دولة ليبيا
وزارة التعليم
مركز المناهج التعليمية والبحوث التربوية

الرياضيات

للسنة الثانية بمرحلة التعليم الثانوي
القسم العلمي

الاسبوع الحادي والعشرون

المدرسة الليبية بفرنسا ـ تور

جميع الحقوق محفوظة لـ مركز المناهج التعليمية والبحوث التربوية ـ ليبيا

▪ خاصية (3)

إذا كانت د(س) قابلة للتكامل على [أ ، ب] فإن :

1) $\int_{أ}^{أ} د(س)\,ءس = صفراً$

2) $\int_{أ}^{ب} د(س)\,ءس = -\int_{ب}^{أ} د(س)\,ءس$

مثال 8 :

أوجد $\int_{5}^{5} (3س^2 - 7)\,ءس$

الحل :

$\int_{5}^{5} (3س^2 - 7)\,ءس = 0$ حسب الخاصية رقم (3) ، 1.

مثال 9 :

إذا كان $\int_{1}^{3} د(س)\,ءس = 8$ فأوجد $\int_{3}^{1} 5\,د(س)\,ءس$

الحل :

$$\int_{3}^{1} 5\,د(س)\,ءس = 5\int_{3}^{1} د(س)\,ءس = (5)(-1)\int_{1}^{3} د(س)\,ءس$$

$$= (-5)(8)$$

$$= -40$$

7 - 6 النظرية الأساسية للتفاضل والتكامل

F undemented theorem of Calculus

فيما سبق عرفنا بأن عمليتي الإشتقاق والتكامل متعاكستان

أي أن $\int د(س)\,ءس = م(س) + جـ$ حيث د(س) = م′(س)

هذه النظرية تربط بين مفهوم التفاضل ومفهوم التكامل وتنص النظرية

إذا كانت د= { (س، ص) : ص = د(س) ، س ∈ ف } متصلة في الفترة [أ ، ب] فإن :

جميع الحقوق محفوظة لـ مركز المناهج التعليمية والبحوث التربوية ـ ليبيا

$\int_{م}^{ب} د(س)$ ءس = م (ب) - م (م) حيث

م (س) هي أي مشتقة عكسية للمناظر د(س) ، م َ (س) =د(س)

ملحوظة : المقدار م (ب) - م (م) يكتب عادة على الصورة

$\left[\text{م} (س) \right]_{م}^{ب}$ ويقراء قيمة م (س) بين س = م ، س = ب

فمثلاً $\int_{2}^{5} 3 س^2$ ءس ، م َ (س) = $3س^2$ ⟸ م (س) = $س^3$

$\int_{2}^{5} 3س^2$ ءس = $\left[س^3 \right]_{2}^{5}$ = 5^3 - 2^3

= 125 - 8

= 117

قاعدة : $\int_{م}^{ب} ك$ ءس = ك (ب - م) حيث ك عدد حقيقي

مثال 10 :

إذا كانت $\int_{1}^{م} 8$ ءس = 32 فأوجد قيمة م

الحل :

$\int_{1}^{م} 8$ ءس = 3 ∴ 8 (م - 1) = 32

∴ م - 1 = 4 ⟸ م = 5

مثال 11 :

أوجد $\int_{4}^{9} \frac{1}{2} س^{-\frac{1}{2}}$ ءس

الحل :

$\int_{4}^{9} \frac{1}{2} س^{-\frac{1}{2}}$ ءس = $\frac{1}{2} \int_{4}^{9} س^{-\frac{1}{2}}$ ءس

= $\frac{1}{2}$. $\left[2 س^{\frac{1}{2}} \right]_{4}^{9}$

= $\sqrt{9} - \sqrt{4}$

= 3 - 2

= 1

جميع الحقوق محفوظة لـ مركز المناهج التعليمية والبحوث التربوية ـ ليبيا

مثال 12:

احسب (أ) $\int_0^2 (3س^2 + س - 1)\ ءس$ (ب) $\int_1^3 (\frac{1}{3}س - 5)\ ءس$

(جـ) $\int_{-1}^{0} (6س^2 + س - 2)\ ءس$ (د) $\int_{-3}^{-1} (س^4 + 1)\ ءس$

الحل:

(أ) $\int_0^2 (3س^2 + س - 1)\ ءس = [س^3 + \frac{س^2}{2} - س]_0^2$

$= (8 + 2 - 2) - 0$

$= 8$

(ب) $\int_1^3 (\frac{1}{3}س - 5)\ ءس = [\frac{س^2}{6} - 5س]_1^3$

$= (15 - \frac{9}{6}) - (5 - \frac{1}{6})$

$= -8\frac{2}{3}$

(جـ) $\int_{-1}^{0} (6س^2 + س - 2)\ ءس = [2س^3 + \frac{س^2}{2} - 2س]_{-1}^{0}$

$= (0) - (-2 + \frac{1}{2} + 2)$

$= -\frac{1}{2}$

(د) $\int_{-3}^{-1} (س^4 + 1)\ ءس = [\frac{س^5}{5} + س]_{-3}^{-1}$

$= (-1 + \frac{1}{5}) - (-3 - \frac{243}{5})$

$= (-\frac{6}{5}) - (-\frac{258}{5})$

$= \frac{252}{5}$

$= 50\frac{2}{5}$

جميع الحقوق محفوظة لـ مركز المناهج التعليمية والبحوث التربوية ـ ليبيا

مثال 13:

احسب $\int_{-1}^{2} (2س^3 + 1)$ دس

الحل:

$$\int_{-1}^{2} (2س^3 + 1) \text{ دس} = \left[\frac{2س^4}{4} + س \right]_{-1}^{2}$$

$$= \left[\frac{س^4}{2} + س \right]_{-1}^{2}$$

$$= (2 + \frac{16}{2}) - (1 - \frac{1}{2})$$

$$= 10 + \frac{1}{2}$$

$$= 10\frac{1}{2}$$

مثال 14:

ليكن د(س) = $\begin{cases} 2س & 0 \leq س \leq 2 \\ س + 3 & 2 < س \leq 6 \end{cases}$

أوجد $\int_{0}^{6}$ د(س) دس

الحل:

$$\int_{0}^{6} \text{د(س)} \text{ دس} = \int_{0}^{2} \text{د(س)} \text{ دس} + \int_{2}^{6} \text{د(س)} \text{ دس}$$

باستخدام خاصية رقم (2) الإضافة

$$= \int_{0}^{2} س^2 \text{ دس} + \int_{2}^{6} (س + 3) \text{ دس}$$

$$= \left| \frac{س^3}{3} \right|_{0}^{2} + \left(\frac{س^2}{2} + 3س \right)_{2}^{6}$$

$$= 30\frac{2}{3}$$

جميع الحقوق محفوظة لـ مركز المناهج التعليمية والبحوث التربوية ـ ليبيا

مثال 15:

إذا كان ميل المنحى $3س^2 - 4$. وأن المنحنى يمر بالنقطة (- 1، 6) . أوجد معادلة المنحنى .

الحل :

$$\frac{ص}{س} = 3س^2 - 4$$

$$ص = \int (3س^2 - 4)\, س = \frac{3س^3}{3} - 4س + جـ$$

وحيث أن المنحنى يمر بالنقطة (- 1 ، 6) .

$$6 = (-1)^3 - 4(-1) + جـ$$

$$6 = -1 + 4 + جـ$$

$$جـ = 6 - 3 = 3$$

إذن معادلة المنحنى هي : $ص = س^3 - 4س + 3$

مثال 16:

إذا كان $\int_1^2 2د(س)\, س = 10$ فأوجد $\int_1^2 (د(س) + 6)\, س$

الحل :

$$\int_1^2 2\, د(س) = 10 \quad \therefore \int_1^2 د(س)\, س = 5$$

$$\therefore \int_1^2 (د(س) + 6)\, س = \int_1^2 د(س)\, س + \int_1^2 6\, س$$

$$= 5 + 6(2 - 1)$$

$$= 11$$

جميع الحقوق محفوظة لـ مركز المناهج التعليمية والبحوث التربوية ـ ليبيا