دولة ليبيا
وزارة التعليم
مركز المناهج التعليمية والبحوث التربوية

الرياضيات

للسنة الثانية بمرحلة التعليم الثانوي
القسم العلمي

الاسبوع العشرون

المدرسة الليبية بفرنسا ـ تور

7 التكامل

7 - 2 عكس التفاضل

نعلم أن $ص = س^{3}$

$\frac{ءص}{ءس} = 3س^{2}$

بالمثل $ص = س^{4}$

$\frac{ءص}{ءس} = 4س^{3}$

نفرض أن لدينا $\frac{ءص}{ءس} = 3س^{2}$. كيف نوجد ص ؟

هيا نقرب المسألة بسرد بعض الدوال ومشتقاتها

الدالة	المشتقة
$ص = 2س$	$\frac{ءص}{ءس} = 2$
$ص = س^{2}$	$\frac{ءص}{ءس} = 2س$
$ص = س^{3}$	$\frac{ءص}{ءس} = 3س^{2}$
$ص = س^{4}$	$\frac{ءص}{ءس} = 4س^{3}$
$ص = س^{ن}$	$\frac{ءص}{ءس} = ن\, س^{ن-1}$

بمقارنة العمودين نلاحظ أننا نحصل على المشتقة من الدالة .

1 . نضرب الدالة بأس س .ثم .

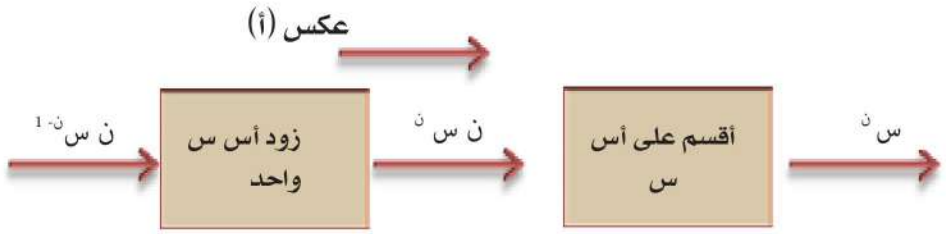
2. أس س في حاصل الضرب ينقص 1 .

هذا واضح في الشكل الأتي

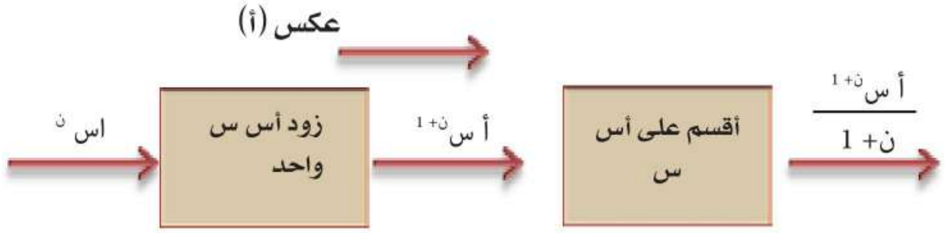
تفاضل ←

$س^{ن}$ ← اضرب في أس س ← $ن\, س^{ن}$ ← انقص أس س واحد ← $ن\, س^{ن-1}$

لإنشاء الخريطة عكس السابقة

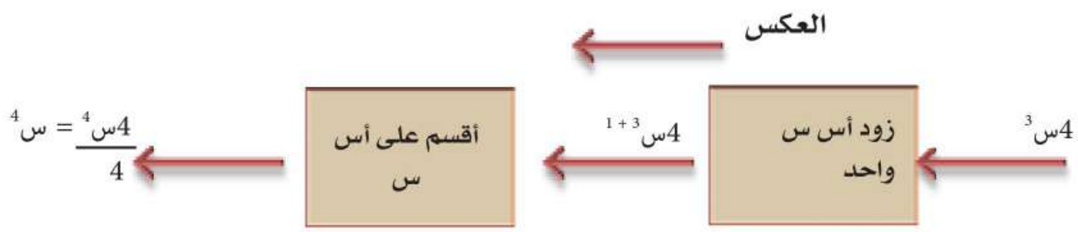


بدلاً من استخدام $ن س^{ن-1}$ كمدخل للعكس نحن نستخدم الأن $أ س^{ن}$ $(ن \neq -1)$ هذه دالة أكثر عمومية



شكل 7 - 1

معكوس الخريطة أوضحت الحركة من اليسار إلى اليمين أي في الأتجاه العكسي لتأكيد العملية العكسية للتفاضل . بمجرد فهم هذا . إتجاه الخريطة يمكن أن يكون من اليمين إلى اليسار للتسهيل لذا استخدام $4س^{3}$ كمدخل نجد أن :



شكل 7 - 2

وبالمثل للمدخل $3س^{2}$ نجد أن :

$$3س^{2} \longrightarrow 3س^{2+1} \longrightarrow \frac{3س^{3}}{3} = س^{3}$$ (بحذف المستطيلات)

عموماً ليست هذه هي العملية العكسية كاملة بعد.

بفرض الدالة $ص = س^{2} + 2$

$$\frac{ءص}{ءس} = 2س$$

أيضاً إذا كان $ص = س^{2} + 4$

$$\frac{ءص}{ءس} = 2س$$

بالمثل $ص = س^{2} - 3$

$$\frac{ءص}{ءس} = 2س$$

فيما يلي مشتقات ثلاث دوال تساوي 2س . هذا يعني أنه للدوال

ص = س^{2} + 2 ، ص= س^{2} + 4 ، ص = س^{2} - 3 ، $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = 2س

بالمثل 2س هو مشتقة ص= س^{2} – 10 ، ص = س^{2} + 8 ولمزيد من التعميم ص = س^{2} + جـ حيث جـ أي ثابت . حيث جـ يسمى ثابت الإختياري . تعتمد قيمته على مجموعة من القيم لكل من س، ص في الدوال المعينة .

وعلى ذلك . لكي نكمل عكس التفاضل يجب أن نضيف (ثابت إختياري) عن الخطوة النهائية .

هذه العملية العكسية تسمى التكامل. الدالة المراد تكاملها تسمى دالة مكاملة والناتج تكامل غير محدود للدالة المعلومة .

بوضع هذا في شكل خريطة نجد أن :

	التكامل		التكامل		تكامل غير محدد	
اس^{ن} ←	زد أس س بمقدار 1	← أ س$^{ن+1}$ ←	أقسم على أس س لاخظ ن ≠ - 1	← $\frac{\text{أ س}^{ن+1}}{ن+1}$ ←	اضف ثابت اختياري جـ	← $\frac{\text{أ س}^{ن+1}}{ن+1}$ + جـ

شكل (7 - 3)

الرمز الرياضي للتكامل هو ∫ حيث أن التكامل المشروح هو بالنسبة إلى س

والرمز الكامل لهذا التكامل هو : ∫ أس^{ن} ءس = $\frac{\text{أ س}^{ن+1}}{ن+1}$ + جـ حيث أن جـ ثابت ن ≠ - 1

التكامل قابل للتطبيق لمتغيرات أخرى ذلك أن تكامل أت^{4} بالنسبة إلى ت . حيث أ ثابت يعطى بالعلاقة :

∫ أت^{4} ءت = $\frac{\text{أت}^{5}}{5}$ + جـ

ملحوظة:
ليس من الممكن أن نقسم على ن + 1 عندما ن= - 1، بمعنى آخر نقسم على صفر يعطي نتيجة غير معرفة .
∫ $\frac{1}{\text{س}}$ ءس سوف يعاد تعريفه فيما بعد

نقطة مهمة هي إذا أردنا أن تكامل دالة بالنسبة لـ : س مثلاً حينئذٍ الدالة يجب أن تكون بدالالة س فقط .

بوضع ص = د(س) = $\frac{\text{س}^{ن+1}}{ن + 1}$ + جـ ، ن ≠ - 1

دَ(س) = $\frac{1}{ن + 1}$. (ن + 1) س^{ن}

$\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}$ (د(س)) = س^{ن} بأخذ ∫ للطرفين نحصل على

∴ ∫ س^{ن} ءس = د(س)

7 - 3 قواعد التكامل غير المحدود

Rules of Indefinite Integrals

سبق أن قمت بإيجاد التكامل غير المحدود للدوال كثيرة الحدود وأعتمدت على المشتقة لإيجاد هذه التكاملات ، وهذه الطريقة تقوم على التذكير ، عليه لابد من وجود طريقة اخرى تعتمد على قواعد محددة لإيجاد التكاملات غير المحدود منها

■ **قاعدة (1)**

$\int \text{أ}\ \text{ءس} = \text{أس} + \text{جـ}$ **حيث أ عدد ثابت**، جـ ثابت اختياري

مثلاً $\int 6\ \text{ءس} = 6\text{س} + \text{جـ}$

، $\int \pi\ \text{ءس} = \pi\text{س} + \text{جـ}$

، $\int \frac{\text{ءص}}{3} = \frac{1}{3}\text{ص} + \text{جـ}$

■ **قاعدة (2)**

$$\int \text{س}^{\text{ن}}\ \text{ءس} = \frac{\text{س}^{\text{ن}+1}}{\text{ن}+1} + \text{جـ} \quad ،\ \text{ن} \neq -1$$

■ **قاعدة (3)**

1) $\int \text{أ}\ \text{د(س)}\text{ءس} = \text{أ} \int \text{د(س)}\ \text{ءس}$

2) $\int (\text{د}_1\text{(س)} \pm \text{د}_2\text{(س)} \pm \ldots\ldots \pm \text{د}_{\text{ن}}\text{(س)})\text{ءس}$

$= \int \text{د}_1\text{(س)}\text{ءس} \pm \int \text{د}_2\text{(س)}\ \text{ءس} \pm \ldots\ldots \pm \int \text{د}_{\text{ن}}\text{(س)}\ \text{ءس}$

مثلاً :-

$$\int (4\text{س}^3 - 2\text{س} + 6)\ \text{ءس} = \int 4\text{س}^3\ \text{ءس} - \int 2\text{س}\ \text{ءس} + \int 6\ \text{ءس}$$

$$= 4 \int \text{س}^3\ \text{ءس} - 2 \int \text{س}\ \text{ءس} + 6 \int \text{ءس}$$

$$= 4 \times \frac{\text{س}^4}{4} - \frac{2\text{س}^2}{2} + 6\text{س} + \text{جـ}$$

$$\therefore \int (4\text{س}^3 - 2\text{س} + 6)\ \text{ءس} = \text{س}^4 - \text{س}^2 + 6\text{س} + \text{جـ}$$

مثال 1:

كامل كلاً مما يأتي بالنسبة إلى س :

(أ) 3س   (ب) س^2

(جـ) أ س^3 (د) 5

(هـ) 3س$^{-2}$ (و) $\frac{1}{س^3}$

(ز) س$^{\frac{2}{5}}$ (ح) س$^{\frac{3}{4}}$

الحل :

(أ) $\int 3$س ءس = $\frac{3س^2}{2}$ + **جـ** ، **حيث جـ ثابت .**

(ب) $\int$ س^2 ءس = $\frac{س^3}{3}$ + **جـ** ، **حيث جـ ثابت .**

(ج) $\int$ أس^5 ءس = $\frac{أس^6}{6}$ + **جـ** ، **حيث جـ ثابت .**

(د) $\int 5$ءس = $\int 5$س^0 ءس   **حيث** (س^0 = 1).

= $\frac{5س^1}{1}$ + جـ ، **حيث جـ ثابت .**

= 5س + جـ

(ليس من الضروري أن توضح أن 5 = 5س^0)

(هـ) $\int 3$س$^{-2}$ ءس = 3 $\frac{س^{-2+1}}{-2+1}$ + **جـ** ، **حيث جـ ثابت اختياري**

= $\frac{3س^{-1}}{-1}$ + جـ

= $-\frac{3}{س}$ + جـ

(و) $\int \frac{1}{س^3}$ ءس = $\int$ س$^{-3}$ ءس

= $\frac{س^{-3+1}}{-3+1}$ + جـ ،

= $\frac{1}{-2س^2}$ + جـ   **حيث جـ ثابت اختياري**

(ز) $\int$ س$^{\frac{2}{5}}$ ءس = $\frac{س^{\frac{2}{5}+1}}{\frac{2}{5}+1}$ + جـ ، **جيث جـ ثابت اختياري**

$$\therefore \int \text{س}^{\frac{2}{5}} \, \text{ءس} = \frac{\text{س}^{\frac{7}{5}}}{\frac{7}{5}} + \text{جـ}$$

$$= \frac{5\text{س}^{\frac{7}{5}}}{7} + \text{جـ}$$

(ح) $\int \text{س}^{-\frac{3}{4}} \, \text{ءس} = \dfrac{\text{س}^{-\frac{3}{4}+1}}{-\frac{3}{4}+1} + \text{جـ}$ ، حيث جـ عدد ثابت

$$= \frac{\text{س}^{\frac{1}{4}}}{\frac{1}{4}} + \text{جـ}$$

$$= 4\text{س}^{\frac{1}{4}} + \text{جـ}$$

مثال 2:

أوجد ص إذا كان $\dfrac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = 6\text{س}^2 + 1$

الحل:

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = 6\text{س}^2 + 1$$

كامل بالنسبة إلى س

$$\int \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} \, \text{ءس} = \int (6\text{س}^2 + 1) \, \text{ءس}$$

$\text{ص} = \dfrac{6\text{س}^3}{3} + \text{س} + \text{جـ}$ ، حيث جـ ثابت اختياري

$$\text{ص} = 2\text{س}^3 + \text{س} + \text{جـ}$$

مثال 3:

كامل $8\text{س}^3 - 2\text{س}^2 + 5\text{س} - 2 + \dfrac{1}{\text{س}^2}$ **بالنسبة إلى س**

الحل:

نكامل حد بعد حد

$$\int \left(8\text{س}^3 - 2\text{س}^2 + 5\text{س} - 2 + \frac{1}{\text{س}^2}\right) \text{ءس}$$

$= \dfrac{8\text{س}^4}{4} - \dfrac{2\text{س}^3}{3} + \dfrac{5\text{س}^2}{2} - 2\text{س} + \dfrac{\text{س}^{-1}}{-1} + \text{جـ}$ ، **حيث جـ ثابت اختياري**

$= 2\text{س}^4 - \dfrac{2}{3}\text{س}^3 + \dfrac{5\text{س}^2}{2} - 2\text{س} - \dfrac{1}{\text{س}} + \text{جـ}$ ، **حيث جـ ثابت اختياري**

مثال 4:

كامل $\frac{3س^5 - 2س^3 + 11}{س^2}$ بالنسبة إلى س

الحل:

بالقسمة : $\frac{3س^5 - 2س^3 + 11}{س^2} = 3س^3 - 2س + \frac{11}{س^2}$

ثم بإجراء تكامل حد بعد حد

$$\int \frac{3س^5 - 2س^3 + 11}{س^2} \, ءس$$

$= \frac{3س^4}{4} - \frac{2س^2}{2} + \frac{11س^{-2+1}}{-2+1}$ + جـ (حيث جـ ثابت اختياري)

$$= \frac{3}{4}س^4 - س^2 - \frac{11}{س} + جـ$$

ملحوظة:
في الحالة التي يكون فيها المقدار الجبري على شكل خارج قسمة كما سبق يجب إجراء القسمة قبل إجراء التكامل

مثال 5:

أوجد تكامل $(ع^2 + 1)(ع - 3)$ بالنسبة إلى ع

الحل:

$$(ع^2 + 1)(ع - 3) = ع^3 - 3ع^2 + ع - 3$$

$$\int (ع^3 - 3ع^2 + ع - 3) \, ءع$$

$= \frac{ع^4}{4} - ع^3 + \frac{ع^2}{2} - 3ع + جـ$ (حيث جـ ثابت اختياري)