دولة ليبيا
وزارة التعليم
مركز المناهج التعليمية والبحوث التربوية

الرياضيات

للسنة الثالثة من مرحلة التعليم الثانوي
القسم العلمي

الاسبوع الحادي والعشرون

المدرسة الليبية بفرنسا ـ تور

5-7 تفاضل الدالة الأسية هـ أ س+ب

نفرض الدالة الأسية هـ أ س+ب حيث أ ، ب ثابتان

نفرض الدالة الأسية ص = هـ أ س+ب

خذ اللوغاريتم الطبيعي للطرفين،

لو ص = أ س + ب

فاضل ضمنيًّا بالنسبة إلى س

$\frac{1}{ص} \frac{وص}{وس} = أ$

$\frac{وص}{وس} = أ ص = أ هـ أ س+ب$

$\frac{و}{وس} (هـ أ س+ب) = أ هـ أ س+ب$

ادرس الحالة عندما ب = 0

∵ $\frac{و}{وس} (هـ أ س) = أ هـ أ س$

حالة خاصة: خذ أ = 1

∵ $\frac{و}{وس} (هـ س) = هـ س$

مثال 11:

فاضل الآتي بالنسبة إلى س:

(أ) هـ $^{2 س}$ (ب) هـ $^{3 س - 1}$

(جـ) هـ $^{1 - 4 س}$ (د) $(هـ^{س} + \frac{1}{هـ^{س}})^{2}$

الحل:

(أ) $\frac{و}{وس} (هـ^{2 س}) = 2 هـ^{2 س}$

(ب) $\frac{و}{وس} (هـ^{3 س - 1}) = 3 هـ^{3 س - 1}$

(جـ) $\frac{و}{وس} (هـ^{1 - 4 س}) = \frac{و}{وس} (هـ^{-4 س + 1}) = - 4 هـ^{1 - 4 س}$

(د) $\frac{و}{وس} (هـ^{س} + \frac{1}{هـ^{س}})^{2} = \frac{و}{وس} (هـ^{2 س} + 2 + هـ^{- 2 س}) = 2 هـ^{2 س} - 2 هـ^{- 2 س}$

جميع الحقوق محفوظة لـ مركز المناهج التعليمية والبحوث التربوية

مثال 12 :

أوجد $\frac{ؤص}{ؤس}$ إذا كان:

(أ) $ص = هـ^{س} \text{ جا } 2س$ (ب) $ص = \frac{\text{جتا } 6س}{هـ^{3س}}$ (جـ) $ص = هـ^{2س+1} \text{ لو } س$

الحل:

(أ) $ص = هـ^{س} \text{ جا } 2س$

$\Leftarrow \frac{ؤص}{ؤس} = \text{جا } 2س \frac{ؤ}{ؤس}(هـ^{س}) + هـ^{س} \frac{ؤ}{ؤس}(\text{جا } 2س)$

$= (\text{جا } 2س) هـ^{س} + هـ^{س} 2 \text{ جتا } 2س$

$= هـ^{س} \text{جا } 2س + 2 هـ^{س} \text{جتا } 2س$

(ب) $ص = \frac{\text{جتا } 6س}{هـ^{3س}} = هـ^{-3س} \text{ جتا } 6س$

$\Leftarrow \frac{ؤص}{ؤس} = \text{جتا } 6س [-3 هـ^{-3س}] + هـ^{-3س} [-6 \text{ جا } 6س]$

$= -\frac{3 \text{ جتا } 6س}{هـ^{3س}} - \frac{6 \text{ جا } 6س}{هـ^{3س}}$

$= -\frac{3}{هـ^{3س}} (\text{جتا } 6س + 2 \text{ جا } 6س)$

(جـ) $ص = هـ^{2س+1} \text{ لو } س$

$\Leftarrow \frac{ؤص}{ؤس} = \text{لو } س \frac{ؤ}{ؤس}(هـ^{2س+1}) + هـ^{2س+1} \frac{ؤ}{ؤس}(\text{لو } س)$

$= \text{لو } س (2 هـ^{2س+1}) + هـ^{2س+1} (\frac{1}{س})$

$= 2 هـ^{2س+1} \text{ لو } س + \frac{هـ^{2س+1}}{س}$

$= \frac{هـ^{2س+1}}{س} (2س \text{ لو } س + 1)$

جميع الحقوق محفوظة لـ مركز المناهج التعليمية والبحوث التربوية - ليبيا

مثال 13 :

أوجد دَ (س) فيما يأتي:

(أ) د (س) = س هـ$^{1-2س}$ (ب) د (س) = $\frac{(1-س^2)}{هـ^{س}}$

الحل:

(أ) د (س) = س هـ$^{1-2س}$

بالتفاضل بالنسبة إلى س:

∴ دَ (س) = هـ$^{1-2س}$ $\frac{ؤ}{ؤس}$ (س) + س $\frac{ؤ}{ؤس}$ (هـ$^{1-2س}$)

= هـ$^{1-2س}$ − 2 س هـ$^{1-2س}$

= هـ$^{1-2س}$ (1 − 2 س)

(ب) د (س) = $\frac{(1-س^2)}{هـ^{س}}$ = (1 − س^2) هـ$^{-س}$

بالتفاضل بالنسبة إلى س:

∴ دَ (س) = هـ$^{-س}$ $\frac{ؤ}{ؤس}$ (1 − س^2) + (1 − 1 س^2) $\frac{ؤ}{ؤس}$ (هـ^{س})

= هـ$^{-س}$ (-2 س) + (1 − س^2) (-هـ^{س})

= − هـ$^{-س}$ (2 س + 1 − س^2)

= $\frac{س^2 - 2س - 1}{هـ^{س}}$

6-7 تكامل الدالة الأسية هـ$^{أس+ب}$

أوضحنا فيما سبق أن :

$\frac{ؤ}{ؤس}$ (هـ$^{أس+ب}$) = أ هـ$^{أس+ب}$

باعتبار التكامل عملية عكسية للتفاضل، نجد أن

⌈ أ هـ$^{أس+ب}$ ؤس = هـ$^{أس+ب}$ + ث، حيث ث ثابت

أ ⌈ هـ$^{أس+ب}$ ؤس = هـ$^{أس+ب}$ + ث

⇐ ⌈ هـ$^{أس+ب}$ ؤس = $\frac{1}{أ}$ هـ$^{أس+ب}$ + ث

⇐ $\frac{ؤ}{ؤس}$ (هـ^{أس}) = أ هـ^{أس} بالمثل

∵ ⌈ أ هـ^{أس} ؤس = هـ^{أس} + ث، حيث ث ثابت

أ ⌈ هـ^{أس} ؤس = هـ^{أس} + ث

∴ ⌈ هـ^{أس} ؤس = $\frac{1}{أ}$ هـ^{أس} + ث

⇐ حالة خاصة: خذ أ = 1

⌈ هـ^{س} ؤس = هـ^{س} + ث

جميع الحقوق محفوظة لـ مركز المناهج التعليمية والبحوث التربوية

مثال 14 :

أوجد تكامل الآتي بالنسبة إلى س:

(أ) $هـ^{3س}$ (ب) $هـ^{س} - \frac{1}{هـ^{س}}$ (جـ) $هـ^{2س-1}$ (د) $هـ^{\frac{س}{2}-1}$

الحل:

(أ) $\int هـ^{3س} ؤس = \frac{1}{3} هـ^{3س} + ث$

(ب) $\int (هـ^{س} - \frac{1}{هـ^{س}}) ؤس = \int (هـ^{س} - هـ^{-س}) ؤس = هـ^{س} + هـ^{-س} + ث$

(جـ) $\int هـ^{2س-1} ؤس = \frac{1}{2} هـ^{2س-1} + ث$

(د) $\int هـ^{\frac{1}{2}س+1} ؤس$

$= -2 هـ^{-\frac{1}{2}س+1} + ث$

$= -2هـ^{-\frac{1}{2}س+1} + ث$

مثال 15 :

احسب $\int هـ^{1-2س} ؤس$

الحل:

$$\int_0^1 هـ^{1-2س} ؤس = \frac{-1}{2} [هـ^{1-2س}]_0^1$$

$$= \frac{1}{2} [هـ^{-1} - هـ^{1}]$$

$$= \frac{1}{2} (\frac{1}{هـ} - هـ)$$

$$= \frac{1}{2} (هـ - \frac{1}{هـ})$$

$$\approx \frac{1}{2} (2.718 - 0.368)$$

$$\approx 1.175$$

جميع الحقوق محفوظة لـ مركز المناهج التعليمية والبحوث التربوية - ليبيا