دولة ليبيا
وزارة التعليم
مركز المناهج التعليمية والبحوث التربوية

الرياضيات

للصف الأول من مرحلة التعليم الثانوي

الاسبوع الحادي والعشرون

المدرسة الليبية بفرنسا ـ تور

5-6 الحلول البيانية للمعادلات التربيعية

Graphical Solutions of Quadratic Equations

تأمل المعادلة : س^2 - 5 س + 6 = 0

أكبر أس فيها للمجهول س هو 2 ، وتسمى مثل هذه المعادلة معادلة تربيعية ولهذا فإن أي معادلة على الصورة :

أس^2 + ب س + جـ = 0 حيث أ، ب ، جـ ثوابت ، أ $\neq$ 0 تسمى معادلة تربيعية.

تعلمنا في الصف التاسع الأساسي حل المعادلة التربيعية بواسطة التحليل على سبيل المثال:

س^2 - 5 س + 6 = 0

(س - 3) (س - 2) = 0

$\therefore$ س - 3 = 0 أو س - 2 = 0

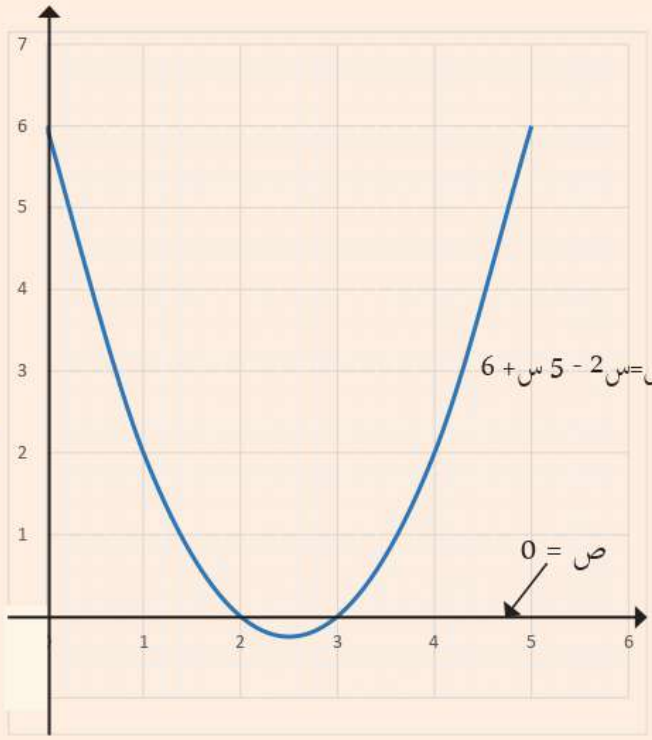
$\therefore$ س = 3 أو س = 2

طريقة أخرى لحل المعادلة التربيعية تكون برسم المعادلة التربيعية بيانياً.

ولحل المعادلة : س^2 - 5 س + 6 = 0 سوف نحتاج لرسم ص= س^2 - 5 س + 6 ويتضمن الجدول التالي قيم العلاقة:

ص= س^2 - 5 س + 6

س	0	1	2	3	4	5
ص	6	2	0	0	2	6



يرسم بعد ذلك الشكل البياني : ص = س^2 - 5 س + 6 مستخدما مقياس رسم 1 سم لكل وحدة واحدة على محور السينات ومحور الصادات.

المنحنى المرسوم للعلاقة: ص= س^2 - 5 س + 6 ⟵ (1)

للتحول إلى المعادلة: س^2 - 5 س + 6 = 0

ضع ص = 0 ⟵ (2)

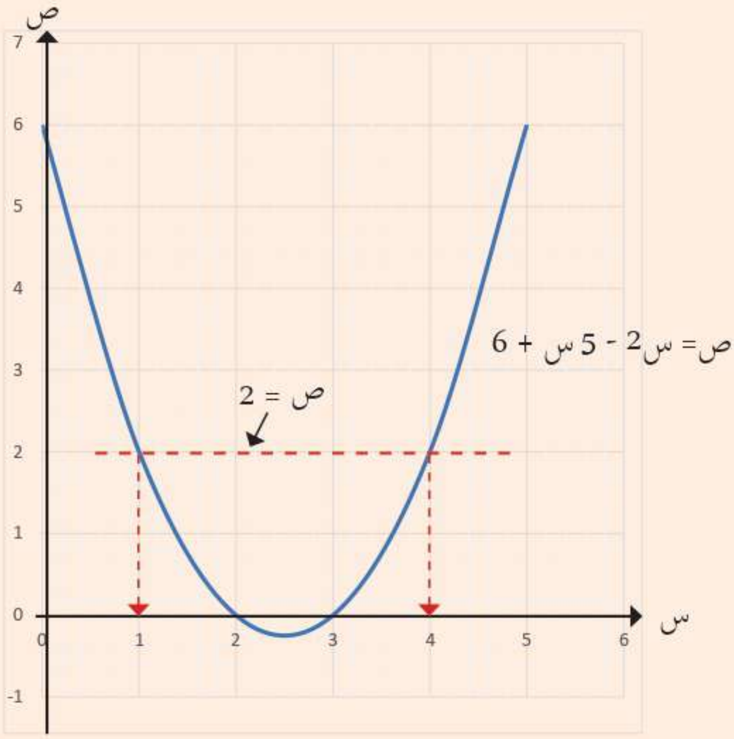
تذكر أن الحل البياني للمعادلتين الخطيتين الآنيتين يعطي بنقطة تقاطع المستقيمين.

وبطريقة مشابهة يمكننا حل المعادلتين الآنيتين (1) ، (2) بإيجاد النقطة أو النقط التي يقطع فيها المنحنى (1) والخط المستقيم (2)

نجد من الرسم البياني أن ص = 0 يقطع المنحنى ص= $س^2$ - 5 س + 6
في النقط س = 2 ، س = 3 ولهذا فإن الحل للمعادلة: $س^2$ - 5 س + 6 = 0
هو س = 2 ، س = 3 ،
أيضا س = 2 ، س = 3 يعرفا باسم جذري المعادلة التربيعية: $س^2$ - 5 س + 6 = 0
وبطريقة مشابهة لحل المعادلة: $س^2$ - 5 س + 6 = 2 يجب إيجاد الإحداثي السيني للنقطة أو النقط التي تقطع المنحنى ص= $س^2$ - 5 س + 6 والخط المستقيم ص = 2 .

ملحوظة Notes

- يمكن الحصول على نفس الحل عن طريق التحليل إلى عوامل.



ومن الرسم البياني: ص = 2 يقطع ص= $س^2$ - 5 س + 6 في النقط حيث س = 1 ، س = 4 ولهذا فإن حل المعادلة: $س^2$ - 5 س + 6 = 2 هو س = 1 ، س = 4 ،
ويمكن مراجعة هذا الحل عن طريق التحليل كما يلي:

$س^2$ - 5 س + 6 = 2

∴ $س^2$ - 5 س + 6 -2= 0

$س^2$ - 5 س + 4 = 0

(س - 4) (س - 1) = 0

∴ س - 4 = 0 أو س - 1 = 0

∴ س = 4 أو س = 1

ملحوظة Notes

- تذكر أن لحل المعادلة التربيعية عن طريق التحليل يجب أن يكون الطرف الايسر = صفر.

الحل البياني للمعادلة التربيعية في س يُعطي بواسطة إحداثيات س للنقطة (النقاط) التي يقطع فيها المنحنى الخط المستقيم.

مثال 7 :

س	3-	2-	1-	0	1	2	3	4	5
ص	11-	4-	1	4	5	4	1	4-	11-

الجدول المعطى هو للعلاقة : ص = 4 + 2س - س^{2}

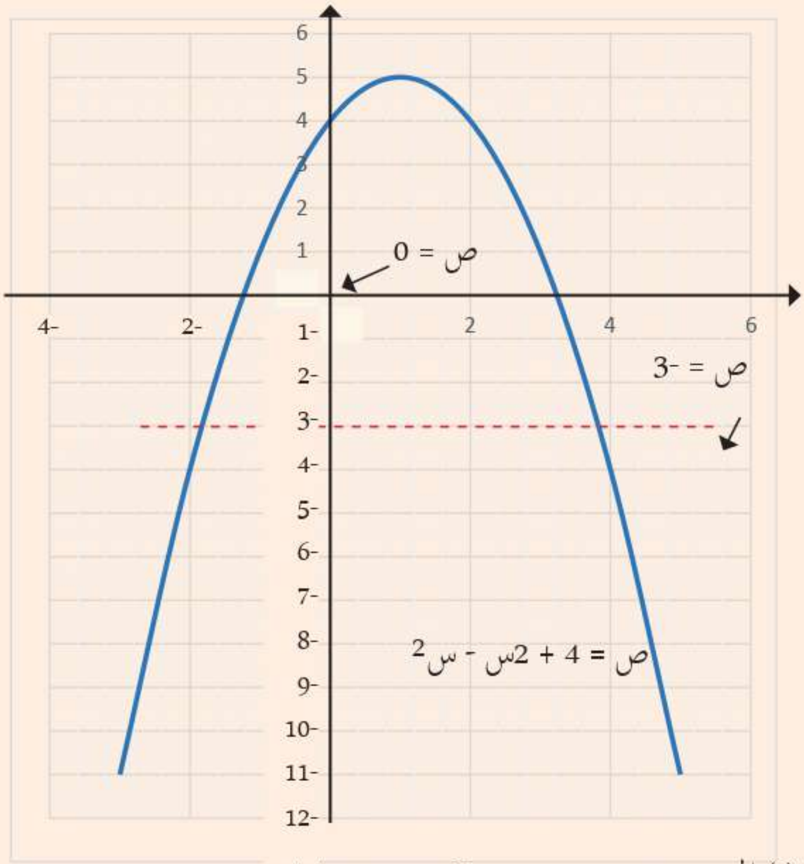
(أ) مستخدما مقياس رسم 1 سم لتمثل وحدة واحدة لمحور السينات، 2 سم لكل 5 وحدات لمحور الصادات . ارسم الشكل البياني للعلاقة: ص = 4 + 2س - س^{2} حيث -3 ≤ س ≤ 5

(ب) استخدم رسمك البياني لحل ما يلي:

(i) 4 + 2س - س^{2} = 0 (ii) 4 + 2س - س^{2} = 3-

الحل :

(أ)



(ب) (i) المنحنى ص = 4 + 2س - س^{2} .... (1)

حيث 4 + 2س - س^{2} = 0

نحصل على ص = 0 .... (2)

(1) ، (2) يتقاطعا في النقاط حيث س = -1.2 أو س = 3.2

∴ حل المعادلة: 4 + 2س - س^{2} = 0 يكون س = -1.2 أو س = 3.2

(ii) حيث 4 + 2س - س^{2} = 3- نحصل على ص = 3- .... (3)

يتقاطع (1) ، (3) في النقاط حيث س = -1.8 أو س = 3.8

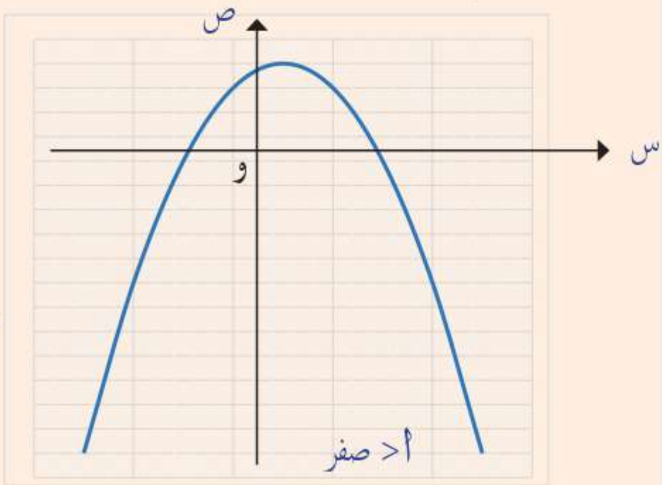
∴ حل المعادلة: 4 + 2س - س^{2} = 3- يكون س = -1.8 أو س = 3.8

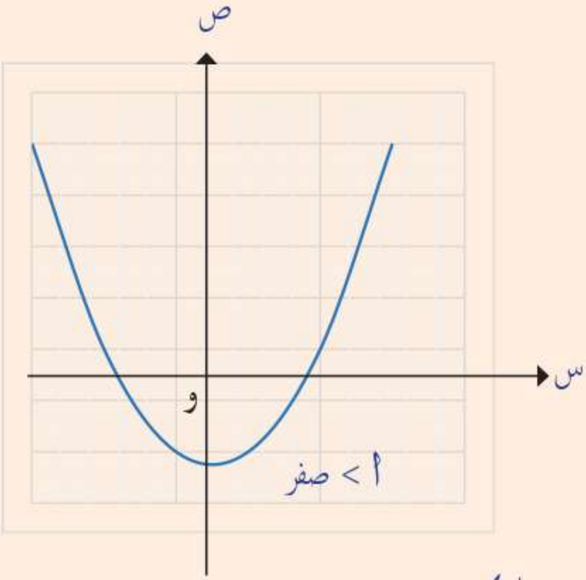
إذا لم يكن الحل عددا صحيحا حاول إعطاء إجابتك لأقرب رقم عشري واحد.

ملخص:

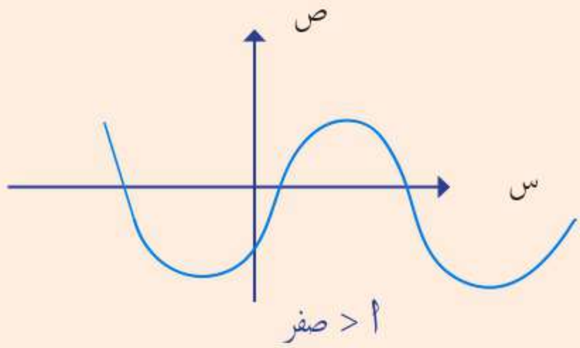
1 - الرسومات البيانية الأساسية الأربعة هي:

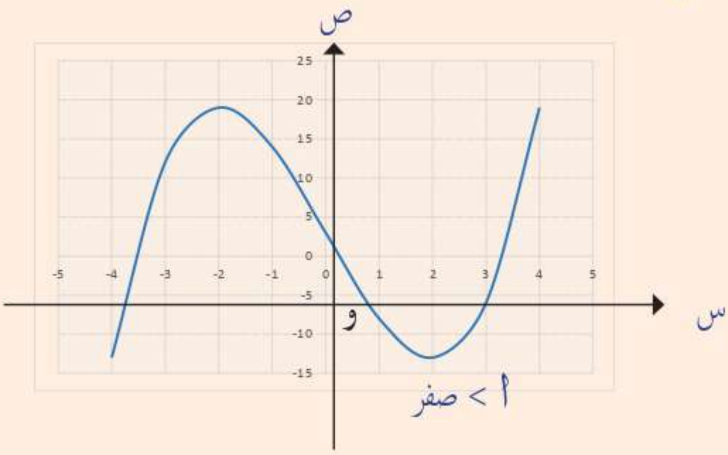
(أ) الرسوم البيانية التربيعية ص = أس^2 + ب س + جـ



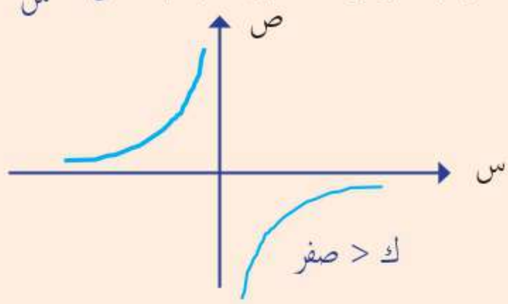


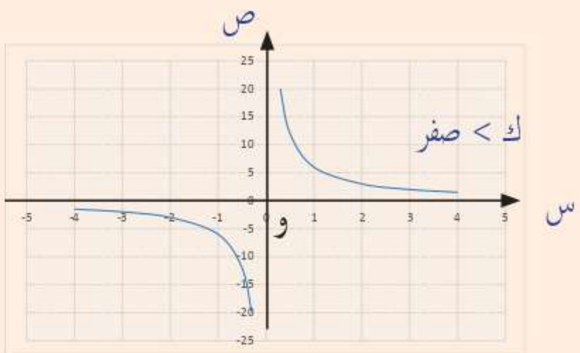
(ب) الرسومات البيانية التكعيبية: ص = أس^3 + ب س^2 + جـ س + ء



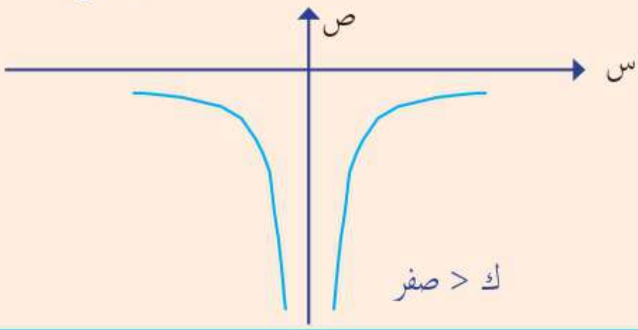


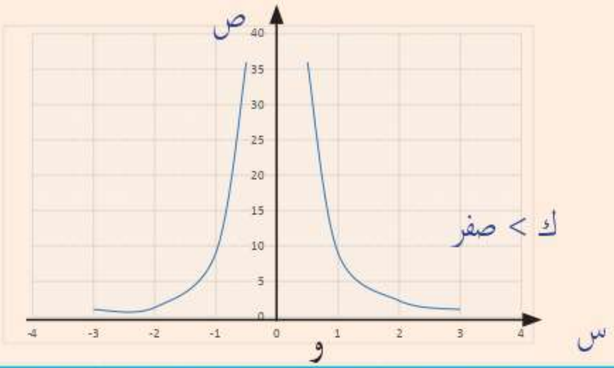
(جـ) الرسومات البيانية التبادلية : ص = $\frac{ك}{س}$





(د) الرسومات البيانية التبادلية المربعة : ص = $\frac{ك}{س^2}$

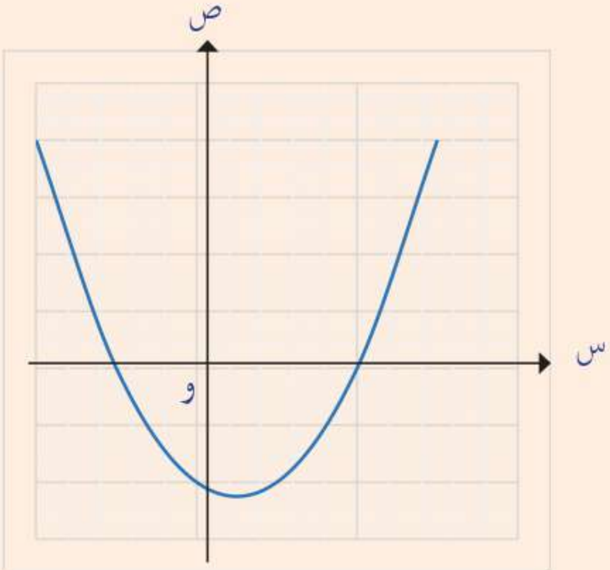




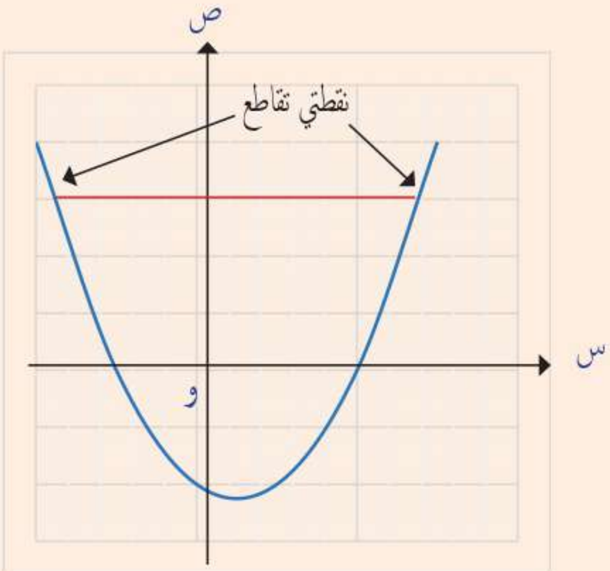
2 - يمكن الحصول على حل المعادلة التربيعية $أس^2 + ب س + جـ = 0$

من الرسم البياني التربيعي $ص = أس^2 + ب س + جـ$ حيث يقطع محور السينات ($أ$، $ب$ ، $جـ$ ثوابت $أ \neq 0$)

الرسم البياني التربيعي



3 - بصفة عامة الحل البياني للمعادلة التربيعية بدلالة س يعطي بإحداثيات س نقط (نقطة) تقاطع المنحنى مع مستقيم أحيانا لا يقطع المستقيم المنحنى وفي هذه الحالة المعادلة التربيعية ليس لها حل.



استقصاء الرياضيات:

شريط موبيوس هل 1+1 = 1 ؟

الطوبولوجي Topology هو فرع حديث نوعاً ما من أفرع الرياضيات ويتناول بصفة عامة الفراغات والأسطح والمجسمات المصمتة والمناطق، والشبكات و هو علم مليء بالمتناقضات وضروب المستحيل، ويمكن أن نطلق على علم الطوبولوجي فن تحليل الخصائص الدائمة والثابتة في الشكل الهندسي. لا تتأثر تلك الخصائص ولا يطرأ عليها أي تغيير حتى بعد أن يتقلص الشكل أو يمتد أو يلتوي أو يُعوج أو يَبرز من الداخل (بشرط ألا يتمزق أو ينكسر).

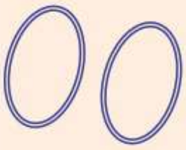
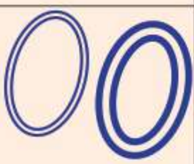
اكتشف العالم الرياضى الفلكي أغسطس فرديناد موبيوس (1790-1868 م) "شريط موبيوس" وهو مثال رائع لعلم الطوبولوجي. ولفهم ما يحدث عند تقطيع شريط موبيوس من الضرورى إجراء تجارب عملية بنفسك وتسجيل النتائج في جدول من الصعب التكهن بالمخرجات (النتائج) .

اقطع ثمانية شرائط من الورق طول كل منها 300 مم تقريبا وعرضها 30 مم .

الخطوة الأولى	خذ أحد الشرائط والصق حافتيه مستخدما الصمغ أو الشريط اللاصق وتأكد من عدم وجود التواءات. ما هو عدد الاضلاع والحواف التي لديك؟ إذا قطع إحداها عند منتصفه... ما هو الشكل المكون؟ وما هي خواص هذين النصفين؟
الخطوة الثانية	خذ شريطا آخر ثم قم بعمل نصف إنحناءة (180^0) عند أحد النهايات قبل ضم النهايتين كما حدث من قبل سوف تحصل على شريط موبيوس. الان ارسم بالقلم الرصاص خطا بطول مركز الشريط مستمرا إلى حيث ما بدأت. اقطع بطول هذا الخط ... ماذا تلاحظ؟... كم عدد أنصاف الإنحناءات الموجودة في النموذج الأن؟
الخطوة الثالثة	خذ شريط موبيوس آخر واقطع بطوله موازياً لحافته وعلى بعد ثلث المسافة من الحافة ... استمر بالقطع حتى تصل إلى حيث بدأت. ما هي النتيجة في هذه المرة ؟ ما هي الابعاد (الطول ، العرض) لهذا الشريط ؟
الخطوة الرابعة	قم بعمل العملية السابقة مرة ثانية، قاطعاً الشريط ربع المسافة من الحافة. في أي أوجه تشبه أو تختلف هذه النتيجة عن سابقتها؟

هل يمكنك تخمين النتيجة إذا عملت مقطعا دائرياً في الشريط عل بعد خمس المسافات من حافته؟.

كرر الخطوات 2 ، 4 على شرائط لها نصفا التوائين (360^0) ، ثلاثة أنصاف التواءات (540^0) ، أربعة أنصاف التواءات (720^0) ، ملخصا الطريقة في الجدول التالي:

عدد أنصاف الإلتواءات	المقطع المركزي يكون	وصف في كلمات	رسم كروكي	ثلث مقطع يكون	ربع مقطع يكون
صفر	شريطان منفصلان	$\frac{1}{2}$ عرض ونفس طول الشريط الأساسي			
1 سطح واحد حافة واحدة	شريط واحد	$\frac{1}{2}$ العرض وضعف الطول			
2 ضلعان حافتان					
3					
4					

ماهي النتيجة لو أخذناشريطا له 20 نصف التواء وقمنا بقطعه بطول المركز؟ يمكن تكوين بعض القواعد من هذه التجارب.
لو كان لدينا (n) (عدد الإلتواءات) حيث n عدد زوجي فإنه يوجد شريطان يشبهان الأصلي، مرتبطان بنفس طريقة انحنائة الحد.
إذا كانت (n) عددا فرديا تكون النتيجة شريطا واحد يشبه انحناء الحد.
لو أن $n \geqslant 3$ يتم عقدها وسوف يكون لدينا عدد $2n+2$ أنصاف التواءات وبزيادة مقدارها 2 عند فتح اللفات واذا قطع الشريط إلى ثلاث قطع سوف تجد أن مركز الشريط يتماثل مع الأصل ولكن الشريطين الخارجيين سيكونا فردي أو زوجي (كنتيجة للتصنيف) وسوف يرتبطان بالحلقة المركزية.

ملوحظة Note

- رغم ان ذلك نشاط ممتع فتوجد تطبيقات في الحياة الحقيقية لاشرطة من نوع موبيوس فعلى سبيل المثال. كثير من الاشرطة الخاصة بطابعة الحاسوب هي أشرطة موبيوس حتى يمكن استخدام الناحيتين.