :

إذا كانت ص = $\frac{(3س^4 + س^3 - 5 س^2)}{2س^2}$

فأوجد $\frac{ص}{س}$

الحل :

ص = $\frac{3س^4}{2س^2}$ + $\frac{س^3}{2س^2}$ - $\frac{5س^2}{2س^2}$

ص = $\frac{3}{2}$ $س^2$ + $\frac{1}{2}$ س - $\frac{5}{2}$

$\frac{ص}{س}$ = ($\frac{3}{2}$) (2س) + $\frac{1}{2}$

= 3س + $\frac{1}{2}$

مثال 13 :

فاضل $(2س - 3)^2$ بالنسبة إلى س

الحل :

$\frac{د}{س}$ $(2س - 3)^2$ = $\frac{د}{س}$ $(4س^2 - 12س + 9)$

= 8س - 12

جميع الحقوق محفوظة لـ مركز المناهج التعليمية والبحوث التربوية ـ ليبيا