

دولة ليبيا
وزارة التعليم
مركز المناهج التعليمية والبحوث التربوية

الرياضيات

للسنة الثالثة من مرحلة التعليم الثانوي
القسم العلمي

الدرس الثاني

المدرسة الليبية بفرنسا ـ تور

العام الدراسي
1441 / 1442 هـ - 2020 / 2021 م

4-1 : بعض خواص المحددات:

1- لا تتغير قيمة المحدد إذا بدلت الأعمدة بالصفوف والصفوف بالأعمدة.

مثال ذلك: $\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 2- \end{vmatrix}$ $\Delta_1 = 22$

$\begin{vmatrix} 2- & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$ $\Delta_2 = 22$

2- تتغير إشارة قيمة المحدد إذا تبادل الوضع فيه بين أي صفين أو عمودين

مثال ذلك: $\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 2- \end{vmatrix}$ $\Delta = 38$

إذا تم استبدال ص: بـ ص$_2$ نجد أن: $\begin{vmatrix} 6 & 2- \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$ ⇦ $\Delta = -38$

3-ينعدم المحدد ($\Delta = 0$) إذا :

- وجد صف أو عمود كل عناصر ه أصفار.
- تساوي عناصر صفين أو عمودين.
- وجد تناسب بين عناصر أي صفين أو أي عمودين.
- وجد صف يساوي مجموع الصفين الآخرين أو عمود يساوي مجموع العمودين الآخرين.

مثال6: بدون فك المحدد أوجد قيمة المحددات الآتية:

(1) أ = $\begin{vmatrix} 0 & 9 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 18- & 5 \end{vmatrix}$

الحل: ∵ ع$_3$ عناصره أصفار ∴ $\Delta = 0$

(2) أ = $\begin{vmatrix} 5 & 2- & 3 \\ 3 & 1- & 5 \\ 2- & 1 & 2 \end{vmatrix}$

الحل: ∵ ص$_2$ = ص$_1$ + ص$_3$ ∴ $\Delta = 0$

(3) أ = $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3- & 1 & 9- \end{vmatrix}$

ملحوظة : يمكن أخذ عامل مشترك من أي صف أو عمود في محدد

الحل: يتم أخذ 3 كعامل مشترك من العمود الأول

$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3- & 1 & 3- \end{vmatrix}$ ← 3

∵ ع$_1$ = 3ع$_3$ ∴ Δ أ = 3 (0) ⇦ $\Delta = 0$

جميع الحقوق محفوظة لـ مركز المناهج التعليمية والبحوث التربوية - ليبيا

مثال7:

بدون فك المحدد أوجد قيمة ك إذا كان: $\begin{vmatrix} 2 & 7 & 2 \\ 1- & 5 & 1- \\ 8-ك & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0$

الحل:

$\Delta = 0$

إذا كان ع = $ع_1$ $_3$

$\therefore$ 3 = 8 − ك

ك = 11

ملحوظة

في المصفوفات ضرب الثابت يتم في جميع العناصر.

3-عند ضرب المحدد في عدد حقيقي فإن الضرب يتم في صف واحد أو عمود فقط.

مثال8:

إذا كان: $أ = \begin{vmatrix} 3 & 9 & 5 \\ 2 & 8 & 4 \\ 1 & 7 & 2- \end{vmatrix}$ أوجد 2 أ

الحل:

$$\begin{vmatrix} 3 & 9 & 10 \\ 2 & 8 & 8 \\ 1 & 7 & 4- \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 9 & 5 \\ 2 & 8 & 4 \\ 1 & 7 & 2- \end{vmatrix} \quad 2 = 2أ 2$$

نتيجة

إذا ضرب عناصر صف أو عمود في عدد ثابت فإن قيمة المحدد الجديدة:

ك× قيمة المحدد = ك × Δ.

ملحوظة

عند ضرب المحدد في عدد ك فإن الناتج = ك × قيمة المحدد.

4-إذا وجد صف أو عمود في صورة مجموع ن من الحدود فإن يمكن إيجاد حاصل جمع ن من المحددات.

مثال9:

$$\begin{vmatrix} أ & ب & جـ \\ ء & و+س+ص & ع \\ ل & م & ن \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} أ & ب & جـ \\ ء & و & ع \\ ل & م & ن \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} أ & ب & جـ \\ 0 & س & 0 \\ ل & م & ن \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} أ & ب & جـ \\ 0 & ص & 0 \\ ل & م & ن \end{vmatrix}$$

جميع الحقوق محفوظة لـ مركز المناهج التعليمية والبحوث التربوية ـ ليبيا

5-1 : المصفوفات

مقدمة... المصفوفة هي أداة رياضية تُستخدم للتعبير عن البيانات بطريقة منسقة، وتعتبر المصفوفات من الدعامات الأساسية في دراسة البرامج الخطية.

مثال تمهيدي ... مصنع لإنتاج أجهزة الإذاعة المرئية الملونة به ثلاثة أقسام تنتج ثلاثة أجزاء رئيسية من الجهاز هي أ ، ب ، جـ ومتوسط الإنتاج اليومي للمصنع من هذه الأجزاء مبينة بالجدول التالي:

الأجزاء	أ	ب	جـ
القسم الأول	13	35	40
القسم الثاني	15	23	36
القسم الأول	10	30	45

فكل عدد في هذا الجدول له دلالة معينة فالعدد 13 مثلا يدل على متوسط الإنتاج اليومي من الجزء أ عن طريق القسم الأول، العدد 30 يدل على متوسط الإنتاج اليومي للمصنع من الجزء ب عن طريق القسم الثالث وهكذا... يمكن تقديم المعلومات السابقة بصورة مختصرة كالأتي:

يتم كتابة الأعداد المتضمنة في الجدول بنفس ترتيبها في الجدول مع وضعها داخل قوسين كبيرين من النوع [ ]

6-1 : الصورة العامة للمصفوفة:

يمكن كتابة المصفوفة التي تتكون من المحدد م من الصفوف، عدد من الأعمدة ن على النحو الأتي:

$$ف = \begin{bmatrix} أ_{11} & أ_{12} & أ_{13} & \cdots & أ_{1ن} \\ أ_{21} & أ_{22} & أ_{23} & \cdots & أ_{2ن} \\ أ_{31} & أ_{32} & أ_{33} & \cdots & أ_{3ن} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ أ_{م1} & أ_{م2} & أ_{م3} & \cdots & أ_{من} \end{bmatrix} \quad \text{.....(1)}$$

ترميز موقع العنصر:

العنصر الذي يقع في الصف ر والعمود ع للمصفوفة ف من النوع م×ن يكتب $أ_{ر ع}$ وبذلك يكون من المناسب أن نأخذ المصفوفة ف هذه الصيغة المختصرة.

$$ف = \left[أ_{ر ع} \right]_{م \times ن} \quad \text{.....(2)}$$

حيث (ر = 1 ، 2 ، ... ، م ، ع = 1، 2 ، ... ، ن)

جميع الحقوق محفوظة لـ مركز المناهج التعليمية والبحوث التربوية ـ ليبيا

7-1 : المفاهيم الأساسية:

1- المصفوفة الحقيقية (Real Matrix) : هي مصفوفة عناصرها أعداداً حقيقية.

2-إذا كان عدد الصفوف = عدد الأعمدة أي (م = ن) عندها تكون المصفوفة مربعة (Square Matrix)

ومن أمثلة المصفوفات المربعة:

(i) $ف_1 = [أ_{ص ع}]_{2\times2}$

(حيث: ص = 1 ، 2 ، ع=1 ، 2)

وهي عبارة عن مصفوفة لها صفان وعمودان، وصورتها العامة تكون:

$$ف_1 = \begin{bmatrix} أ_{11} & أ_{21} \\ أ_{12} & أ_{22} \end{bmatrix}$$

كذلك (ii) $ف_2 = [أ_{ص ع}]_{3\times3}$

(حيث: ص = 1 ، 2 ، 3 ع=1 ، 2 ، 3)

وهي عبارة عن مصفوفة لها ثلاثة صفوف وثلاثة أعمدة وصورتها العامة تكون:

$$ف_2 = \begin{bmatrix} أ_{11} & أ_{21} & أ_{31} \\ أ_{12} & أ_{22} & أ_{32} \\ أ_{13} & أ_{23} & أ_{33} \end{bmatrix}$$

مع ملاحظة أن المصفوفة المربعة يكون لها قطران أحدهما رئيسي والآخر غير رئيسي.

من (i) نجد أن القطر الرئيسي عناصره هي : $أ_{11}$ ، $أ_{22}$ ، و القطر غير الرئيسي عناصره هي: $أ_{12}$ ، $أ_{21}$.

من (ii) نجد أن القطر الرئيسي عناصره هي : $أ_{11}$ ، $أ_{22}$ ، $أ_{33}$ ، و القطر غير الرئيسي عناصره هي: $أ_{13}$ ، $أ_{22}$ ، $أ_{31}$

3-إذا كانت م = 1 سميت المصفوفة (مصفوفة الصف) وهي مصفوفة لها صف واحد فقط وعدد من الأعمدة

فمثلا: أ = [5 4 -2] لها صف واحد وثلاثة أعمدة فهي مصفوفة صف.

ومن أمثلة المصفوفات المربعة:

الصيغة العامة لها: $ف_1 = [أ_{ص ع}]$ (حيث: ص = 1 ، ع = 1 ، 2 ... ، ن)

جميع الحقوق محفوظة لـ مركز المناهج التعليمية والبحوث التربوية - ليبيا

4-إذا كانت ن = 1 سميت المصفوفة (مصفوفة عمود) وهي مصفوفة لها عمود واحد فقط وعدد من الصفوف

فمثلا: $أ = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}_{3\times1}$

مصفوفة لها عمود واحد وثلاثة صفوف فهي مصفوفة عمود.

الصيغة العامة لها: ف = $[أ_{ر ع}]$ (حيث: ر = 1 ، 2، ... ، م ، ع = 1)

5- المصفوفة ليس لها قيمة عددية ولكنها مجرد طريقة لعرض البيانات.

6- المصفوفة الصفرية Null Matrix هي مصفوفة كل عناصرها أصفار ونرمز لها بالرمز $\underline{0}$.

الصيغة العامة لها: $\underline{0} = [أ_{ر ع}]$ حيث: $\underline{0} = \begin{cases} 0 & \text{عندما } ر = ع \\ 0 & \text{عندما } ر \neq ع \end{cases}$

فالصورة $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ عبارة عن مصفوفة صفرية من نوع 3×3

وكذلك $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ عبارة عن مصفوفة صفرية من نوع 3×2

7- المصفوفة القطرية Diagnoal Matrix هي مصفوفة مربعة جميع عناصرها أصفار باستثناء عناصر القطر الرئيسي أي ان:

ف = $[أ_{ر ع}]_{ن\times ن}$ تسمى مصفوفة قطرية إذا كان $أ_{ر ع} = 0$ لما $ر \neq ع$

وهذا يعطى معنى تسمية هذه المصفوفة بالمصفوفة القطرية وهي على سبيل المثال:

$\begin{bmatrix} س & 0 \\ 0 & ص \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} س & 0 & 0 \\ 0 & ص & 0 \\ 0 & 0 & ع \end{bmatrix}$

جميع الحقوق محفوظة لـ مركز المناهج التعليمية والبحوث التربوية ـ ليبيا

8- مصفوفة الوحدة Unit Matrix هي مصفوفة قطرية عناصر القطر الرئيسي يكون الواحد الصحيح ويرمز لها بالرمز I أو مـ والصيغة العامة لها:

$$I = [\,أ_{ص\,ع}\,]_{ن\times ن}$$

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad I_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

حيث: $I = \begin{cases} 1 & \text{عندما } ص = ع \\ 0 & \text{عندما } ص \neq ع \end{cases}$

9- تساوي مصفوفتين Equality of Matrices وتكون المصفوفتين ف$_1$ ، ف$_2$ متساويتان إذا وفقط إذا:

(i) كل عنصر في المصفوفة ف$_1$ له نظيره في المصفوفة ف$_2$ ويساويه.

(ii) لهما نفس النوع.

فإذا كانت: ف$_1$ = $[\,أ_{ص\,ع}\,]_{م\times ن}$ ، ف$_2$ = $[\,ب_{ص\,ع}\,]_{م\times ن}$

فإن: ف$_1$ = ف$_2$ ⇦ $أ_{ص\,ع} = ب_{ص\,ع}$

لكل (ص = 1 ، 2 ، ... ، م ، ع = 1 ، 2 ، ... ، ن)

فمثلا المصفوفتان:

$$أ = \begin{bmatrix} 6 & س & 2 \\ 5- & 3 & ص \end{bmatrix} \qquad ب = \begin{bmatrix} 6 & 1- & 2 \\ ع & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

متساويتان إذا كانت س = -1 ، ع = -5 ، ص = 4

ويقال للمصفوفتين $أ = \begin{bmatrix} س + 2ص \\ 3س - 2ص \end{bmatrix}$ $ب = \begin{bmatrix} 8 \\ 3 \end{bmatrix}$

أنهما متساويتان إذا كانت 3س-ص = 3 ، س + 2ص = 8 ،

بحل المعادلتين نجد أن : س = 2 ، ص = 3

10-عملية ضرب المصفوفات:

ضرب مصفوفة في عدد حقيقي عند ضرب أي مصفوفة في عدد حقيقي نضرب جميع عناصر المصفوفة في ذلك العدد.

مثال 10 : إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 2- \end{bmatrix}$ أوجد: 3أ، -5أ ، $\frac{1}{2}أ$

الحل :

$$3أ = 3\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 2- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 15 \\ 9 & 6- \end{bmatrix}$$

$$-5أ = -5\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 2- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20- & 25- \\ 15- & 10 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{2}أ = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 2- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{2} & \frac{5}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{2-}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & \frac{5}{2} \\ \frac{3}{2} & 1- \end{bmatrix}$$

جميع الحقوق محفوظة لـ مركز المناهج التعليمية والبحوث التربوية - ليبيا