دَوْلَةُ لِيبِيَا
وِزَارَةُ التَّعْلِيم
مَرْكَزُ المَنَاهِجِ التَّعْلِيمِيَّةِ وَالبُحُوثِ التَّرْبَوِيَّةِ

الرِّيَاضِيَّات

للصف التاسع من مرحلة التعليم الأساسي

الاسبوع التاسع عشر

المدرسة الليبية بفرنسا ـ تور

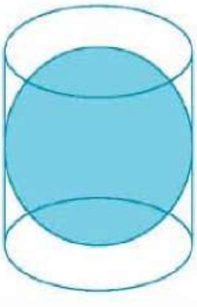
العام الدراسي 1441 / 1442 هجري
2020 / 2021 ميلادي

5 مساحات السطوح

Mensuration

اشتهر أرشميدس بصيحته "وجدتها!" وجريه عاريًا عبر شوارع مدينة سيراكيوز في صقلية عندما توصل إلى طريقة لمعرفة كمية الفضة التي استخدمها الصائغ في التاج لغش الملك.

كان أرشميدس عالم رياضيات إغريقي عاش في القرن الثالث قبل الميلاد.



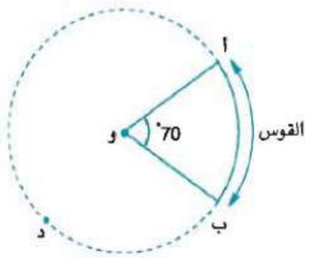
توصل أرشميدس أيضًا إلى طريقة حساب حجم الكرة، وقد أثبت أن حجم الكرة يساوي ثلثي حجم الأسطوانة التي لها نفس نصف قطر الكرة وارتفاع مساوٍ لقطرها. لن ندرس الإثبات في هذا الكتاب.

وقد طلب نقش الكرة والأسطوانة المرسومة في الشكل المقابل على قبره بعد وفاته. ولقد توفى عام 212 قبل الميلاد.

في نهاية هذا الفصل سوف تكون قادرًا على

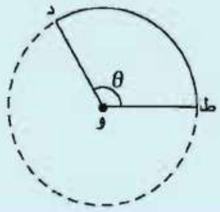
- إيجاد طول القوس، أو الزاوية المركزية التي تقابله، أو طول نصف قطره بمعلومية أي معلومتين.
- إيجاد مساحة القطاع الدائري، أو الزاوية المركزية، أو طول نصف قطره بمعلومية أي معلومتين.
- إيجاد مساحة القطاع الدائري، أو طول قوسه، أو طول نصف قطره بمعلومية أي معلومتين.
- إيجاد المساحة السطحية، والحجم، ومساحة القاعدة، والطول، والعرض، والارتفاع للهرم.
- إيجاد مساحة السطح المنحنى للمخروط، وحجمه، ومساحة قاعدته، وارتفاعه الجانبي، وطول نصف قطر قاعدته.
- إيجاد المساحة السطحية للكرة، وحجمها، وطول نصف قطرها.

1-5 طول القوس — Arc Length



القوس جزء من محيط الدائرة. يقابل على سبيل المثال القوس أ ب الزاوية 70° عند مركز الدائرة (و). القوس أ ب المبين يسمى **القوس الأصغر** بينما القوس أ د ب يسمى **القوس الأكبر**.

يقابل القوس د ط الزاوية θ عند مركز الدائرة (و).



تذكر أننا تعلمنا في الكتاب السابق أن محيط الدائرة التي طول نصف قطرها نق تعطى بالعلاقة ح = 2πنق، وبما أن π عدد **ليس له قيمة دقيقة، فإننا** نقرب π إلى $\frac{22}{7}$ أو 3.14 لتبسيط الحساب.

أنشطة

لدراسة العلاقة بين النسب الآتية

(أ) $\frac{\theta}{360^\circ}$ (ب) $\frac{\text{طول القوس}}{\text{محيط الدائرة}}$

(أ) **باستخدام برنامج الرسم الهندسي.**

خطوات النشاط

1- للوصول إلى البرنامج انقر مرتين على أيقونة (GSP) من على الديسك توب (سطح المكتب).

2- استخدم Compass tool . وارسم دائرة مركزها أ وطول نصف قطرها 3 سم.

3- استخدم Straightedge tool لرسم نصف قطر الدائرة من المركز (أ) إلى نقطة ب على محيط الدائرة . ارسم نصف قطر آخر من المركز أ إلى النقطة ح على محيط الدائرة.

ملحوظة

يمكن عمل هذا النشاط باستخدام برنامج هندسي أو بالبحث عن نموذج باستخدام جدول. الطريقتان مشروحتان.

4- استخدم Text Tool لتحديد مركز الدائرة أ النقط ب، حـ على الدائرة.

5- اضغط مفتاح Shift إلى أسفل واستخدم Selection Arrow Tool للنقر على النقط ب، أ، حـ على التوالي.

6- اضغط Measure من Menu Bar واختر زاوية. (الزاوية ب أ حـ سوف تعرض كما يلي م∠ب أ حـ = ...).

7- ضاغطًا مفتاح Shfit إلى أسفل استخدم Selection Arrow Tool للنقر على النقط ب، حـ والقوس ب حـ على التوالي.

8- انقر Measure من Menu Bar واختر طول القوس Arc Length (طول القوس ب حـ سوف يرسم كطول ⌒ب حـ على ⊙أ ب = ...)

9- استخدم Selection Arrow Tool وانقر محيط الدائرة وعندئذ انقر Measure من Menu Bar واختر محيط الدائرة (تعرض محيط الدائرة ⊙ أ ب = ...)

10- انقر Measure من Menu Bar واختر آلة حاسبة. (سوف تظهر آلة حاسبة على الشاشة).

11- انقر على
- العبارة "طول القوس ⌒ب حـ على ⊙أ ب =" (على الشاشة).
- عندها "/" علامة القسمة من الآلة الحاسبة.
- العبارة "محيط الدائرة ⊙ أ ب = ..." و.
- في النهاية "Ok" على الآلة الحاسبة.

(النسبة " $\frac{\text{طول القوس ⌒ب حـ على ⊙أ ب}}{\text{محيط الدائرة أ ب}}$ =" تجدها على الشاشة)

12- كرر الخطوة رقم 10 وانقر على العبارة "الزاوية م∠ب أ ج = ..." ثم اتبعها "/" على الآلة الحاسبة و360 (أيضًا على الآلة الحاسبة).
الخطوة التالية انقر Unit button على الآلة الحاسبة واختر Degrees.

(النسبة " $\frac{\text{م∠ب أ حـ}}{360°}$ = "سوف تظهر)

13- قارن النسب التي حصلت عليها من الخطوتين 11، 12. هل هي متساوية؟

14- استخدم Selection Arrow tool وانقر على النقطة حـ لتغيير الزاوية ب أ حـ (لاحظ أن طول نصف قطر الدائرة ثابت). أي قيمة تتغير وأي قيمة لا تتغير ؟ هل النسب في الخطوتين 11، 12 متساوية؟

ملحوظة

برنامج الرسم الهندسي التخطيطي GSP
هو أداة قوية من أدوات تكنولوجيا المعلومات للإنشاء الهندسي. فيما يلي بيان سريع بالأدوات الرئيسية في البرنامج.

Selection Arrow Tool
لاختيار نقطة أو خط

Point Tool
لرسم نقطة

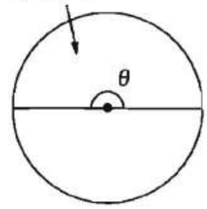
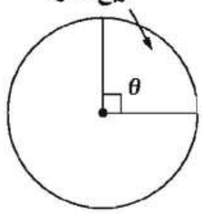
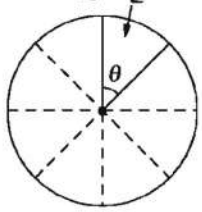
Compass Tool
لرسم دائرة

Straightedge Tool
لرسم خط مستقيم

Text Tool
لعنونة نقطة، خط، إلخ.

15- استـخدم Selection Arrow Tool ثم انقر على النقطةب وغير طـول نـصف القطر (ليس من الضـروري المحافظة الزاوية ب أ حـ ثابتة لأنه من الصعـب التحكم فيها).
هل النسب متساوية في الخطوتين 11، 12؟

(ب) البحث عن نموذج بعمل قائمة للقيم المختلفة للنسبتين

	θ	$\frac{\theta}{360^\circ}$	$\frac{\text{طول القوس}}{\text{محيط الدائرة}}$
	180°		
	90°		
	45°		

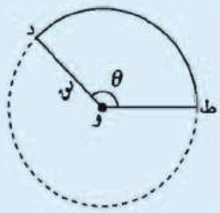
استخرج النسب في العمودين الأخيرين.

يدل العمودان الأخيران على أن النسب متطابقة ولهذا نحصل على

$$\frac{\text{طول القوس}}{\text{محيط الدائرة}} = \frac{\theta}{360^\circ}$$

التعميم بالاستقراء

يمكن تعميم نتائج النشاط السابق بالاستقراء.

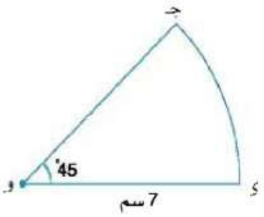


$$\frac{\text{طول القوس د ط}}{2\pi \text{ نق}} = \frac{\theta}{360^\circ}$$

مثال 1:

أوجد طول القوس حـ ى باعتبار

$\pi = \frac{22}{7}$. ويقابل زاوية مركزية مقدارها °45



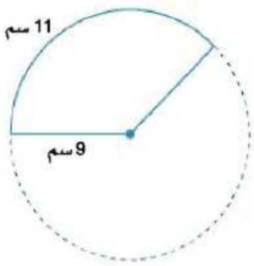
الحــل

$$\frac{\text{طول القوس حـ ى}}{2\pi \text{ نق}} = \frac{45^\circ}{360^\circ}$$

∴ طول القوس حـ ى $= \frac{45}{360} \times 2 \times \frac{22}{7} \times 7$

$= 5.5$ سم

مثال 2:



أوجد الزاوية المركزية في دائرة طول نصف قطرها 9 سم تقابل قوسًا طوله 11 سم . (اعتبر $\pi = \frac{22}{7}$)

الحــل

$$\frac{\theta}{360^\circ} = \frac{\text{طول القوس}}{2\pi \text{ نق}}$$

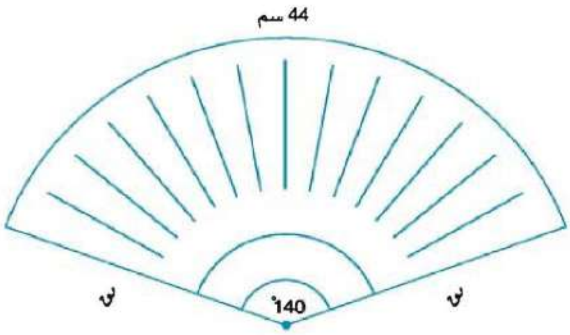
الزاوية المقابلة للقوس، $\theta = \frac{11}{9 \times \frac{22}{7} \times 2} \times 360^\circ$

$= \frac{11}{9 \times 2} \times \frac{7}{22} \times 360^\circ$

$= 70^\circ$

مثال 3:

أرادت سلوى عمل مروحة ورقيـة جميلة على شكل قوس طوله 44 سم تقابله زاوية مركزية 140°، فما طول نصف قطر المروحة ؟ (اعتبر $\pi = \frac{22}{7}$)



الحـــل

$$\frac{\text{طول القوس}}{2\pi\,\text{نق}} = \frac{\theta}{360^\circ}$$

$$\frac{44}{2\pi\,\text{نق}} = \frac{140^\circ}{360^\circ}$$

$$\frac{2\pi\,\text{نق}}{44} = \frac{360^\circ}{140^\circ}$$

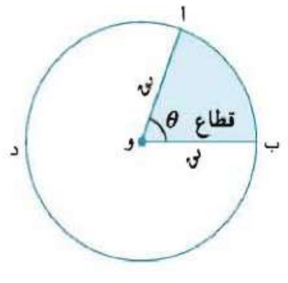
$$2 \times \frac{22}{7} \times \text{نق} = \frac{360}{140} \times 44$$

$$\text{نق} = \frac{360}{140} \times 44 \times \frac{7}{22} \times \frac{1}{2}$$

$$= 18 \text{ سم}$$

2-5 مساحة القطاع الدائري Area of a Sector

القطاع الدائري جزء من سطح دائرة محصور بين أي نصفي قطري دائرة. القطاع المظلل في الشكل أ و ب يسمى **القطاع الأصغر** بينما الجزء غير المظلل د أ و ب يسمى **القطاع الأكبر**.



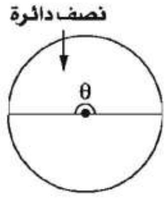
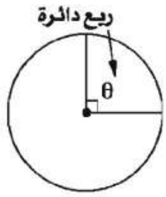
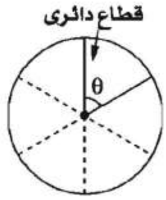
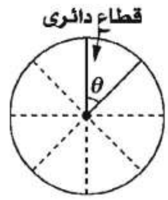
دعنا ندرس النسب التالية:

(أ) $\frac{\theta}{360^\circ}$

(ب) $\frac{\text{مساحة القطاع}}{\text{مساحة الدائرة}}$

ملحوظة

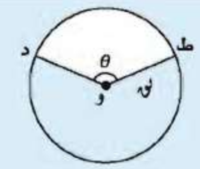
نذكر أننا تعلمنا في الكتاب السابق مساحة الدائرة التي طول نصف قطرها نق وتعطى بالعلاقة المساحة = π نق^2.

	θ	$\frac{\theta}{360^\circ}$	$\frac{\text{مساحة القطاع}}{\text{مساحة الدائرة}}$
	180°	$\frac{1}{2} = \frac{180^\circ}{360^\circ}$	$\frac{1}{2}$
	90°	$\frac{1}{4} = \frac{90^\circ}{360^\circ}$	$\frac{1}{4}$
	60°	$\frac{1}{6} = \frac{60^\circ}{360^\circ}$	$\frac{1}{6}$
	45°	$\frac{1}{8} = \frac{45^\circ}{360^\circ}$	$\frac{1}{8}$

ومن ثم يمكن التعميم بالاستقراء:

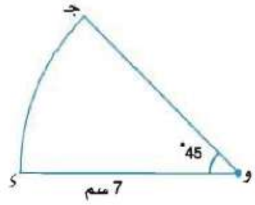
التعميم بالاستقراء

$$\frac{\text{مساحة القطاع الدائري د و ط}}{\pi\ \text{نق}^2} = \frac{\theta}{360^\circ}$$



حيث نق : طول نصف قطر الدائرة التي مركزها و .

مثال 4:



أوجد مساحة القطاع الدائري جـ و ء .

معتبرًا $\pi = \frac{22}{7}$

الحــل

$$\frac{\text{مساحة القطاع الدائري حـ و ى}}{\pi\ \text{نق}^2} = \frac{45^\circ}{360^\circ}$$

$$\therefore \text{مساحة القطاع الدائري حـ و ى} = \frac{45^\circ}{360^\circ} \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7$$

$$= \frac{77}{4} = 19.25\ \text{سم}^2$$

مثال 5:

إذا كان قطاع في دائرة طول نصف قطرها 9 سم مساحته 99 سم^2، أوجد الزاوية المقابلة عند مركز الدائرة. (اعتبر $\pi = \frac{22}{7}$) .

الحــل

$$\frac{\theta}{360^\circ} = \frac{\text{مساحة القطاع الدائري د و ط}}{\pi\ \text{نق}^2}$$

$$\frac{\theta}{360^\circ} = \frac{99}{9 \times 9 \times \frac{22}{7}}$$

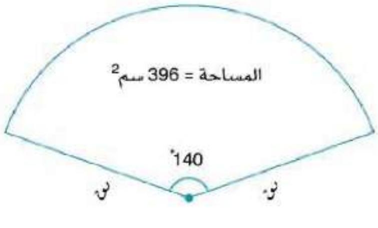
$$\theta = \frac{99}{9 \times 9} \times \frac{7}{22} \times 360^\circ$$

$$\therefore \text{الزاوية المقابلة،}\ \theta = 140^\circ$$

مثال 6:

المسحة على الزجاج الأمامي لسيارة لعبة كهربية تمسح بزاوية 140° مكونة قطاعاً دائرياً مساحته 396 سم^2. معتبرًا ($\pi = \frac{22}{7}$) احسب طول نصف قطر القطاع.

الحــل



$$\frac{\text{مساحة القطاع الدائري}}{\pi\ \text{نق}^2} = \frac{140^\circ}{360^\circ}$$

$$\frac{396}{\pi\ \text{نق}^2} = \frac{140^\circ}{360^\circ}$$

$$\frac{\pi\ \text{نق}^2}{396} = \frac{360^\circ}{140^\circ}$$

$$\frac{22}{7} \times \text{نق}^2 = \frac{360^\circ}{140^\circ} \times 396$$

$$\text{نق}^2 = 324$$

$$\text{نق} = \sqrt{324}$$

$$= 18\ \text{سم}$$

مثال 7:

مساحة قطاع طول نصف قطره 18 سم هي 198 سم^2، احسب طول القوس في القطاع.

$$\frac{\text{طول القوس}}{2\pi\, \text{ر}} = \frac{\theta}{360^\circ} \quad \text{.......} (1)$$

$$\frac{\text{مساحة القطاع الدائري}}{\pi\, \text{ر}^2} = \frac{\theta}{360^\circ} \quad \text{.......} (2)$$

من (1)، (2) نجد أن

$$\frac{\text{طول القوس}}{2\pi\, \text{ر}} = \frac{\text{مساحة القطاع الدائري}}{\pi\, \text{ر}^2} \quad \text{.......} (3)$$

المعادلة (3) مفيدة عندما يكون طول القوس مطلوب وتُعطى المساحة للقطاع والعكس صحيح. طول نصف قطر الدائرة ر يجب بالطبع أن يُعطى أيضًا.

الحل

$$\frac{\text{طول القوس}}{2\pi\, \text{ر}} = \frac{\text{مساحة القطاع الدائري}}{\pi\, \text{ر}^2}$$

$$\frac{\text{طول القوس}}{2\pi \times 18} = \frac{198}{\pi \times 18 \times 18}$$

$$\text{طول القوس} = \frac{198}{\pi \times 18 \times 18} \times 2\pi \times 18$$

$$= 22 \text{ سم}$$

مثال 8:

قطاع دائري طول نصف قطره 8 سم، طول قوسه 22 سم، احسب مساحة القطاع الدائري.

الحل

$$\frac{\text{مساحة القطاع الدائري}}{\pi\, \text{ر}^2} = \frac{\text{طول القوس}}{2\pi\, \text{ر}}$$

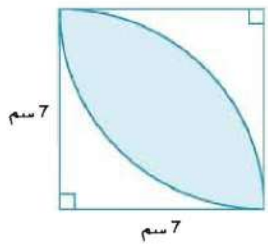
$$\frac{\text{مساحة القطاع الدائري}}{\pi \times 8 \times 8} = \frac{22}{2 \times \pi \times 8}$$

$$\text{مساحة القطاع} = \frac{22}{2 \times \pi \times 8} \times \pi \times 8 \times 8$$

$$= 88 \text{ سم}^2$$

مثال 9:

يعرض الشكل ربعين متساويين من دائرة طول نصف قطرها 7 سم تراكبا في المنطقة المظللة. (معتبرًا $\pi = \frac{22}{7}$)، أوجد مساحة المنطقة المظللة.



الحل

حل المشكلات

> **استراتيجية الحل:** حِلّ جزءًا من المشكلة عن طريق تبسيطها. حل لربع وحيد كما هو مبين.

نصف مساحة المنطقة المظللة في ربع واحد

= مساحة الربع − مساحة المثلث

$= \frac{1}{4} \times \frac{22}{7} \times 7^2 - \frac{1}{2} \times 7 \times 7$

$= \frac{77}{2} - \frac{49}{2} = \frac{28}{2} = 14$ سم^2

∴ المساحة المطلوبة = 2 × 14 = 28 سم^2