

Дэвид С. Ричесон



Жемчужина Эйлера

Формула Эйлера
для многогранников
и рождение топологии



Вы смогли скачать эту книгу бесплатно на законных основаниях благодаря проекту «**Дигитека**». [Дигитека](#) — это цифровая коллекция лучших научно-популярных книг по самым важным темам — о том, как устроены мы сами и окружающий нас мир.

Дигитека создается командой научно-просветительской программы «[Всенаука](#)». Чтобы сделать умные книги доступными для всех и при этом достойно вознаградить авторов и издателей, «Всенаука» организовала всенародный сбор средств.

Мы от всего сердца благодарим всех, кто помог освободить лучшие научно-популярные книги из оков рынка! Наша особая благодарность — тем, кто сделал самые значительные пожертвования (имена указаны в порядке поступления вкладов):

Дмитрий Зимин
Алексей Сейкин
Николай Кочкин
Роман Гольд
Максим Кузьмич
Арсений Лозбень
Михаил Бурцев
Ислам Курсаев
Артем Шевченко
Евгений Шевелев
Александр Анисимов
Михаил Калябин
Роман Мойсеев
Никита Скабцов
Святослав Сюрин
Евдоким Шевелев

Мы также от имени всех читателей благодарим за финансовую и организационную помощь:

Российскую государственную библиотеку
Компанию «Яндекс»
Фонд поддержки культурных и образовательных проектов «Русский глобус».

Этот экземпляр книги предназначен только для вашего личного использования. Его распространение, в том числе для извлечения коммерческой выгоды, не допускается.

Дэвид С. Ричесон

Жемчужина Эйлера

Euler's Gem

The Polyhedron Formula
and the Birth of Topology

DAVID S. RICHESON

PRINCETON UNIVERSITY PRESS
PRINCETON AND OXFORD

Жемчужина Эйлера

Формула Эйлера для многогранников
и рождение топологии

ДЭВИД С. РИЧЕСОН



Москва, 2021

УДК 530.1
ББК 22.31
P56

Ричесон Д. С.

P56 Жемчужина Эйлера / пер. с англ. А. А. Слинкина. – М.: ДМК Пресс, 2021. – 320 с.: ил.

ISBN 978-5-97060-889-0

Автор книги повествует о примечательной формуле Эйлера для многогранников, прослеживая ее историю от древнегреческой геометрии до совсем недавних исследований, а также о многообразном ее влиянии на топологию – науку об изучении формы.

В 1750 году Эйлер заметил, что любой многогранник, имеющий V вершин, E ребер и F граней, удовлетворяет соотношению $V - E + F = 2$. Из книги вы узнаете, что греки совсем не заметили эту формулу, что Декарт был в шаге от ее открытия, что математики XIX века обобщили ее в направлениях, о которых Эйлер и не подозревал, а в XX веке было доказано, что у любого тела есть своя формула Эйлера. На тщательно подобранных примерах представлены многие элегантные и неожиданные применения этой формулы, например: почему на Земле всегда существует точка, где нет ветра, как измерить площадь лесного участка, посчитав деревья на нем, и сколько разноцветных карандашей необходимо для раскрашивания любой карты.

Издание предназначено для широкого круга любителей математики.

УДК 530.1
ББК 22.31

All rights reserved. No part of this book may be reproduced or transmitted in any form or by any means, electronic or mechanical, including photocopying, recording or by any information storage and retrieval system, without permission in writing from the Publisher. Russian-language edition copyright © 2021 by DMK Press. All rights reserved.

Все права защищены. Любая часть этой книги не может быть воспроизведена в какой бы то ни было форме и какими бы то ни было средствами без письменного разрешения владельцев авторских прав.

ISBN 978-0-691-12677-7 (анг.)
ISBN 978-5-97060-889-0 (рус.)

© Princeton University Press, 2008
© Оформление, издание,
перевод, ДМК Пресс, 2021

*Посвящается Бену и Норе,
вашим граням, всем вашим ребрышкам.
Люблю вас от вершины до кончиков пальцев*

Содержание

От издательства	8
Предисловие.....	9
Введение.....	13
Глава 1 Леонард Эйлер и три его «великих» знакомца	22
Глава 2 Что такое многогранник?.....	38
Глава 3 Пять идеальных тел	42
Глава 4 Пифагорейское братство и атомистическая теория Платона	47
Глава 5 Евклид и его «Начала».....	55
Глава 6 Кеплер и его многогранная Вселенная.....	61
Глава 7 Жемчужина Эйлера	72
Глава 8 Платоновы тела, мячи для гольфа, фуллерены и геодезические купола	83
Глава 9 Был ли Декарт первым?	89
Глава 10 Лежандр расставляет все по местам.....	95
Глава 11 Прогулка по Кёнигсбергу.....	107
Глава 12 Плоскостные многогранники Коши.....	118
Глава 13 Планарные графы, математические планшеты и брюссельская капуста	125
Глава 14 Этот красочный мир	137
Глава 15 Новые проблемы и новые доказательства	152
Глава 16 Резиновые листы, полые бублики и безумные бутылки.....	163
Глава 17 Разные или одинаковые?	180

Глава 18 Узловатая проблема	193
Глава 19 Как причесать ежа	209
Глава 20 Когда топология управляет геометрией	225
Глава 21 Топология искривленных поверхностей	237
Глава 22 Путешествие в n измерения	246
Глава 23 Анри Пуанкаре и взлет топологии	258
Эпилог. Вопрос на миллион долларов	270
Благодарности	276
Приложение А. Создаем многогранники и поверхности своими руками	277
Приложение В. Рекомендуемое чтение	287
Примечания	290
Список литературы	297
Предметный указатель	313

От издательства

Отзывы и пожелания

Мы всегда рады отзывам наших читателей. Расскажите нам, что вы думаете об этой книге – что понравилось или, может быть, не понравилось. Отзывы важны для нас, чтобы выпускать книги, которые будут для вас максимально полезны.

Вы можете написать отзыв на нашем сайте www.dmkpress.com, зайдя на страницу книги и оставив комментарий в разделе «Отзывы и рецензии». Также можно послать письмо главному редактору по адресу dmkpress@gmail.com; при этом укажите название книги в теме письма.

Если вы являетесь экспертом в какой-либо области и заинтересованы в написании новой книги, заполните форму на нашем сайте по адресу http://dmkpress.com/authors/publish_book/ или напишите в издательство по адресу dmkpress@gmail.com.

Список опечаток

Хотя мы приняли все возможные меры для того, чтобы обеспечить высокое качество наших текстов, ошибки все равно случаются. Если вы найдете ошибку в одной из наших книг, мы будем очень благодарны, если вы сообщите о ней главному редактору по адресу dmkpress@gmail.com. Сделав это, вы избавите других читателей от недопонимания и поможете нам улучшить последующие издания этой книги.

Нарушение авторских прав

Пиратство в интернете по-прежнему остается насущной проблемой. Издательства «ДМК Пресс» и Princeton очень серьезно относятся к вопросам защиты авторских прав и лицензирования. Если вы столкнетесь в интернете с незаконной публикацией какой-либо из наших книг, пожалуйста, пришлите нам ссылку на интернет-ресурс, чтобы мы могли применить санкции.

Ссылку на подозрительные материалы можно прислать по адресу электронной почты dmkpress@gmail.com.

Мы высоко ценим любую помощь по защите наших авторов, благодаря которой мы можем предоставлять вам качественные материалы.

Предисловие

Математика – это автомат по переработке кофе в теоремы.

– *Альфред Реньи, часто приписывается Паулю Эрдёшу*¹

Весной моего последнего года учебы в колледже я сказал приятелю, что осенью собираюсь получать степень доктора философии по математике. Он спросил: «А что ты собираешься делать в аспирантуре: изучать очень большие числа или вычислять новые знаки числа пи?»

Я на опыте знаю, что публика в большинстве своем очень слабо представляет, что такое математика, и уж, конечно, совершенно не понимает, чем занимаются математики. Люди с удивлением узнают, что в математике по-прежнему создается что-то новое. Они думают, что математика сводится к изучению чисел или что это серия курсов, которая обрывается на математическом анализе.

Но лично меня числа никогда особенно не интересовали. Устный счет – не моя стихия. Я могу посчитать, какую часть счета за обед должен оплатить, и вычислить размер чаевых, не прибегая к помощи калькулятора, но это займет у меня столько же времени, сколько у любого другого человека. А матанализ был самым нелюбимым мной предметом в колледже.

Мне нравится находить закономерности – особенно в визуальных образах – и разбираться в запутанных логических рассуждениях. Книжные полки в моем кабинете забиты сборниками задач и головоломок, на полях которых сохранились мои детские пометки. Передвинуть три спички, чтобы образовалась новая фигура, найти в лабиринте путь, удовлетворяющий определенным условиям, разрезать заданную фигуру на части, из которых можно сложить квадрат, добавить в чертеж три отрезка, чтобы получилось девять треугольников, и другие задачки такого рода. Вот чем для меня является математика.

Из-за любви к пространственным, визуальным и логическим задачам я всегда испытывал влечение к геометрии. Но, учась в колледже, я открыл для себя очарование топологии, которую обычно определяют как изучение нежестких фигур. Сочетание красивой абстрактной теории с конкретными пространственными манипуляциями точно отвечало моим математическим вкусам. Гибкое и свободное топологическое представление о мире

вселяло в меня ощущение комфорта существования. По сравнению с ним геометрия казалась такой пуританской и консервативной. Если геометрия облачена в строгий пиджак, то топология носит джинсы и футболку.

Эта книга посвящена истории и прославлению топологии. Рассказ начинается с предыстории – геометрии античной Греции и Возрождения и изучения многогранников. Затем мы перейдем к XVIII и XIX столетиям, когда ученые пытались ухватить идею формы и классифицировать объекты, не ограничиваясь жесткими рамками геометрии. И кульминационной точкой станет современная топология, получившая развитие в начале XX века.

В школе и в вузе мы изучали математику по учебникам. В учебниках математика излагается строгим, логически последовательным образом: определение, теорема, доказательство, пример. Но открывали математику не так. Много лет уходило на то, чтобы понять предмет настолько хорошо, чтобы связно изложить его в учебнике. Математика развивается то медленно и постепенно, то гигантскими скачками, бывают шаги в ложном направлении, за которыми следуют исправления и установление связей. В этой книге мы увидим увлекательный процесс математического открытия в действии – как блестящие умы размышляют, задают вопросы, уточняют, развивают и изменяют работы своих предшественников.

Я не стал просто излагать историю топологии, а взял формулу Эйлера для многогранников в качестве путеводаителя. Открытая в 1750-м, формула Эйлера знаменует начало перехода от геометрии к топологии. Мы проследим, как эта формула из любопытного курьеза превратилась в глубокую и полезную теорему.

Формула Эйлера – идеальный путеводаитель, потому что заводит в изумительные помещения, куда редко заглядывают посетители. Идя по ее следам, мы познакомимся с самыми интригующими областями математики – геометрией, комбинаторикой, теорией графов, теорией узлов, дифференциальной геометрией, динамическими системами и топологией. С этими красивейшими предметами типичный студент, даже специализирующийся в математике, может никогда не встретиться.

Кроме того, по пути я буду иметь удовольствие представить читателю некоторых величайших математиков всех времен: Пифагора, Евклида, Кеплера, Декарта, Эйлера, Коши, Гаусса, Римана, Пуанкаре и многих других – все они внесли важный вклад в эту область и в математику в целом.

Никаких формальных предварительных знаний для чтения этой книги не требуется. Математики, изучаемой в средней школе, – алгебры, тригонометрии, геометрии – достаточно, но большая ее часть к обсуждаемой теме не имеет отношения. Книга вполне самостоятельна, а в тех редких случаях, когда это необходимо, я буду напоминать читателю факты из этих математических дисциплин.

Но не впадайте в заблуждение – некоторые излагаемые идеи весьма сложны и абстрактны, представить их наглядно нелегко. Читатель должен

быть готов воспринимать логические рассуждения и мыслить абстрактно. Чтение математического текста – совсем не то же самое, что романа. Иногда нужно остановиться и обдумать каждое предложение, еще раз прочитать рассуждение, попытаться придумать другие примеры, внимательно рассмотреть рисунки в тексте, представить картину в целом и заглянуть в предметный указатель, чтобы вспомнить точный смысл термина.

Конечно, не будет никаких домашних заданий и выпускного экзамена в конце книги. Вовсе не стыдно пропустить трудные места. Если в каком-то особенно каверзном рассуждении никак не удастся разобраться, переходите к следующей теме. Это не помешает восприятию других частей книги. Можете загнуть уголок страницы и вернуться к ней позже.

Я полагаю, что аудитория этой книги отбирается сама собой. Всякий, кто *хочет* ее прочесть, *сможет* это сделать. Эта книга не для всех, но те, кто не в состоянии понять и оценить математику, наверное, не стали бы ей даже интересоваться.

У меня есть одно весьма ценное преимущество – я никогда не писал учебников. Я изо всех сил старался быть честным и строгим в описании математики, но мог позволить себе роскошь опускать докучные детали, которые больше запутывают, чем проясняют. Поэтому я мог вести изложение на более высоком уровне, сосредоточившись на идеях, интуитивном понимании и общей картине. По необходимости я вынужден был ограничиться в этой книге лишь поверхностным обсуждением многих чарующих идей. Если вы захотите узнать больше о рассматриваемых темах или восполнить недостающие детали, то обратитесь к рекомендованной в приложении В литературе.

Хотя эта книга доступна широкой аудитории, я писал ее также для математиков. Местами она пересекается с другими книгами, но я не знаю ни одной, в которой бы содержалась вся изложенная здесь информация. В конце книги приведена обширная библиография, в т. ч. ссылки на многие оригинальные статьи. Это поможет ученым, желающим глубже покопаться в предмете.

Эта книга организована следующим образом. В главах 2, 3, 4, 5 и 6 описывается теория многогранников, существовавшая до Эйлера. В основном речь в них идет о самом знаменитом классе – правильных многогранниках. В главах 7, 9, 10, 12 и 15 представлена формула Эйлера для многогранников и ее обобщения на другие жесткие многогранные тела. Это обсуждение событий, имевших место до середины XIX века. Главы 16, 17, 22 и 23 посвящены топологической интерпретации формулы Эйлера, развитой в конце столетия. Сюда входят обобщения на поверхности и многомерные топологические объекты.

В книге также упоминаются многочисленные приложения формулы Эйлера. В главе 8 описаны ее элементарные применения, в главах 11, 13 и 14 – применения в теории графов. В главах 18, 19, 20 и 21 речь пойдет

о поверхностях, их связях с формулой Эйлера, а также о ее применениях к теории узлов, динамическим системам и геометрии.

Надеюсь, что вы испытаете такое же удовольствие от чтения этой книги, какое испытывал я, когда писал ее. Для меня весь этот проект стал гигантской головоломкой – академической «охотой за предметами». Поиск нужных кусочков и соединение их в связную историю было для меня вызовом и источником восторгов. Я люблю свою работу.

Дэйв Ричесон,
колледж Дикинсон,
6 июля 2007

Введение

Философия записана в этой огромной книге, которая постоянно открыта перед нашими глазами (я говорю о Вселенной), но чтобы её понять, надо научиться понимать язык и условные знаки, которыми она написана. Она написана на языке математики, а её буквы – треугольники, круги и другие геометрические фигуры; без них невозможно понять ни слова, без них – тщетное блуждание по темному лабиринту.

– Галилео Галилей¹

Все они прошли мимо нее. Древние греки – такие светила математики, как Пифагор, Теэтет, Платон, Евклид и Архимед, одержимые многогранниками, – прошли мимо. Иоганн Кеплер, великий астроном, так восторгался красотой многогранников, что положил их в основу ранней модели Солнечной системы, прошел мимо. В своем исследовании многогранников математик и философ Рене Декарт находил всего в нескольких логических шагах от ее открытия, но тоже прошел мимо. Все эти и многие другие математики не заметили связи такой простой, что ее можно объяснить любому школьнику, и вместе с тем настолько фундаментальной, что она вошла в плоть и кровь современной математики.

А великий швейцарский математик Леонард Эйлер (1707–1783) мимо не прошел. 14 ноября 1750 г. в письме к своему другу Христиану Гольдбаху (1690–1764), занимавшемуся теорией чисел, Эйлер писал: «Меня поражает, что такое общее свойство стереометрии (геометрии пространственных тел) до сих пор, насколько мне известно, никем не было замечено»². В этом письме Эйлер описал свое наблюдение, а годом позже представил доказательство. Наблюдение настолько фундаментальное и важное, что теперь оно называется *формулой Эйлера для многогранников*.

Многогранником называется трехмерный объект наподобие изображенных на рис. 1.1. Он состоит из многоугольных *граней*. Каждая пара соседних граней имеет общий прямолинейный отрезок, называемый ребром, а соседние ребра пересекаются в угловой точке, называемой *вершиной*. Эйлер заметил, что количества вершин, ребер и граней (V , E , F) всегда связаны простым и элегантным арифметическим соотношением:

$$V - E + F = 2.$$

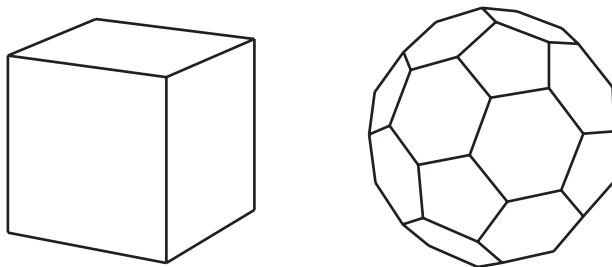


Рис. I.1. Куб и футбольный мяч (усеченный икосаэдр) удовлетворяют формуле Эйлера

Самым известным многогранником, наверное, является куб. Нетрудно посчитать, что у него шесть граней: по одному квадрату сверху и снизу и четыре по бокам. Границы этих квадратов – ребра куба. Всего их насчитывается двенадцать: по четыре сверху и снизу и четыре вертикальных по бокам. Четыре верхних и четыре нижних угла дают нам восемь вершин. Таким образом, для куба имеем $V = 8$, $E = 12$, $F = 6$ и, конечно же,

$$8 - 12 + 6 = 2,$$

как и должно быть. Для многогранника на рис. I.1, напоминающего футбольный мяч, подсчет сложнее, но можно убедиться, что он имеет 32 грани (12 пятиугольных и 20 шестиугольных), 90 ребер и 60 вершин. И снова

$$60 - 90 + 32 = 2.$$

Но открытие Эйлера – только начало истории. Помимо работы по многогранникам, Эйлер создал новую дисциплину *analysis situs*, которая сегодня известна под названием топологии. Геометрия изучает жесткие объекты. Геометров интересует измерение таких величин, как площади, углы, объемы и длины. Топология, получившая популярное прозвище «резиновая геометрия», изучает эластичные фигуры. Объект внимания тополога не обязан быть жесткой геометрической фигурой. Топологов интересует связность, наличие дырок и скрученность. Когда клоун скручивает из надувного шара собаку, его топология не меняется, но геометрические тела совершенно различны. Но когда ребенок протыкает воздушный шарик карандашом, он оставляет в нем зияющую дыру, в результате чего топология изменяется. На рис. I.2 мы видим три примера топологических поверхностей: сфера, тор в виде бублика и перекрученная лента Мёбиуса.

Исследователи, занимавшиеся новой наукой, топологией, были очарованы формулой Эйлера и попытались применить ее к топологическим поверхностям. Возник очевидный вопрос: где расположены вершины, ребра и грани на топологической поверхности? Топологи отбросили жесткие ограничения, налагаемые геометрами, и допустили искривленные грани и ребра. На рис. I.3 мы видим разбиение сферы на «прямоугольные» и «тре-

угольные» области. Это разбиение образовано в результате проведения 12 меридианов, сходящихся в полюсах, и 7 параллелей. На этом изображении глобуса имеется 72 криволинейные прямоугольные грани и 24 криволинейные треугольные грани (последние расположены вблизи полюсов) – всего 96 граней. Имеется также 180 ребер и 86 вершин. Стало быть, как и в случае многогранников,

$$V - E + F = 86 - 180 + 96 = 2.$$

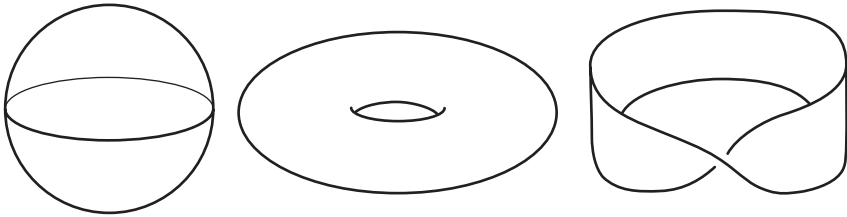


Рис. I.2. Топологические поверхности: сфера, тор и лента Мёбиуса

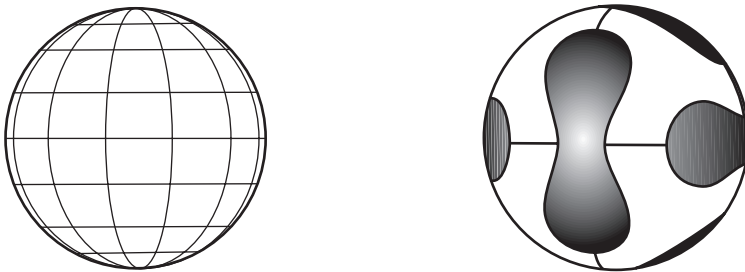


Рис. I.3. Два разбиения сферы

Мяч, которым играли на Всемирном чемпионате по футболу в 2006 году, состоял из шести четырехсторонних кусков в форме песочных часов и восьми бесформенных шестиугольных кусков (рис. I.3). Он также удовлетворяет формуле Эйлера ($V = 24, E = 36, F = 14$).

Возникает искушение сделать вывод, что формула Эйлера справедлива для любой топологической поверхности. Однако если разбить тор на прямоугольные грани, как на рис. I.4, то получится неожиданный результат. Разбиение образовано проведением двух окружностей вокруг центрального отверстия тора и четырех окружностей на самой кольцевой трубке. Оно состоит из 8 четырехсторонних граней, 16 ребер и 8 вершин. При этом

$$V - E + F = 8 - 16 + 8 = 0,$$

а не 2, как предсказывает формула Эйлера.

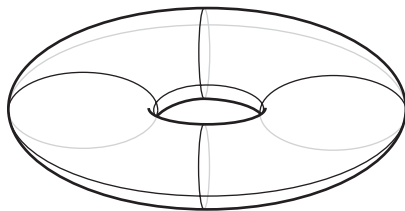


Рис. I.4. Разбиение тора

И если бы мы построили другое разбиение тора, то обнаружили бы, что эта знакопеременная сумма по-прежнему равна нулю. Поэтому для тора мы получаем *новую* формулу Эйлера:

$$V - E + F = 0.$$

Можно доказать, что у любой топологической поверхности есть «своя» формула Эйлера. Не важно, на сколько граней разбить поверхность сферы – на 6 или на 1600, все равно формула Эйлера всегда будет давать 2. И точно так же, если применить формулу Эйлера к любому разбиению тора, получится 0. Это число может служить характеристикой поверхности, подобно тому, как количество колес характеризует транспортные средства. У любой легковой машины четыре колеса, у тягача с прицепом восемнадцать, а у мотоцикла два колеса. Если у транспортного средства не четыре колеса, то это не легковая машина, а если у него не два колеса, то это не мотоцикл. Аналогично, если $V - E + F$ не равно 0, то поверхность топологически не эквивалентна тору.

Величина $V - E + F$ внутренне связана с формой поверхности. Топологи говорят, что она является *инвариантом* поверхности. Из-за этого свойства инвариантности величина $V - E + F$ называется *эйлеровой характеристикой* поверхности. Эйлера характеристика сферы равна 2, а тора – 0.

В данный момент тот факт, что у каждой поверхности своя эйлера характеристика, может показаться не более чем математическим курьезом, над которым забавно поразмышлять, держа в руках футбольный мяч или глядя на геодезический купол – мол, «круто же». Но, конечно же, это далеко не так. Как мы увидим, эйлера характеристика – незаменимый инструмент при изучении многогранников, не говоря уже о топологии, геометрии, теории графов и динамических системах, и у нее есть весьма элегантные и неожиданные применения.

Математический узел, показанный на рис. I.5, похож на спутанную веревочную петлю. Два узла считаются эквивалентными, если один можно деформировать в другой, не разрезая и не склеивая заново веревку. При некоторой изобретательности мы можем использовать эйлера характеристику также для различения узлов и доказать, что два узла на рис. I.5 не эквивалентны.

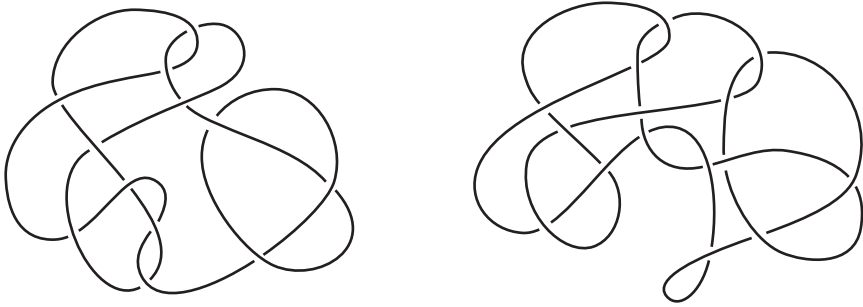


Рис. I.5. Это один и тот же узел?

На рис. I.6 показана карта направления ветров на поверхности Земли. Рядом с побережьем Чили мы видим точку, где ветра нет. Она расположена в центре тайфуна, вращающегося по часовой стрелке. Можно доказать, что на поверхности Земли всегда существует по крайней мере одна точка, в которой нет ветра. И это вытекает не из знания метеорологии, а из чисто топологических соображений. Существование такой точки затишья следует из факта, который математики называют теоремой о причесывании ежаⁱ. Неформально говоря, невозможно причесать свернувшегося клубком ежа, так чтобы у него не торчала ни одна иголочка. В главе 19 мы увидим, как эйлерова характеристика позволяет доказать это смелое утверждение.



Рис. I.6. Всегда ли на поверхности Земли существует точка, в которой не дует ветер?

ⁱ В англоязычной литературе ее называют теоремой о волосатом шаре: если представлять себе стрелки, показывающие направление ветра, как волосы на поверхности Земли, то обязательно найдется точка, в которой волосы образуют хохолок. – Прим. перев.

На рис. I.7 изображен многоугольник, все вершины которого находятся в узлах равномерной сетки, отстоящих друг от друга на единичное расстояние. Удивительно, но мы можем точно вычислить площадь этого многоугольника, просто подсчитав количество точек. В главе 13 мы увидим, что формула Эйлера позволяет вывести элегантную формулу, выражающую площадь многоугольника через количество точек на его границе (B) и количество точек внутри (I):

$$\text{Площадь} = I + B/2 - 1.$$

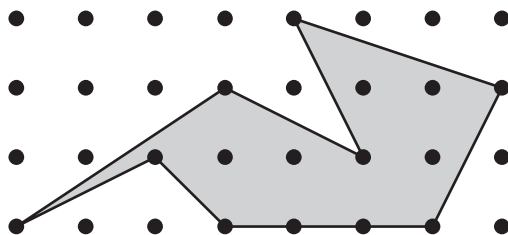


Рис. I.7. Можно ли определить площадь закрашенного многоугольника путем подсчета точек?

Согласно этой формуле, площадь показанного многоугольника равна $5 + 10/2 - 1 = 9$.

Существует старая и интересная задача о том, сколько цветов необходимо для раскрашивания карты таким образом, что любые два области, имеющие общую границу, раскрашены в разные цвета. Возьмите чистую карту США и попробуйте раскрасить ее, используя как можно меньше цветных карандашей. Очень скоро вы обнаружите, что для большей части карты достаточно всего трех карандашей, но, чтобы завершить краску, понадобится четвертый цвет. Например, штат Невада окружен нечетным числом штатов, поэтому для их раскраски нужно три карандаша, но тогда для самой Невады потребуются четвертый карандаш (рис. I.8). При умном подходе можно обойтись без пятого карандаша – четырех цветов достаточно для раскраски всей карты США. Уже давно предполагалось, что любую карту можно раскрасить в четыре цвета или меньше. Эта знаменитая гипотеза, которая никак не поддавалась усилиям математиков, получила название проблемы четырех красок. В главе 14 мы подробно расскажем эту увлекательную историю; в 1976 году она закончилась вызвавшим много споров доказательством, в котором эйлерова характеристика сыграла ключевую роль.

Графит и алмаз – два материала, состоящие только из атомов углерода. В 1985 года трое ученых – Роберт Кёрл, Ричард Смолли и Харольд Крото – шокировали научное сообщество, открыв новый класс молекул, состоящих только из углерода. Они назвали их *фуллеренами* в честь архитектора Бак-

минстера Фуллера, изобретателя геодезического купола (рис. I.9). Такое название было выбрано, потому что фуллерены представляют собой большие молекулы в форме многогранников, напоминающих эту конструкцию. За открытие фуллеренов все трое были удостоены Нобелевской премии по химии за 1996 год. В фуллерене каждый атом углерода связан ровно с тремя соседями, так что образуются пятиугольные и шестиугольные кольца атомов. Первоначально Кёрл, Смолли и Крото обнаружили фуллерены, составленные из 60 и 70 атомов углерода, но затем были открыты и другие. Самую красивую молекулу фуллерена, C_{60} , имеющую форму футбольного мяча, она назвали бакминстерфуллереном. Поразительно, что, ничего не зная о химии, а располагая только формулой Эйлера, мы можем утверждать, что некоторые конфигурации атомов углерода не могут встречаться в фуллеренах. Например, фуллерен любого размера должен иметь ровно 12 пятиугольных углеродных колец, хотя количество шестиугольных колец может различаться.

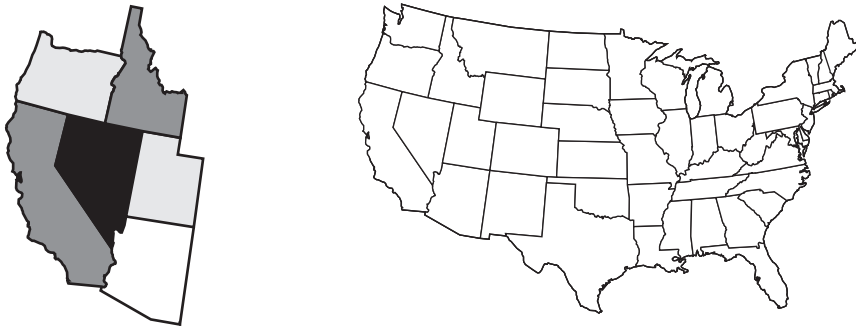


Рис. I.8. Можно ли раскрасить карту США в четыре цвета?

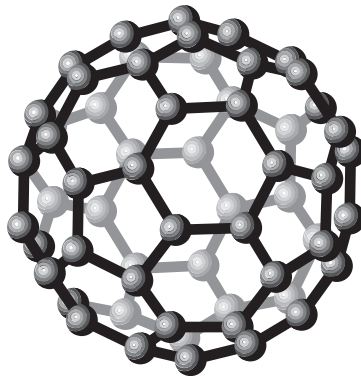


Рис. I.9. Молекула бакминстерфуллерена C_{60}

Тысячи лет люди рисуют красивые и манящие правильные многогранники, гранями которых являются правильные многоугольники (рис. 1.10). Греки знали пять таких тел, Платон включил их в свою атомистическую теорию, а Кеплер положил их в основу ранней модели Солнечной системы. Тайна, окружавшая эти пять многогранников, отчасти связана с тем, что их так мало, – больше ни один многогранник не удовлетворяет строгим критериям правильности. Одно из самых элегантных применений формулы Эйлера – очень короткое доказательство этого факта.

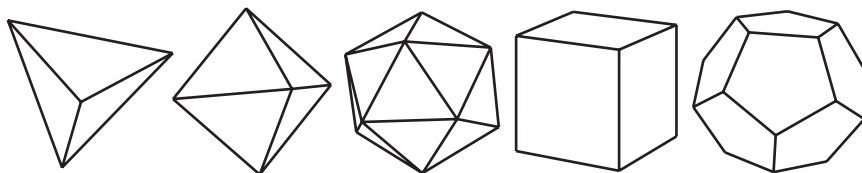


Рис. 1.10. Пять правильных многогранников

Несмотря на свою важность и красоту, формула Эйлера практически неизвестна широкой публике. Ее нет в стандартном школьном курсе математики. Некоторые старшеклассники знают формулу Эйлера, но большая часть студентов, изучающих математику, встречаются с ней только в колледже.

Математическая слава – странная вещь. Некоторые теоремы хорошо известны, потому что вколочены в головы школьников: теорема Пифагора, формула корней квадратного уравнения, основная теорема математического анализа. Другие результаты оказываются на слуху, поскольку решают знаменитую задачу. Великая теорема Ферма оставалась недоказанной в течение трехсот лет, пока в 1993 году Эндрю Уайлс не удивил мир своим доказательством. Проблема четырех красок была поставлена в 1853 году, а доказана Кеннетом Appelем и Вольфгангом Хакеном в 1976 году. Знаменитая гипотеза Пуанкаре была выдвинута в 1904 году и вошла в число семи проблем тысячелетия по версии Института математики Клэя, который счел их настолько важными, что математику, решившему любую из них, была обещана награда в размере миллиона долларов. Эта сумма была присуждена Григорию Перельману, предложившему доказательство гипотезы Пуанкаре в 2002 году. Некоторые математические факты хорошо известны в силу своего междисциплинарного характера (последовательность чисел Фибоначчи в природе) или исторической значимости (бесконечность множества простых чисел, иррациональность числа π).

Формула Эйлера должна быть известна так же хорошо, как эти великие теоремы. У нее красочная история, а в теорию внесли вклад многие величайшие математики. Это глубокая теорема, и понимание всей ее глубины только возрастает по мере развития математики.

Книга, которую вы держите в руках, – рассказ о красивой теореме Эйлера. Мы проследим ее историю и покажем, как она перебрасывает мост между многогранниками древних греков и современной топологией. Мы расскажем о многих обличьях, под которыми скрывается формула Эйлера в геометрии, топологии и динамических системах. Мы также приведем примеры теорем, доказательства которых основаны на формуле Эйлера. Мы увидим, почему эта долгое время остававшаяся незамеченной формула стала одной из самых уважаемых теорем в математике.

Глава 1

Леонард Эйлер и три его «великих» знакомца

Читайте, читайте Эйлера – он наш общий учитель.

– *Пьер-Симон Лаплас*¹

Мы привыкли к гиперболам. Телевизионная реклама, рекламные щиты, спортивные комментаторы, популярные музыканты регулярно извергают такие эпитеты, как величайший, лучший, ярчайший, быстрейший и прочее. Эти слова давно уже утратили свое буквальное значение и используются как естественная часть продвижения товара или развлечения зрителя. Поэтому слова о том, что Леонард Эйлер был одним из самых влиятельных и плодовитых математиков, когда-либо рождавшихся на свет, могут не произвести никакого впечатления на читателя. Но мы ничего не преувеличиваем. Эйлер наряду с Архимедом (287–211 до н. э.), Исааком Ньютоном (1643–1727) и Карлом Фридрихом Гауссом (1777–1855) признан как один из десяти – или даже пяти – самых важных и значительных математиков в истории.

За свою 76-летнюю жизнь Эйлер написал столько математических работ, что для их печати потребовалось семьдесят четыре весьма объемистых тома, – больше, чем любой другой математик. Когда все его работы были опубликованы (а новые материалы обнаруживались в течение 79 лет после его смерти), оказалось, что он автор ошеломительных 866 трудов, включая статьи и книги по самым передовым предметам, элементарные учебники, научно-популярные работы и технические руководства. И сюда еще не включены предположительно пятнадцать томов писем и записных книжек, которые все еще готовятся к печати.

Но значимость Эйлера определяется не его плодовитостью, а глубиной основополагающих вкладов в математику. Эйлер не специализировался в какой-то одной области. Он был одним из великих универсалов, оставившим след в самых разных дисциплинах. Он опубликовал влиятельные статьи и книги по математическому анализу, теории чисел, комплексному

анализу, вариационному исчислению, дифференциальным уравнениям, теории вероятностей и топологии. И это не считая вклада в такие прикладные предметы, как оптика, электричество и магнетизм, механика, гидродинамика и астрономия. Ко всему прочему Эйлер обладал чертой, редкой среди больших ученых и тогда, и в наше время: он был превосходным стилистом. В отличие от своих предшественников, Эйлер писал простым и ясным языком, благодаря чему его работы равно доступны специалистам и студентам.

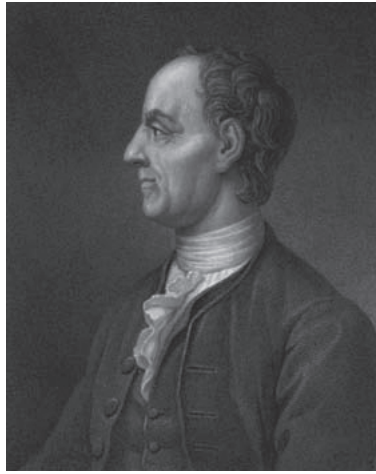


Рис. 1.1. Леонард Эйлер

Эйлер был мягким скромным человеком, его жизнь была сосредоточена на большой семье и работе. Он жил сначала в Швейцарии, потом в России, Пруссии и снова в России и активно переписывался со многими известными мыслителями XVIII века. Его профессиональная жизнь была связана с тремя «Великими» правителями Европы – Петром Великим, Фридрихом Великим и Екатериной Великой. Во времена правления этих монархов были созданы или воссозданы национальные академии наук их стран. Эти академии финансово поддерживали Эйлера, так что он мог заниматься чистой наукой. Взамен ожидалось лишь, что время от времени он будет применять свой научный опыт на благо государства, а его известность принесет славу нации.

Леонард Эйлер родился в швейцарском городе Базеле 15 апреля 1707 года в семье Пауля Эйлера и Маргариты Брукер Эйлер. Вскоре после этого семья переехала в близлежащий городок Рихен, где Пауль был назначен пастором местной кальвинистской церкви.

Первые уроки математики Эйлеру давал отец. Он не был математиком, но учился математике у знаменитого Якоба Бернулли (1654–1705), ког-

да Пауль и младший брат Якоба Иоганн (1667–1748), будучи студентами Базельского университета, столовались в доме Якоба. Якоб и Иоганн Бернулли были членами семейства, которому суждено было стать одной из самых известных фамилий в математике. Больше ста лет клан Бернулли играл заметную роль в развитии математики, вклад в которую внесли по меньшей мере восемь Бернулли.

Формальное обучение Леонард начал в Базельском университете в возрасте 14 лет. В то время столь юный возраст не считался чем-то необычным для студента университета. Университет был небольшим – всего несколько сотен студентов и девятнадцать профессоров. Пауль надеялся, что сын пойдет по его стопам и станет пастором, поэтому Эйлер изучал теологию и иврит. Но его математические способности были несомненны, и очень скоро он привлек внимание друга отца Иоганна Бернулли. К тому времени Иоганн стал одним из ведущих европейских математиков.

Иоганн был заносчивым резким человеком, он всегда желал быть первым, что приводило к известным скандалам по поводу приоритета (в том числе со своим братом и сыном). Тем не менее он заметил выдающийся талант мальчика и посоветовал ему строить карьеру в математике. В своей автобиографии Эйлер писал: «Если я сталкивался с каким-то препятствием или трудностью, то мог свободно прийти к нему в субботу вечером, и он доброжелательно объяснял мне то, чего я не мог понять»². Эти уроки сыграли большую роль в становлении математической техники Эйлера.

Несмотря на то что Леонард преуспевал в своих частных занятиях математикой, Пауль все еще надеялся, что его сын станет пастором. В семнадцать лет Эйлер получил степень магистра философии. Иоганн опасался, что его протееже может оказаться потерян для математики и станет приобретением Церкви, поэтому вмешался и твердо сказал Паулю, что Леонард может стать выдающимся математиком. Из-за теплых чувств, питаемых к математике, Пауль уступил. Но хотя Эйлер отказался от идеи стать пастором, он всю свою жизнь оставался набожным кальвинистом.

Свой первый независимый математический результат Эйлер получил в девятнадцать лет. За теоретическую работу по идеальному размещению мачт на судне он заслужил «похвальное упоминание» в престижном конкурсе, организованном Французской академией наук. Это достижение было бы невероятным для любого юноши его возраста, а особенно для молодого человека из Швейцарии, который никогда не видел океанского корабля. В том конкурсе Эйлер не стал победителем, что было бы примерно эквивалентно получению сегодняшней Нобелевской премии, но в последующие годы он удостоивался высшей награды двенадцать раз.

В то время, когда родился Эйлер, в тысяче миль на северо-запад от Базеля российский император Петр Великий (1672–1725) строил город Санкт-Петербург. Он был основан в 1703 году в болотистой местности недалеко от места впадения Невы в Балтийское море. Петр использовал рабский труд

для возведения как самого города, так и Петропавловской крепости, занимающей стратегически выгодное положение на одном из островов в устье Невы. Он любил свой новый город, называл его «парадизом» и дал ему имя в честь своего святого покровителя. Несмотря на то что большинство русских людей, а в особенности государственных чиновников, не разделяли чувств Петра к этому холодному и сырому месту, он перенес столицу России из Москвы в Санкт-Петербург. Юный Эйлер еще не знал, что этот город станет его домом на протяжении большей части жизни.



Рис. 1.2. Российский император Петр Великий

Петр Великий, физически крепкий мужчина почти семи футов ростом, был энергичным, самостоятельно выучившимся, решительно настроенным правителем России с 1682 по 1725 год. Не знающий жалости реформатор, он начал преобразование своей державы из аграрной феодальной страны под властью Церкви в могущественную империю. Его цель – модернизировать на западный лад российское правительство, культуру, образование, военное устройство и общество – в значительной степени была достигнута. Как писал один русский историк, «внезапно, пропустив целые эпохи схоластики, Возрождения и Реформации, Россия перескочила из консервативной, церковной, квазисредневековой цивилизации в Век Разума»³.

Одной из частей этого переустройства на западный манер Петр считал реформирование российской системы образования, которой до его во-

царения не было вовсе, если не считать минимального обучения в рамках могущественной православной церкви. Поэтому в России не было ученых. Из-за сильного влияния церкви русские с опаской относились к научному познанию мира, предпочитая традиционные религиозные объяснения. Петр осознал необходимость улучшить международный имидж России и развеять миф о том, что русские ненавидят науку. Он также понимал, что наличие программы развития науки жизненно важно для создания и поддержания государственной мощи.

Петр посетил Лондонское королевское общество и Французскую академию наук в Париже, основанные одновременно в 1660 году. Увиденное произвело на него глубокое впечатление. Он также восхищался новой Берлинской академией наук, основанной в 1700 году по совету Готфрида Лейбница (1646–1716). Лейбниц был знаменитым математиком, которому, наряду с Исааком Ньютоном, принадлежит честь создания математического анализа. Эти академии не были университетами, они «предназначались для поиска новых знаний, а не для распространения существующей мудрости»⁴. Члены академий были учеными, а не преподавателями, их основной целью было расширение сферы знания.

Петр хотел создать такую академию, как в Париже, Лондоне и Берлине, и основать ее в новом городе Санкт-Петербурге. За советом он обратился к Лейбницу. В течение почти двух десятков лет Петр и Лейбниц обсуждали, в письмах и при личных встречах, реформу образования и создание Академии наук.

В 1724 году Петр довел до конца план создания Академии наук в Санкт-Петербурге; это был последний и самый амбициозный проект в его усилиях по улучшению системы образования в России. Однако он не мог организовать академию точно по образцу европейских. Поскольку в России не было своих ученых, ему пришлось убеждать талантливых иностранцев переехать в Санкт-Петербург. Кроме того, так как в России не было университетов, Академия наук должна была исполнять также функции университета. Частью мандата Академии было обучение русских наукам, чтобы в дальнейшем она могла не зависеть от иноземцев.

Петру не суждено было увидеть плоды своих трудов, он умер еще не старым в 1725 году. Но благодаря новой императрице, второй жене Петра Екатерине I (1684–1727), воплощение планов создания Академии продолжилось. Иностранные ученые начали приезжать спустя несколько месяцев после смерти Петра, а первое собрание Академии наук состоялось до конца года. Петру повезло, что Екатерина прониклась идеей Академии. В последующие годы Академия не всегда удавалась благосклонного внимания властей предрежащих. За тридцать семь лет, прошедших со смерти Петра до коронации Екатерины Великой (1729–1796), в России сменилось шесть правителей, и Академия всегда зависела от милости этих своевольных и могущественных людей.

Поначалу в штате Академии было шестнадцать ученых: тринадцать немцев, два швейцарца, один француз – и ни одного русского. Преобладание немцев и отсутствие русских позже стало источником трений.

Из-за холодного климата, удаленности и академической изоляции необходимо было предлагать высокое жалование и комфортное жилье, чтобы соблазнить ученых переездом в Санкт-Петербург. Новая академия была небольшой, но быстро выполнила обещание стать важным, международно признанным научным учреждением. В конечном итоге она стала центром всей научной жизни в России. Академия наук пережила несколько смен названия, но существует и по сей день и называется Российской академией наук.

В новом научном учреждении блистали двое иностранных ученых, друзья Эйлера и сыновья Иоганна Бернулли, Николай (1695–1726) и Даниил (1700–1782). Оба брата говорили Эйлеру об Академии до отъезда из Швейцарии и обещали подыскать ему место при первой возможности. После прибытия в Россию они стали уговаривать администрацию Академии пригласить их молодого друга. Эта кампания вскоре принесла плоды. В 1726 году Эйлеру была предложена должность в отделении медицины и физиологии. К сожалению, Эйлер не смог в полной мере насладиться этим интересным предложением и отпраздновать свое назначение. Его приняли на вакансию, открывшуюся после трагической и преждевременной смерти Николая.

Эйлер был благодарен за работу, но не спешил немедленно переехать в Россию. У него было две причины оставаться в Базеле и повременить с новой работой. Во-первых, он согласился на должность в отделении медицины, но обладал лишь минимальными познаниями в этой области. Поэтому он решил остаться в Базельском университете, чтобы изучить анатомию и физиологию. Во-вторых, он тянул время, надеясь, что ему предложат возглавить кафедру физики в университете. Осенью 1727-го, узнав, что эту должность отдали другому человеку, он уехал в Россию. Так началась его жизнь в Санкт-Петербурге, где он провел следующие четырнадцать лет, а потом еще последние семнадцать лет жизни.

Путешествие Эйлера в Санкт-Петербург морем, пешком и на повозке заняло семь недель. В тот день, когда он ступил на российскую землю, императрица Екатерина I умерла, процарствовав всего два года. Судьба новой Академии оказалась под вопросом. Те, кто правил страной от имени одиннадцатилетнего царя Петра II (1715–1730), внука Петра Великого, считали Академию ненужной роскошью и подумывали о ее закрытии. По счастью, Академия уцелела, и в последовавшей неразберихе Эйлер в конце концов оказался там, где и должен был быть, – в физико-математическом отделении. 1727 год – первый год математической карьеры Эйлера, стал также годом кончины математического гения Исаака Ньютона.

Жизнь в Академии во времена правления Петра II была нелегкой, поэтому ее члены надеялись на изменение своей судьбы в благоприятную сто-

рону после смерти пятнадцатилетнего царя в 1730 году. И действительно, положение Академии несколько улучшилось при десятилетнем царствовании Анны Иоанновны (1693–1740), но жить в России стало неуютно. Анна привнесла в правительство сильное немецкое влияние, связанное прежде всего с ее фаворитом Эрнстом Иоганном Бироном (1690–1772). Бирон был безжалостным тираном, казнившим несколько тысяч россиян и отправившим в Сибирь десятки тысяч. Гонениям со стороны Бирона подверглись обычные преступники, старoverы и политические противники Анны. Впоследствии, уже в Берлине, на вопрос, почему он такой неразговорчивый, Эйлер ответил королеве-матери Пруссии: «Государыня, это потому, что я только что прибыл из страны, где за слова вешают»⁵.

В 1733-м, устав от трудной жизни в России и внутренних дразг в Академии, Даниил Бернулли вернулся в Швейцарию, и Леонард Эйлер в возрасте 26 лет принял на себя роль ведущего математика.

Именно тогда Эйлер понял, что, возможно, останется в России надолго, быть может, навсегда. Если отвлечься от сложной политической обстановки, Эйлер вел в России комфортабельную жизнь. Он хорошо выучил русский язык и наконец-то, после повышения жалованья, сопровождавшего продвижение по службе, почувствовал себя финансово обеспеченным. Поэтому в 1733 г. он решил жениться на Катарине Гзелль, дочери уроженца Швейцарии, художника Георга Гзелля, которого привез в Россию Петр Великий. Леонард и Катарина создали семью и произвели на свет тринадцать детей. Как нередко бывало в те времена, лишь пять из них дожили до зрелых лет и только трое пережили родителей.

Обязанности мужа и отца не замедлили поток публикаций Эйлера. И теперь, как и во все периоды своей профессиональной жизни, он весьма активно занимался научными изысканиями. Трудно переоценить колоссальную продуктивность Эйлера. Говорили, что он мог написать математическую статью, качая младенца на коленях, и сочинить трактат между первым и вторым звонком на обед. Он писал обо всем и в любом жанре. Он создавал шедевры и короткие заметки, держал корректуру, давал объяснения, делился частичными результатами и идеями доказательств, публиковал учебники для начинающих и технические книги.

Ничто не могло удержать Эйлера. Даже слепота не остановила поток его математических результатов. В 1738-м он заболел, проведя три долгих дня в работе над астрономической задачей. Хотя современная медицина ставит этот диагноз под сомнение, долгое время считалось, что именно из-за этой болезни он стал хуже видеть, а затем и совсем ослеп на правый глаз. Эйлер отнесся к потере зрения философски. В типичной для него скромной манере он заметил: «Теперь я буду меньше отвлекаться»⁶. Позже он перестал видеть и другим глазом и последние семнадцать лет жизни провел почти в полной тьме. Но, несмотря на потерю зрения, он продолжал делать важные вклады в математику до самой кончины.

Мозг Эйлера, казалось, был настроен на математику, как никакой другой. Он мог одновременно мысленно жонглировать многими абстрактными понятиями и производить сногшибательные вычисления в уме. Есть знаменитая история о том, как два ученика Эйлера складывали семнадцать дробных членов, и обнаружилось, что суммы не совпадают. Эйлер вычислил сумму в уме и положил конец спору, дав правильный ответ. Математик Франсуа Араго (1786–1853) писал: «Эйлер вычислял без всякого видимого усилия, как человек дышит, как орел парит над землей»⁷. Эйлер скромно замечал, что его способность манипулировать символами – замена ума, а его карандаш превосходит его интеллектом.

Эйлер также был одарен необычайной памятью. Он помнил бесчисленные стихи; с детских лет и до самой старости он мог на память прочитать всю «Энеиду» Виргилия и назвать первое и последнее предложения на любой странице. А вот более близкий к математике пример его замечательной памяти: он мог назвать первые шесть степеней первых ста натуральных чисел. Просто чтобы вы понимали – 99 в шестой степени равно 941 480 149 401.

Во время пребывания в Санкт-Петербурге Эйлер уделял часть своего времени проектам в интересах государства. В 1735-м он был назначен директором географического отделения Академии и внес значительный вклад в создание остро необходимой карты России. Он также написал двухтомное сочинение по кораблестроению, настолько ценное, что Академия удвоила его жалованье за тот год.

Но хотя Эйлер мог похвастаться поразительной продуктивностью, счастливой семейной жизнью и немалым доходом, условия жизни в России ухудшались. Атмосфера в Академии становилась очень напряженной, даже враждебной. Большая часть старшего преподавательского состава была родом из Германии, русских по-прежнему было очень мало. За первые шестнадцать лет существования Академии ее членом стал только один русский, да и тот адъюнкт, который так и не получил профессорскую должность. Русские возмущались тем, сколько власти захватили немцы, и открыто выступали против них. По счастью, спокойный и сдержанный Эйлер сохранял нейтралитет во внутренней политике Академии, но эти склоки отражались на его работе.

Из-за присутствия Бирона и «немецкой партии» в правительстве Анны в русском народе зрел страх и ненависть к немцам. В конце 1740 года, незадолго до смерти, Анна назначила Бирона регентом при своем наследнике, двухмесячном Иване VI (1740–1764). После смерти Анны враждебность русских к немцам достигла апогея – не прошло и месяца, как Бирона свергли, а спустя год Ивана и всю «немецкую партию» отстранили от власти. На престол взошла дочь Петра Великого Елизавета I (1709–1762).

В этот период жизнь в России была опасной, особенно для иностранцев. На академиков-иностранцев поглядывали косо, как на возможных западных

шпионов. Эйлер реагировал на это спокойно, посвящая все время работе и семье. Но в 1741-м он понял, что больше не может выносить жизнь в России, и решил переехать из Санкт-Петербурга в Берлин.

Берлинская академия наук была основана в 1700 году и получила название *Societas Regia Scientiarum* (Королевское научное общество). Общий план Академии составлял Лейбниц. Берлинская академия так же, как Парижская и Лондонская, сосредоточилась на естественных науках и математике, но, в отличие от других, включила в сферу своих интересов еще историю, философию, языки и литературу.

Несмотря на большие ожидания Лейбница, Берлинская академия развивалась медленно. Трудности были отчасти связаны с постоянным недофинансированием и напряженными франко-германскими отношениями. Условия стали еще хуже после восхождения на престол Фридриха Вильгельма I (1688–1740) в 1713 году. При этом правителе, противнике всякого интеллектуального прогресса, Академия оказалась в полном небрежении. Берлинская академия не смогла продемонстрировать успехов, достигнутых академиями в Париже и Лондоне. Она не стала существенным фактором получения новых научных знаний, ее даже прозвали «анонимным обществом».

После смерти Фридриха Вильгельма I в 1740 году к власти пришел его сын Фридрих II (1712–1786), впоследствии известный как Фридрих Великий. И хотя Фридрих Вильгельм I сознательно готовил сына к царствованию, во многих отношениях Фридрих оказался противоположностью отцу. Между ними существовали глубокие противоречия. Когда Фридриху было восемнадцать, он пытался бежать из страны, правда, неудачно. Отец заставил Фридриха присутствовать на казни его друга и участника заговора (а ходили слухи, что и любовника).

Фридрих был решительно настроен расширить германские земли, но также питал склонность к искусству и философии. Он стремился создать образ просвещенного правителя-философа. Возрождение Академии играло важную роль в его плане вдохнуть новую жизнь в страну.

В отличие от отца, Фридрих презирал немецкую культуру и обожал все французское. Он изменил официальное название Берлинской академии на *Académie Royale des Sciences et Belles Lettres* (Королевская академия наук и изящной словесности). Он настаивал на том, чтобы официальным языком Академии был французский, и требовал, что все статьи в издававшемся Академией журнале были написаны на французском или переведены на него. Он предпочитал компанию остроумных французов, а не спокойных, бесстрастных немцев. Вольтер (1694–1778) относился к числу его любимых корреспондентов и был одним из ближайших советников по вопросам, связанным с Академией. Именно Вольтер первым предложил Фридриху соблазнить Эйлера уехать из России и присоединиться к Берлинской академии.



Рис. 1.3. Фридрих Великий, король Пруссии

Фридрих испытывал глубочайшее отвращение к математическим искусствам. В 1738-м он писал Вольтеру: «Что же до математики, сознаюсь, что не люблю ее: она сушит ум. У нас, немцев, он и так иссушен сверх меры; это бесплодное поле, которое нужно постоянно удобрять и поливать, чтобы оно приносило урожай»⁸. Он рассматривал математику – да и науку в целом – как прислужницу государства. Об успешности ученых он судил по их полезности в практических делах. Ученые из Академии были вольны заниматься собственными проектами, коль скоро исполняли повеления короля.

В то время Эйлер был самым знаменитым ученым в Санкт-Петербурге и хорошо известен во всей Европе. Фридрих вознамерился завоевать симпатии Эйлера. Хотя Эйлер и был обеспокоен опасными условиями, сложившимися в России, Фридриху потребовалось несколько попыток, чтобы склонить швейцарского математика оставить Санкт-Петербург. В 1741-м Эйлер согласился и, мотивируя свой отъезд ухудшившимся здоровьем и необходимостью сменить климат на более теплый, покинул Санкт-Петербург.

Сначала Эйлеру понравилось в Берлине, в 1746-м он писал своему другу: «Король называет меня профессором, мне кажется, что я счастливейший человек на свете»⁹. Но, увы, счастье было недолгим. Во многих отношениях жизнь в Берлине была лучше, чем в России, но существование Эйлера отравляло странное и неожиданное неуважение со стороны Фридриха. Он называл Эйлера своим «математическим циклопом», невежливо намекая на единственный здоровый глаз. Холодность Фридриха отчасти объяснялась его нелюбовью к математике, но не только. Сдержанные и неброские

манеры Эйлера не импонировали Фридриху, который считал Эйлера просителем. Фридрих предпочитал общество остроумного, изысканного, разбитного Вольтера. К тому же Эйлер был набожным кальвинистом. Каждый вечер он читал своей семье библейские тексты, а иногда сопровождал их проповедью. На публике Фридрих выказывал терпимость к религии, но в душе был деистом и не питал особого уважения к богобоязненному Эйлеру и его глубокой религиозности.

Эйлер также затаил обиду на Фридриха. Величайшим разочарованием стал отказ Фридриха назначить его президентом Академии. В течение нескольких лет, пока Фридрих был занят Семилетней войной, он так и не нашел подходящей кандидатуры на эту должность. Тем временем Эйлер неофициально исполнял функции «действующего президента», но раз за разом Фридрих отказывался узаконить это положение. Эйлер хорошо справлялся с ролью исполняющего обязанности президента, но, не будучи философом, способным на живой остроумный разговор, он не имел шансов добиться расположения Фридриха. Сильнейшее оскорбление было нанесено в 1763 году, когда Фридрих признал, что не может найти подходящей замены, и объявил президентом Академии самого себя.

Неприятные отношения между Эйлером и Фридрихом получили дальнейшее развитие, когда в 1763 году король не дал одной из дочерей Эйлера разрешения на брак с солдатом по причине его низкого звания. Быть может, последней соломинкой стала серия ожесточенных стычек между Фридрихом и Эйлером в период между 1763 и 1765 годом. Все случилось из-за торговли государственными календарями (альманахами). Они изготавливались за большие деньги членами Академии и продавались публике для финансирования ее деятельности. Выяснилось, что главный комиссионер прикарманивал деньги от продажи календарей. Фридрих и Эйлер разошлись во мнениях о том, как разобраться с коррупцией и недостатками администрирования, приведшими к этому случаю. Кончилось тем, что Фридрих в резких выражениях упрекнул Эйлера.

Находясь в Берлине, Эйлер сохранил добрые отношения со своими бывшими коллегами по Санкт-Петербургу. Он оставался главным редактором журнала и отправил общим счетом 109 статей для опубликования в нем. Он опекал русских студентов, которых посылали на учебу в Берлин. В награду за редактирование и наставничество российские власти регулярно выплачивали ему стипендию. Еще более примечательный пример уважения русских к Эйлеру дает одно происшествие во время Семилетней войны. В марше на Бранденбург в 1760 году русская армия вошла в Шарлоттенбург. При этом была разграблена ферма, принадлежавшая Эйлеру. Узнав об этом, русские – сначала генерал, а затем сама императрица Елизавета – выплатили Эйлеру репарации в размере, намного превышающем стоимость ущерба.

В течение всех 24 лет пребывания Эйлера в Берлине русские очень хотели снова залучить его в Санкт-Петербург. Щедрое предложение делались

в 1746, в 1750 и в 1763 годах. Всякий раз он отказывался, но никогда не захлопывал дверь окончательно. Наконец, в 1765 году, сытый по горло враждебностью Фридриха и видя улучшение политической обстановки в России, он решил вернуться.

Несмотря на личную неприязнь, Фридрих хорошо сознавал выдающееся место Эйлера в международном научном сообществе. За время работы в Берлине Эйлер опубликовал свыше двухсот работ. В 1749 году он был избран действительным членом Лондонского королевского общества. В 1755-м он стал девятым иностранным членом Французской академии наук, хотя по уставу число иностранных членов не должно было превышать восьми. Да и государству он хорошо послужил; помимо создания календарей, Эйлер работал над чеканкой национальной монеты, устройством каналов, проектированием акведуков, созданием пенсионной системы и совершенствованием артиллерии.

Фридрих пытался воспрепятствовать отъезду Эйлера. Эйлер был вынужден несколько раз подавать прошение о разрешении на выезд. В 1766 году Фридрих наконец смиловился и дал Эйлеру позволение уехать. В возрасте 59 лет Эйлер со своими 18 домочадцами возвратился в Санкт-Петербург.

В том же году, по рекомендации французского математика Жана Д'Аламбера (1717–1783), Фридрих назначил на должность Эйлера Жозефа-Луи Лагранжа (1736–1813), восходящую звезду, который впоследствии стал знаменитым математиком. В типичной для него язвительной манере король писал Д'Аламберу, благодаря его за «замену полуслеплого математика математиком с обоими глазами, что особенно порадует членов анатомического отделения академии»¹⁰. По иронии судьбы, вопреки неприязни Фридриха к математике и любви к философии, его Академия навсегда войдет в историю благодаря блистательной когорте математиков, а вовсе не философов.

В конце пребывания Эйлера в Берлине, когда он конфликтовал с Фридрихом, в России царствовал Петр III (1728–1762), жалкий, психологически неустойчивый прогермански настроенный правитель, который, как известно, испытывал «страх и презрение по отношению к России и русским»¹¹. В 1762-м его правление трагически оборвалось – он был свергнут своей женой, которая взшла на трон под именем Екатерины II. Вскоре после этого, возможно по приказу Екатерины, Петр был убит стражей, державшей его в заточении.

Екатерина, получившая впоследствии прозвание «Великая», правила Россией до 1796 года. XVIII век начался правлением могущественного и оказавшего огромное влияние на последующее развитие страны Петра Великого, а закончился во всех отношениях примечательным правлением Екатерины Великой. Она была умной, волевой, амбициозной и энергичной государыней. Французский философ Дени Дидро (1713–1783) говорил, бывав при дворе Екатерины, что в ней «душа Цезаря соединилась со всеми

соблазнами Клеопатры»¹². Под ее властью качество жизни в России заметно улучшилось. Образование, находившееся в загоне со времен Петра Великого, снова стало одним из приоритетов российского правительства.



Рис. 1.4. Екатерина Великая, императрица России

В самом начале Академия сверкала благодаря блестящему гению Эйлера. С его отъездом в Берлин туда же переместился центр развития математики. Из-за этой потери, усугубленной годами политической нестабильности, учреждению было трудно привлекать талантливых иностранных ученых. Почва под Академией была очень зыбкой. Одним из проектов Екатерины в области реформы образования стало оживление Санкт-Петербургской академии и выведение ее на прежний уровень. Как писал математик Андре Вейль (1906–1998), «это было почти равносильно возвращению Эйлера»¹³.

Екатерина позаботилась о том, чтобы удовлетворить, и даже с лихвой, немалые притязания Эйлера. Ему было назначено жалованье, вдвое превышавшее предложенное в 1763 году, его жена получила пособие, старший сын был принят на работу в Академию, а младшим сыновьям гарантировалось трудоустройство в будущем. Кроме того, Екатерина пожаловала Эйлеру полностью обставленный дом и одного из своих собственных поваров. По прибытии в Санкт-Петербург Эйлер был тепло встречен императрицей. С его возвращением внимание математического сообщества вновь переключилось на Санкт-Петербург, что способствовало процветанию Академии.

У Екатерины Великой и Фридриха Великого есть общие черты: оба были яркими примерами «просвещенных деспотов». Однако отношения Эйлера с двумя монархами были очень разными. Его жизнь в Санкт-Петербурге времен Екатерины была куда лучше, чем в Берлине Фридриха. Екатерина любила науку и приветствовала Эйлера как знаменитость. Он занял свое место в академической иерархии и обладал большими административными полномочиями, чем любой другой ученый.

За свою жизнь Эйлер был свидетелем многочисленных изменений в столичном Санкт-Петербурге. Когда он приехал туда впервые, городу было всего двадцать четыре года, когда вернулся – шестьдесят три года, а на момент смерти – восемьдесят лет. К концу XVIII века население города выросло до 166 000 человек. Санкт-Петербург стал домом как для богатейших дворян империи, так и для беднейших крестьян. Почти четверть населения составляли военные¹⁴. Одни русские по-прежнему любили Санкт-Петербург, другие его ненавидели (это верно и в наши дни¹). В полном соответствии с планом Петра Великого город стал средоточием красивейшей архитектуры в европейском стиле. Это был самый европейский из всех русских городов. Из-за множества островов и водных путей он получил название «Северная Венеция».

Второй Санкт-Петербургский период Эйлера стал временем профессионального успеха, но также был отмечен рядом личных утрат. В 1771 г. дотла сгорел его дом. Благодаря быстрым действиям самоотверженных слуг, которые вынесли его из горящего здания, жизнь Эйлера была спасена. Вся его библиотека была уничтожена огнем, но, к счастью для науки, рукописи удалось сберечь. После трагедии Екатерина предоставила ему новый дом и возместила все убытки. В 1776 г. умерла любимая жена Эйлера Катарина. Спустя год он женился на ее сводной сестре Саломее-Абигайль Гзелль.

Почти сразу после отъезда из Берлина он перестал видеть левым глазом из-за катаракты. Проведенная в 1771 г. операция ненадолго вернула зрение, но возникшая инфекция привела к рецидиву, и он снова ослеп. В течение этого времени Эйлер продолжал публиковать работы по математике, в основном диктуя своему сыну. Поразительно, но поток работ, выходявших из-под пера Эйлера, не оскудевал. Будучи полностью слеп, он доказал некоторые из самых важных своих теорем и написал ряд оказавших огромное влияние книг.

Бытует широко распространенное мнение, что самые плодотворные годы математика приходятся на его юность, а когда он достигает срока – или даже тридцати – лет, творческие способности и гениальность угасают. В известном сочинении «Апология математика» британский математик Г. Х. Харди (1877–1947) писал: «Ни один математик не должен позволять себе забывать о том, что математика в большей степени, чем

¹ Оставим это утверждение на совести автора. – Прим. перев.

любой другой вид искусства или любая другая наука, – занятие для молодых»¹⁵. И хотя это замечание верно описывает снижающееся качество профессиональных достижений многих математиков (да и людей других творческих профессий), к траектории карьеры Эйлера оно не имеет ни малейшего отношения. Его возвращение в Санкт-Петербург было отмечено фанфарами, и он не разочаровал аудиторию. Как писал один историк, Эйлер «сразу продемонстрировал, что вернулся в Россию не почивать на лаврах, а, напротив, был на пике творческих сил»¹⁶.

Как Бетховен преодолел, казалось бы, непреодолимое для сочинителя симфоний препятствие – глухоту, так и Эйлер сумел создать глубокую, красивую и зачастую «наглядную» математику, пребывая в своем погруженном в темноту мире. Это один из величайших триумфов человеческого духа.

Помимо чисто математических исследований, Эйлер продолжал вносить один вклад за другим в прикладную математику. Одной из самых важных проблем в то время было нахождение точного и надежного метода морской навигации. Навигация по звездам полностью зависела от точности мореходных таблиц, дававших местоположения небесных тел в заданный момент времени. Луна – самый заметный объект в ночном небе, но, поскольку движение Луны определяется гравитационным взаимодействием трех тел – ее самой, Земли и Солнца, – заранее вычислить ее положение в каждый конкретный момент времени математически очень трудно. Даже в наши дни для знаменитой задачи трех тел не найдено аналитического решения. Ньютоновская теория гравитации описывала движение планет, но не предлагала вычислительного алгоритма для нахождения этого движения. В 1772 году Эйлер разработал математическую модель движения Луны, которая поддавалась расчетам и позволяла производить приближенные вычисления с очень хорошей точностью. На основе модели Эйлера были составлены весьма надежные таблицы движения Луны. В знак благодарности за эту работу французское Бюро долгот и Британский парламент щедро вознаградили Эйлера.

Поток работ Эйлера не иссякал до самой его смерти в возрасте 76 лет. Его последний день описан маркизом де Кондорсе (1743–1794) в надгробном слове:

Он сохранил все свои мыслительные способности и, по всей видимости, остроту ума: никакой упадок, казалось, не угрожал наукам с внезапной потерей их величайшего украшения. 7 сентября 1783 года, позабавившись на доске вычислениями законов восходящего движения воздушных шаров, открытие которых недавно наделало шуму в Европе, он пообедал с г-ном Лекселлом и его семьей, беседовал о планете Гершеля [недавно открытой планете Уран] и о расчете ее орбиты. Потом он позвал своего внука и играл с ним во время чаепития, когда внезапно трубка выпала из его руки, он перестал вычислять и жить¹⁷.

Леонард Эйлер похоронен в Санкт-Петербурге, в России.

Трудно перечислить все величайшие достижения Эйлера на поприще математики. Мы могли бы процитировать одну из его многочисленных теорем. Или упомянуть написанные им учебники, снискавшие большой успех, например «Введение в анализ бесконечно малых», который историк науки Карл Бойер назвал самым влиятельным учебником в истории современной математики. Можно было бы назвать его работы по прикладной математике, например книгу «Механика», в которой впервые методы математического анализа систематически применяются к физике. Или вспомнить о сочинениях для неспециалистов, таких как чрезвычайно популярные в свое время «Письма немецкой принцессе» – собрание уроков, написанное для племянницы Фридриха Великого принцессы Ангальт-Дессауской. Быть может, стоило бы обратить внимание на его умение организовать и оформить изолированные результаты и, казалось бы, далекие друг от друга идеи в связное и упорядоченное тело математики. Или на элегантную и полезную нотацию, введенную им: Эйлер первым стал использовать букву e для обозначения основания натуральных логарифмов; он ввел в обиход символ π ; в конце жизни он стал использовать букву i для обозначения $\sqrt{-1}$ (популяризировал эту нотацию Гаусс); он обозначал буквами a, b, c стороны треугольника, противоположные вершинам A, B, C ; он использовал символ \sum для обозначения суммы; он стал обозначать конечные разности Δx , и он же начал использовать нотацию $f(x)$ для функции.

Трудно выделить какую-то одну из многих и многих теорем Эйлера как самую важную. Некоторые считают, что это соотношение, связывающее числа $0, 1, \pi, e$ и i :

$$e^{\pi i} + 1 = 0.$$

А быть может, это один из его удивительных бесконечных рядов, демонстрирующих мощь математического анализа. Или одна из его теорем в теории чисел, например та, что подвела черту под знаменитыми гипотезами Пьера Ферма (1601–1665).

Но мы, конечно, сосредоточимся на простой формуле, связывающей количество вершин, ребер и граней многогранника:

$$V - E + F = 2.$$

Недавний опрос математиков показал, что, по их мнению, формула Эйлера для многогранников – вторая по красоте теорема во всей математике. А самой красивой, по мнению большинства, является формула Эйлера $e^{\pi i} + 1 = 0$ ¹⁸.

Чтобы понять формулу Эйлера для многогранников, мы должны будем поближе познакомиться с многогранниками. Итак, что же такое многогранник?

Глава 2

Что такое многогранник?

Сударыня, хотя слово древнее, каждый берет его в собственное пользование новехоньким и изнашивает самостоятельно. Это слово заполнено смыслом, как надутый бычий пузырь, и теряет его столь же быстро. Его можно проткнуть, как пузырь, затем заклеить и вновь надуть.

– Эрнест Хемингуэй, *«Смерть после полудня»*¹

Согласно Оксфордскому словарю английского языка, впервые термин «polyhedron» (полиэдр, многогранник) в английском тексте встретился в переводе «Начал» Евклида (ок. 300 года до н. э.), выполненном сэром Генри Биллингсли в 1570 году. Слово «полиэдр» происходит от греческих корней «поли», что значит «много», и «hedra» – «основание». Полиэдр можно поставить на одно из многих его оснований. Хотя слово «hedra» первоначально означало «сиденье», оно используется для обозначения грани полиэдра по крайней мере со времен Архимеда². Поэтому правильный перевод слова «полиэдр» – «многогранник». Во времена Эйлера транслитерация «hedra» на латиницу уже была общепринятой.

Многогранники – это хорошо знакомые геометрические объекты, состоящие из многоугольных граней. Примеры многогранников, показанные на рис. 2.1, включают обычный куб, невзрачную треугольную пирамиду (формально тетраэдр), элегантный икосаэдр и похожий на футбольный мяч усеченный икосаэдр.

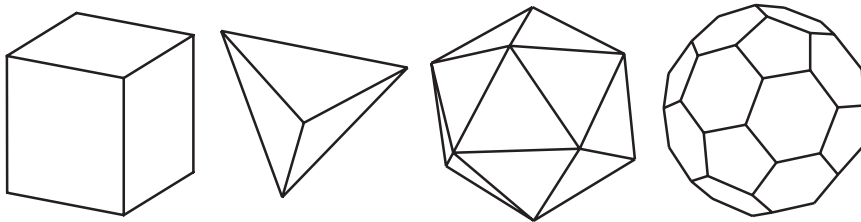


Рис. 2.1. Примеры многогранников

Из-за своей красоты и симметрии многогранники занимают заметное место в искусстве, архитектуре, ювелирном деле и играх. Всякий, кто заходил в магазин оккультных предметов, знает, что некоторые люди верят, будто многогранники (а особенно кристаллы) обладают магическими свойствами. Многогранники встречаются и в природе, такую форму имеют драгоценные камни и некоторые одноклеточные организмы.

Свойства многогранников уже тысячи лет очаровывают математиков. Для доказательства теорем о многогранниках нужно иметь строгое определение этого термина. Но лишь сравнительно недавно была предпринята попытка дать такое определение. А в течение многих лет до того математики довольствовались определением типа «узнаешь его, когда увидишь». Они соглашались с философией Шалтая-Болтая, который говорил Алисе: «Когда я беру слово, оно означает то, что я хочу, не больше и не меньше». Но такой путь ни к чему хорошему не приведет. Как писал Анри Пуанкаре (1854–1912):

Объекты, которыми занимаются математики, долгое время не имели хороших определений; эти предметы казались известными, потому что их себе представляли при помощи чувств или воображения. Но в действительности их образ отличался грубостью; не было точных идей, на которые могли бы опереться доказательства⁵.

В отсутствие надлежащего определения, как в данном случае, возникают теоретические неточности и рассогласования. Ниже мы увидим, что данное Эйлером доказательство формулы для многогранников не вполне строгое, потому что он не определил явно, что такое многогранник.

Придумать хорошее определение на удивление трудно. На протяжении столетий было много предложений, не все из которых эквивалентны. Из-за этой неразберихи не существует единого определения многогранника, применимого ко всей обширной литературе по этим математическим объектам.

Наивное определение могло бы звучать так: многогранник – это тело, состоящее из многоугольных граней, такое, что каждое ребро является общим ровно для двух граней, а в каждой вершине сходится по меньшей мере три ребра. На первый взгляд это определение разумно, но при ближайшем рассмотрении оказывается, что существуют удовлетворяющие ему тела, которые не согласуются с нашим интуитивным представлением о многограннике. Никто не станет спорить с тем, что объекты на рис. 2.1 – многогранники, но вот следует ли отнести к ним тела на рис. 2.2 (все они удовлетворяют приведенному выше определению)?

Это не праздный вопрос. Исторически нет единого мнения о том, считать ли объекты на рис. 2.2 многогранниками. Крайний левый объект, куб с вырезанным уголком, является многогранником согласно большинству современных определений, однако самые старые определения – в частности, неявно подразумеваемые греками и Эйлером – не допускают вы-

резов в многограннике. Аналогично второе тело удовлетворяет критериям многогранника, принимаемым многими математиками. Но в нем есть сквозной туннель, т. е. оно имеет форму бублика, образованного плоскими гранями. Считать ли его многогранником? Третий объект состоит из двух многогранников, соединяющихся в вершине, а четвертый – из двух многогранников с общим ребром. Они удовлетворяют нашему критерию, но, согласно большинству определений, многогранниками не являются. У обоих тел есть две внутренние области – если заполнить их водой, то будет два несообщающихся сосуда. А можно привести еще более патологические примеры, идущие вразрез с интуитивным понятием многогранника.

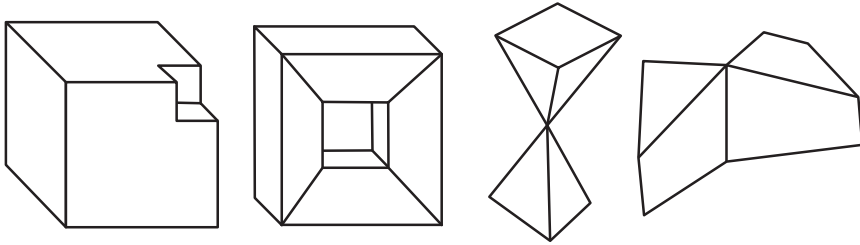


Рис. 2.2. Тела, не являющиеся выпуклыми многогранниками

Пока что расслабимся и отложим хитроумную задачу строгого определения многогранника. Поскольку мы хотим описать историю формулы Эйлера, то можем ограничиться более узким классом многогранников, которые определить проще. Примем очень старомодный взгляд на многогранники, с которым согласились бы и греки, и Эйлер. Хотя явно это никогда не высказывалось, исторически считалось, что многогранник должен быть выпуклым. *Выпуклым многогранником* называется тело, удовлетворяющее нашему наивному определению (приведенному выше) и дополнительно обладающее тем свойством, что отрезок, соединяющий любые две его точки, целиком расположен внутри него. Таким образом, у выпуклого многогранника не может быть вырезов. С первого взгляда видно, что все тела на рис. 2.1 выпуклые, а тела на рис. 2.2 не выпуклые.

Легко видеть, что это именно то, что подразумевали греки. Они считали грани многогранника основаниями, на которые можно его поставить. Каждый многогранник на рис. 2.1 может стоять на любой из своих граней, тогда как у любого многогранника на рис. 2.2 есть хотя бы одна грань, на которую его поставить нельзя. Позже, когда в нашем распоряжении будет больше инструментов, мы сможем применить формулу Эйлера к более широкому классу многогранников, а пока для простоты и по историческим причинам будем рассматривать только выпуклые многогранники.

Прежде чем двигаться дальше, остановимся еще на одном историческом споре: является многогранник сплошным или полым? Некоторые опреде-

ления настаивают на том, что многогранник – это сплошной трехмерный объект, тогда как, согласно другим, это полое тело, состоящее из двумерной оболочки. Сторонники первого определения стали бы изготавливать многогранник из глины, а сторонники второго – из бумаги. На заре истории многогранников предполагалось, что они сплошные. На протяжении многих веков их так и называли – «сплошными телами». Позже, когда теория многогранников перешла в ведение топологии, их стали считать полыми. Нас, как правило, будет устраивать та и другая модель. Мы не станем делать на этот счет предположений, если не возникнет острой необходимости.

Глава 3

Пять идеальных тел

Всегда есть какое-то «до». Исходная точка – лишь уловка, и какую точку считать исходной, зависит от того, насколько она определяет последствия.

– *Иэн Макьюзен, «Невыносимая любовь»*¹

Современная геометрия, как, впрочем, и значительная часть всей современной математики, корнями уходит в работы древних греков. В период от Фалеса (ок. 624–547 до н. э.) до смерти Аполлония (ок. 262–190 до н. э.) греки создали поразительный корпус математических работ, а имена многих ученых той поры знакомы любому школьнику: Пифагор, Платон, Евклид, Архимед, Зенон и т. д.

Хотя греки, возможно, испытывали влияние математиков из Египта, Месопотамии, Китая и Индии, скоро они освоили эту дисциплину, сделав ее своей. Как писал Платон в «Послезаконии»: «Когда греки что-то заимствуют у негреков, они доводят это до высшего совершенства»². В отличие от более ранних цивилизаций, для которых главной целью была полезность, греки стремились понять суть математики и дать строгие доказательства утверждений. Ушли в прошлое формулы, применяемые для приближенных вычислений. Точность, логика и истина – вот в чем состояли цели их исследований.

Греки были в восторге от геометрии, и их достижения в этой области слишком многочисленны, чтобы их здесь перечислять. Не будет преувеличением сказать, что большая часть геометрии, изучаемой в школе, открыта греками. Но нас будет интересовать только греческая теорема о правильных многогранниках. Это одна из самых знаменитых и красивых теорем во всей математике (заняла четвертое место в опросе, упомянутом в главе 1).

Существует ровно пять правильных многогранников.

Эти пять многогранников показаны на рис. 3.1. В трех из них грани являются равносторонними треугольниками: тетраэдр (4-гранная пирамида),

октаэдр (двойная пирамида с 8 гранями) и 20-гранный икосаэдр. Куб составлен из 6 квадратов, а додекаэдр – 12-гранник, состоящий из правильных шестиугольников. (В приложении А описано, как склеить правильные многогранники из бумаги.)

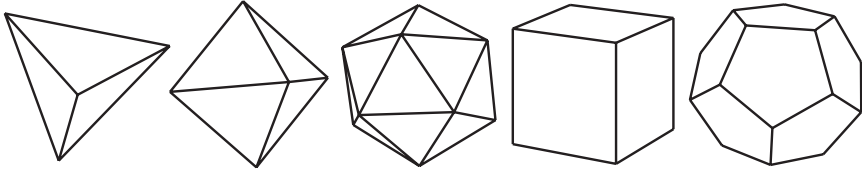


Рис. 3.1. Пять правильных многогранников: тетраэдр, октаэдр, икосаэдр, куб и додекаэдр

Красочная история этих интригующих многогранников начинается с греков, тянется через Возрождение и доходит до наших дней. Доказательство того, что существует всего пять правильных многогранников, приведено в последней книге «Начал» Евклида (в главе 8 мы представим еще одно доказательство с использованием формулы Эйлера для многогранников). Платон полагал, что правильные многогранники – составные части материи вообще. Поскольку он включил их в свою атомистическую теорию, они называются платоновыми телами. Астроном Иоганн Кеплер (1571–1630) использовал правильные тела в ранней модели Солнечной системы.

Красоту часто видят в регулярности, симметрии и совершенстве. Все мы знакомы с двумерными *правильными многоугольниками*. Многоугольник называется правильным, если все его стороны и все его углы равны. Равносторонний треугольник – единственный правильный многоугольник с тремя сторонами, квадрат – единственный правильный многоугольник с четырьмя сторонами и т. д. (см. рис. 3.2). Существует бесконечно много правильных n -угольников, по одному для каждого $n > 2$.



Рис. 3.2. Правильные многоугольники с 3, 4, 5, 6, 7 и 8 сторонами

Трехмерным аналогом многоугольника является многогранник. Изучение правильных многогранников дает гораздо более интересные результаты, чем изучение многоугольников. Если правильных многоугольников бесконечно много, то единственными правильными многогранниками являются тела, изображенные на рис. 3.1.

А каковы точные критерии правильности многогранника? Как и в случае определения многогранника, нужно внимательно следить за тем, чтобы не включить лишнего и не опустить необходимое. *Правильным многогранником*, или *правильным телом*, называется многогранник, удовлетворяющий следующим условиям:

- 1) многогранник выпуклый;
- 2) каждая грань является правильным многоугольником;
- 3) все грани конгруэнтны (одинаковы);
- 4) в каждой вершине сходится одно и то же число граней.

Каждый из этих критериев необходим. На рис. 3.3 приведены примеры многогранников, не удовлетворяющих ровно одному критерию. Первый удовлетворяет всем условиям, кроме выпуклости. Второй, вытянутый октаэдр, был бы правильным, если бы все грани были равносторонними треугольниками. Футбольный мяч неправильный, потому что его гранями являются правильные пятиугольники и правильные шестиугольники. И последний многогранник состоит из правильных треугольников, но в каждой экваториальной вершине сходятся четыре грани, а в северном и южном полюсах – пять.

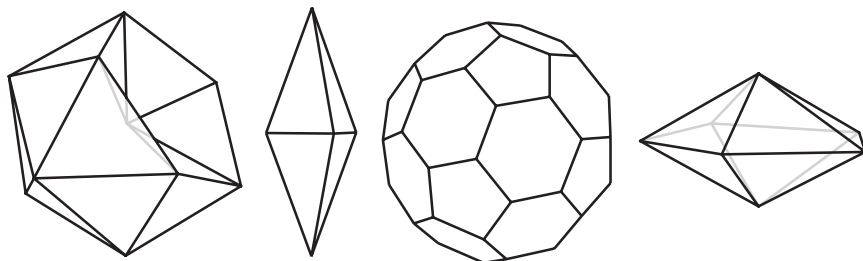


Рис. 3.3. Неправильные многогранники.
Каждый из них не удовлетворяет какому-то одному из четырех условий правильности

Правильные многогранники встречаются в природе. Самый очевидный пример природных многогранников – кристаллы, и некоторые из них правильны. Например, кристалл хлористого натрия может принимать форму куба, тиасурьмянокислого натрия – форму тетраэдра, а хромокалиевых квасцов – форму октаэдра. Кристалл пирита, который часто называют ложным золотом, может иметь двенадцать пятиугольных граней; однако это не додекаэдр, потому что грани не являются правильными пятиугольниками.

В 1880-х годах Эрнст Геккель, участвовавший в экспедиции на корвете «Челленджер», открыл и зарисовал одноклеточные организмы, названные радиоляриями. Скелеты этих организмов поразительно напоминают правильные многогранники (рис. 3.4).

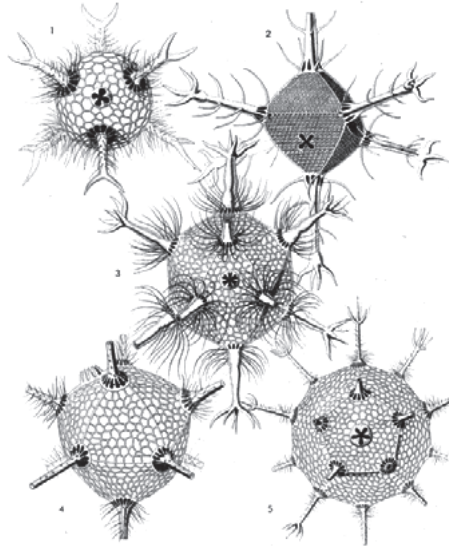


Рис. 3.4. Радиоларии напоминают правильные тела

Существуют также примеры правильных тел, изготовленных древними людьми. Куб и тетраэдр, относительно простые и распространенные, встречаются во многих рукотворных изделиях на протяжении всей истории человечества. Додекаэдр, датируемый не позднее 500 года до н. э., был обнаружен на раскопках на горе Лоффа близ Падуи в Италии. Древняя игральная кость в форме икосаэдра была найдена в Египте, но ее происхождение неизвестно.

А как насчет октаэдра? Это, пожалуй, последнее из пяти тел, которое стал бы создавать человек. Он не такой простой, как куб или тетраэдр, поэтому никакой встречающийся в быту предмет не имел бы такой формы. Он не такой экзотический, как икосаэдр или додекаэдр, – всего-то две соединенные основаниями пирамиды, поэтому, повстречав его, человек не обратил бы на него внимания. Историк математики Уильям Уотерхаус утверждал, что пока кто-то не обратил внимания на правильность октаэдра, он не представлял собой ничего интересного. Он писал: «Октаэдр стал предметом математического изучения, только когда кто-то придумал ему применение»³.

Обсуждение октаэдра открывает нам глаза. Мы видим, что в развитии теории правильных многогранников есть три важных этапа. Первый – построение самих объектов. Первоначально построение сводилось просто к вылепливанию из глины, но в конечном итоге под процесс должны быть подведены математические основания – построение должно стать геометрическим. Второй этап – абстрактное понятие правильности. Эта

идея очевидна только в ретроспективе. Представьте себе, что вы показываете вся пять правильных тел случайному прохожему и спрашиваете, что между ними общего. Как говорил Уотерхаус, «открытие того или иного тела было вторичным, *важнейшее же открытие – сама идея правильного тела*»⁴. Наконец, третий этап – доказательство того, что существует только пять правильных тел. Должно быть строго математически доказано, что этих красивых объектов пять и только пять. Развитием этой теории – открытием, абстрактной постановкой и доказательством – мы обязаны грекам.

Глава 4

Пифагорейское братство и атомистическая теория Платона

[Пифагор] также первым разверз глубокую пропасть противоречия между научным духом, который надеется, что вселенная в конечном итоге постижима, и мистическим, который надеется – быть может, неосознанно, – что это не так.

– Джордж Симмонс¹

Ранняя история греческой математики настолько изобилует апокрифами, спекуляциями, противоречивыми свидетельствами, рассказами из вторых рук и в достаточной мере поддающимися проверке фактами, что сама по себе является удивительной загадкой. Существует очень мало дошедших до нас трудов греческих математиков, и скудость информации сильно затрудняет реконструкцию исторической истины. Оригинальные источники были доступны в течение нескольких веков после их создания, но почти все оказались уничтожены или утрачены в Средние века. Многие из того, что мы знаем, взято не из первичных, а из вторичных источников, написанных сотни лет спустя.

Мало что можно уверенно сказать о Пифагоре (ок. 560–480 до н. э.) и группе его последователей, пифагорейцев. Как писал философ У. Бэркерт, «так и хочется сказать, что нет ни одной непротиворечивой детали, касающейся жизни Пифагора»². Мы полагаем, что пифагорейцы первыми стали изучать правильные тела. Считается, что Пифагор знал о кубе и тетраэдре, но ученые уже давно спорят о том, были ли ему также известны икосаэдр и октаэдр. Одному из его последователей приписывают честь открытия додекаэдра, и, как мы увидим, это открытие, возможно, стало причиной его смерти.

Пифагор родился на греческом острове Самос, расположенном в Эгейском море. Согласно некоторым сведениям, в молодости он совершил путешествие в Египет и Вавилон, где изучал математику и религию. Впоследствии он поселился в греческом городе Кротон, ныне это юг Италии.

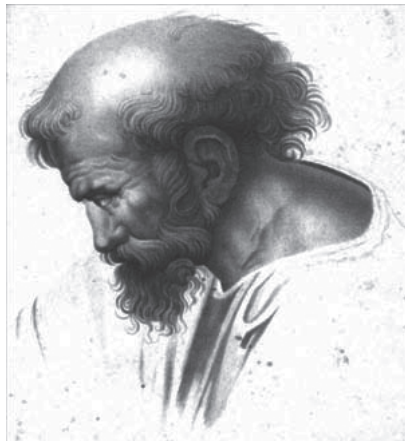


Рис. 4.1. Пифагор глазами художника

Сейчас Пифагор ассоциируется со знаменитой геометрической теоремой, носящей его имя¹, но в свое время он был известен как мистик и пророк. В Кротоне он стал духовным лидером тайного общества, основанного на философской религии. То было время, когда религия играла важную роль во многих культурах (Пифагор был современником Конфуция, Будды и Лао-Цзы). Пифагорейское братство успешно просуществовало в Италии почти двести лет после смерти основателя, а его доктрины продолжали изучать вплоть до VI века н. э. Со временем легенда о божественной сущности Пифагора была подкреплена рассказами о совершенных им чудесах.

Пифагорейское братство во многих отношениях отличалось от других культов того времени. Членов отбирали очень тщательно – они проходили обряды инициации и ритуального очищения и давали клятву хранить тайну. Их жизнь подчинялась строгим, иногда странным правилам. По преданию, они были вегетарианцами, но не могли есть бобы, запрещено было помешивать огонь ножом, нельзя было носить кольца, требовалось касаться земли во время грозы.

Пифагорейцы верили в переселение душ – что души умерших вселяются в животных и проходят бесконечный цикл реинкарнации, то повышаясь в ранге до человека, то опускаясь до животного. Единственный способ вырваться из этого цикла – очищение тела и разума. Как и во многих культах, очищение тела достигалось скромной жизнью, трезвостью и самоограничением.

Отличительной особенностью пифагорейцев были средства очищения разума. Чистота достигалась не медитацией, а изучением математики

¹ Теорема Пифагора утверждает, что если длины катетов и гипотенузы прямоугольного треугольника равны соответственно a , b и c , то $a^2 + b^2 = c^2$. На самом деле этот факт был известен вавилонянам на тысячу лет раньше.

и наук. Провозглашалось, что окончательное воссоединение с божеством воспоследует из постижения порядка Вселенной, а ключом к постижению Вселенной является постижение математики. Пифагор говорил: «Красота – в познании совершенства чисел души»³. Эта вера очень лаконично выражена в девизе Пифагора «всё есть число».

Пифагорейцы верили, что Бог упорядочил Вселенную с помощью чисел и что любое число можно выразить в виде отношения двух целых чисел (любое число можно записать в виде дроби). Если использовать современную терминологию, то пифагорейцы верили, что все числа *рациональные*.

Музыка и астрономия тоже играли важную роль у пифагорейцев. Они открыли, что музыкальные интервалы можно выразить в виде отношений, и сделали вывод, что самые гармоничные звуки получаются из самых красивых комбинаций чисел. Они полагали, что музыкальными отношениями можно объяснить астрономические явления, например расстояния между планетами, порядок планет и периоды их обращения. А также что движение семи известных планет (в число которых включали Землю, Луну и Солнце), подобно колебаниям семи струн, создает гармонию. Некоторые говорили, что Пифагор слышал эту «музыку сфер».

Пифагорейцы вели общинный образ жизни: они вместе ели, выполняли физические упражнения и занимались науками. Такой образ жизни в сочетании с традицией устной передачи знаний, окружавшей их тайной и обожанием Пифагора не позволяет сказать, какой вклад в математику внесли конкретные пифагорейцы. Поскольку математика считалась частью их религии, а Пифагор был духовным лидером, все математические результаты, полученные его последователями, были «словом мастера» и приписывались ему.

По преданию, один из пифагорейцев, Гиппас из Метапонта (ок. 500 до н. э.), нарушил традицию анонимности, за что был сурово наказан. По одной легенде, его утопили в море, а по другой он был изгнан из братства пифагорейцев и ему был воздвигнут надгробный камень как символ отвержения. По поводу того, чем именно Гиппас заслужил столь суровую кару, тоже есть две легенды (возможно, обе истинны).

По одной легенде, Гиппас открыл додекаэдр и показал, как вписать его в сферу, но не упомянул при этом Пифагора. Это открытие, вероятно, имело особое значение для пифагорейцев, потому что гранями додекаэдра являются пятиугольники. Они выбрали пентаграмму, или пятиугольную звезду (рис. 4.2), которая у греков символизировала здоровье, в качестве особого символа, отличавшего членов братства. Пентаграмма строится путем соединения вершин правильного пятиугольника, при этом внутри него образуется меньший правильный пятиугольник.

По второй легенде, Гиппас доказал, что не всякое число рационально, но не сохранил это открытие в тайне. Историки расходятся в вопросе о том, какое именно иррациональное число открыл Гиппас. Это могло быть $\sqrt{2}$, т. е.

длина диагонали квадрата со стороной единичной длины, или $(\sqrt{5} + 1)/2$, которое часто называют *золотым сечением*, или просто обозначают буквой ϕ . Открытие Гиппасом иррациональности золотого сечения – заманчивая теория, потому что ϕ равно длине стороны пентаграммы, вписанной в пятиугольник со стороной единичной длины (рис. 4.3). Тот факт, что все числа рациональны, – один из столпов пифагорейской системы верований. Существование иррационального числа подрывало основы. Легко представить себе, сколь силен был гнев, обращенный против Гиппаса. По иронии судьбы, именно доказательство существования иррациональных чисел стало одним из самых значительных и долговечных вкладов пифагорейцев в математику.

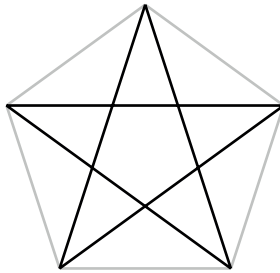


Рис. 4.2. Пентаграмма, символ пифагорейской школы, вписанная в правильный пятиугольник

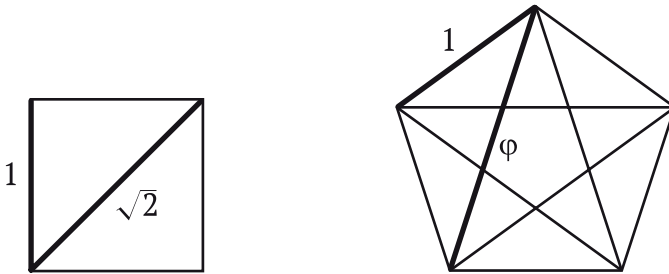


Рис. 4.3. Диагонали иррациональной длины, $\sqrt{2}$ и $\phi = (\sqrt{5} + 1)/2$

Вне зависимости от того, Гиппас ли открыл додекаэдр или кто-то из его собратьев, пифагорейцы, похоже, знали по меньшей мере о трех правильных телах: тетраэдре, кубе и додекаэдре. Не ясно, было ли им известно об октаэдре и икосаэдре, или шесть открытий этих многогранников принадлежит Теэтету Афинскому (ок. 417–369 до н. э.). Даже ранние свидетельства противоречивы. Прокл (410–485), ученый, живший в V веке, утверждает, что пифагорейцы знали об октаэдре и икосаэдре, тогда как в недатированной схолии «Начал» Евклида мы читаем, что «три из упомянутых выше

пяти тел, а именно куб, пирамида и додекаэдр, открыты пифагорейцами, а октаэдр и икосаэдр – Теэтетом»⁴. В наши дни многие ученые поддерживают теорию Уильяма Уотерхауса о более позднем открытии октаэдра, что, по всей видимости, исключает пифагорейцев из числа потенциальных авторов.

Теэтет не так широко известен, как другие греческие математики, но он, безусловно, является героем нашей истории. Почти наверняка он доказал, что существует пять и только пять правильных многогранников. Большая часть сведений о Теэтете известна нам из сочинений его друга, влиятельного философа и учителя, Платона (427–347 до н. э.). Платон написал два диалога с участием Теэтета: «Софист» и «Теэтет».



Рис. 4.4. Платон глазами художника

Теэтет родился во время Пелопоннесских войн. Он геройски погиб в битве 369 года до н. э. между Афинами и Коринфом. Математику он изучал под руководством Феодора (465–398 до н. э.) и по любым меркам был весьма одаренным математиком. Платон ставит Теэтета на одну из высших ступеней, отдавая первенство лишь своему учителю Сократу (470–399 до н. э.). В диалоге «Теэтет» Феодор говорит о юном Теэтете: «Этот же подходит к учению и любому исследованию легко, плавно и верно, так спокойно, словно бесшумно вытекающее масло, – и я удивляюсь, как в таком возрасте можно этого достичь»⁵.

В то время открытие иррациональных чисел было еще довольно свежим событием, а об их свойствах было известно немного. Теэтет внес важный вклад в классификацию и организацию иррациональных чисел. Позже эта классификация составит большую часть десятой книги «Начал» Евклида.

Несмотря на споры о том, кто был первооткрывателем пяти правильных тел, нет почти никаких сомнений в том, что именно Теэтет первым подверг их всестороннему и строгому изучению. Благодаря Теэтету были выполнены все три этапа разработки теории, которые мы обсуждали в главе 3. Во-первых, все пять тел были известны, и Теэтет смог построить их геометрически. Во-вторых, он осознал общую черту всех пяти тел – их правильность. И наконец, он доказал, что эти тела – единственные правильные многогранники. Доказательства и построения Теэтета приведены в XIII книге евклидовых «Начал». Вообще, многие историки полагают, что вся математика в книгах X и XIII «Начал» – результат работ Теэтета.

В наши дни Платон больше известен как философ и писатель, но одним из его важнейших вкладов в науку стало создание школы, Академии. Академия открылась в пригороде Афин приблизительно в 288 году до н. э. через десять лет после казни Сократа. Ее целью стала подготовка молодых людей к общественной жизни путем изучения наук и в особенности математики. Платон верил, что, изучая математику, мы учимся отделять свой разум от чувств и пристрастий. Академия существовала свыше 900 лет. Ее основание было названо «в некоторых отношениях самым памятным событием в истории западноевропейской науки»⁶.

О математических достижениях Платона ничего неизвестно, но он сыграл важную роль в популяризации этого предмета. Он был влюблен в математику и ставил математиков очень высоко. Математика была основой учебного курса в Академии. Это с очевидностью следует из надписи над входом в нее: «Негеометр да не войдет». Поскольку многие математики обучались и воспитывались в Академии, Платона называют не делателем математики, а «делателем математиков»⁷.

Будучи главой Академии, Платон поручал конкретное преподавание другим людям. Одним из них был Теэтет, и есть предположение, что он преподавал в Академии на протяжении пятнадцати лет⁸.

Именно от Теэтета Платон узнал о пяти правильных телах. Платон оценил их важность для математики и красоту. Как и многие более поздние мыслители, он полагал, что у такой великолепной совокупности пяти объектов должно быть некое космическое значение. Платон был знаком с представлением о Вселенной, выдвинутом Эмпедоклом (ок. 492–432 до н. э.), который утверждал, что вся материя создана из четырех первичных элементов: земли, воздуха, огня и воды. Эти четыре элемента играют важную роль в диалоге Платона «Тимей» – рассказе о вымышленном споре между Сократом, Гермократом, Критием и Тимеем. В длинном монологе пифагорейца Тимея Локрийского Платон изложил хорошо проработанную атомистическую модель, в которой каждый из четырех элементов, которые Платон называл телами, или корпускулами, ассоциируется с одним из правильных многогранников:

Земле мы, конечно, припишем вид куба, ведь из всех четырех родов наиболее неподвижна и пригодна к образованию тел именно земля, а потому ей необходимо иметь самые устойчивые основания. ... Значит, мы не нарушим правдоподобия, если назначим этот удел земле, а равно и в том случае, если наименее подвижный из остальных видов отведем воде, наиболее подвижный – огню, а средний – воздуху; далее, наименьшее тело огню, наибольшее – воде, а среднее – воздуху, и, наконец, самое остроугольное тело – огню, следующее за ним – воздуху, а третье – воде.

Из этих положений Тимей делает вывод, что огню соответствует тетраэдр, воздуху – октаэдр, а воде – икосаэдр. Пятому правильному телу, додекаэдру, не может соответствовать ни один элемент. Тимей заключает, что «его бог определил для Вселенной и прибегнул к нему в качестве образца»⁹.

Далее Тимей описывает взаимодействия элементов. Взаимодействия основаны на разрезании и раздроблении: более острые элементы склонны к разрезанию, а менее острые – к раздроблению. Мы описали бы это как химические реакции между огнем, воздухом и водой (но не землей, потому что у нее квадратные грани). Элементы разрушаются, и треугольные грани изменяют форму, создавая другие элементы. Например, один элемент воды (состоящий из 20 равносторонних треугольников) можно разложить на части и образовать из них три элемента огня ($3 \cdot 4 = 12$ треугольников) и один элемент воздуха (8 треугольников). Тимей замечает, что наличие разных видов материи можно объяснить неодинаковостью размеров элементов. Он также не оставляет без внимания явление фазового перехода: плавление и отвердевание. Например, он говорит, что металл – это плавкая вода (в отличие от жидкой воды), составленная из крупных и однородных икосаэдров, благодаря которым она кажется твердой. В результате вторжения острых тетраэдров икосаэдры разделяются, металл расплавляется и приобретает способность течь, как жидкость.

Веру в то, что земля, воздух, огонь и вода – четыре первичных элемента, принял и развил Аристотель (384–322 до н. э.), ученик Платона. Именно Аристотель уравнивал пятый элемент с эфиром, или *квинтэссенцией*, и утверждал, что это тот материал, из которого сделаны небесные тела.

Древнегреческая атомистическая модель оказалась настолько влиятельной, что оставалась общепринятой до рождения современной химии спустя два тысячелетия. Только после того как ирландский ученый Роберт Бойль (1627–1691) опубликовал в 1661 году книгу «Скептический химик», эта модель начала трещать по швам.

Теперь греческая теория химии осталась далеким воспоминанием, но ее наследие все еще с нами. Мы все еще говорим о «exposed to the elements»ⁱ, когда выходим на улицу, где дует ветер (воздух) или идет дождь (вода). Первичные элементы явно и неявно встречаются во многих литератур-

ⁱ Буквально «отдался на волю стихий». – Прим. перев.

ных произведениях, предметах искусства, мистических верованиях, играх в стиле фэнтези и т. д. Некоторые даже заходят настолько далеко, что сопоставляют с элементами добившиеся успеха четверки людей (огонь: Джон Леннон, вода: Пол Маккартни, воздух: Джордж Харрисон, земля: Ринго Стар). Со времен платоновой интерпретации правильных тел в «Тимее» пять правильных многогранников называются *платоновыми телами*.

Глава 5

Евклид и его «Начала»

В одиннадцать лет я начал изучать Евклида под руководством брата. Это было одно из величайших событий моей жизни, столь же ослепительное, как первая любовь. Я и представить себе не мог, что в мире существует нечто столь восхитительное.

– *Бертран Рассел*¹

Когда мы думаем о греческой геометрии, на ум сразу приходит Евклид и его шедевр, «Начала». В древности Евклида часто называли просто «Геометр». Очень жаль, что нам так мало известно о его жизни. Мы не знаем, ни где он родился, ни даже более-менее точную дату рождения или смерти. Авторы большинства книг по истории математики не рискуют высказывать догадки о точных датах и пишут лишь, что он жил приблизительно в 300 году до н. э.



Рис. 5.1. Евклид глазами художника

Евклид изучал математику и познакомился с великими работами Теэтета и других платоников в Академии Платона в Афинах. Впоследствии он перебрался в Александрию. Это было то время, когда создавались вели-

чайшая библиотека и музей. Там Евклид основал поразительно успешную и авторитетную школу математики.

Евклид написал несколько книг, но нетленной славой обязан одной из них. Приблизительно в 300 году до н. э. из-под его пера вышел труд всей его жизни: «Начала». Эта книга была написана как учебник элементарной геометрии, теории чисел и геометрической алгебры. Неизвестно, внес ли Евклид свой вклад в математику; почти все результаты, излагаемые в «Началах», были ранее доказаны другими людьми. Прокл писал, что Евклид «собрал многое за Евдоксом, усовершенствовал многое за Теэтетом, а помимо этого привёл к неопровержимости те доказательства, которые раньше доказывались менее строго»².

«Началам» много не хватает с методической точки зрения: математика не помещена в исторический контекст, отсутствуют побудительные мотивы, не приведены приложения. Но способ изложения и логический подход к материалу неизмеримо превосходят все, что было сделано до того. Евклид начал с пяти «очевидных» допущений и на основе этих простых постулатов выстроил величественную теорию геометрии. Прокл превозносил «Начала» в таких словах:

Ведь он берет не всё, что можно сказать, а лишь самое элементарное; и он применяет разнообразные виды силлогизмов, одни из которых получают достоверность от причин, другие же исходят из достоверных положений, но все они – неопровержимые, точные и свойственные науке... Скажем также о связности отыскания, о расположении и порядке посылок и следствий, о силе, с какой он излагает каждый вопрос³.

Такое логическое обращение с материалом стало воплощением мечты Пифагора, жившего несколькими столетиями раньше. Влияние «Начал» на последующих ученых было очень велико. Опираясь на очевидные фундаментальные истины, человек попытался вывести все законы науки. Этот идеалистический подход к науке оказался чрезмерно упрощенным; лишь немногие законы науки близки к пяти постулатам Евклида. Тем не менее дедуктивный подход Евклида к математике и науке важен и по сей день.

«Начала» – самая ранняя из созданных греками крупных математических работ, дошедшая до нас. Она многократно переписывалась вручную, пока в 1482 году в Венеции не вышла первая печатная версия. С тех пор она переиздавалась примерно тысячу раз.

Большая часть тринадцатой, последней, книги «Начал» посвящена платоновым телам. Некоторые историки считают, что остальные двенадцать книг были написаны только для приготовления читателя к последней книге. Как мы уже говорили, доказательства, приведенные в книге XIII, скорее всего, принадлежат не Евклиду, а Теэтету. Некоторые ученые полагают, что Евклид воспроизвел работу Теэтета вообще без правки⁴.

Самый важный вклад книги XIII – доказательство того, что существует пять и только пять платоновых тел. Сначала Евклид показывает, что имеет-

ся по крайней мере пять платоновых тел – тетраэдр, октаэдр, икосаэдр, куб и додекаэдр. Затем он доказывает, что их не может быть больше пяти. Для решения первой задачи Евклид описывает точный порядок построения каждого из пяти платоновых тел, т. е. строит их внутри сферы. Мы не будем здесь повторять построения Евклида, но представим его доказательство отсутствия других правильных тел. А впоследствии дадим другое доказательство этой теоремы, основанное на формуле Эйлера.

В своем доказательстве Евклид пользуется одним свойством плоских углов. *Плоским* называется угол грани многогранника (в кубе имеется 24 плоских угла, равных 90°). В книге XI Евклид доказал, что сумма плоских углов при любой вершине выпуклого многогранника меньше 360° . Мы опускаем доказательство, но из рисунка легко видеть, почему это утверждение верно. Если взять грани, сходящиеся в любой вершине выпуклого многогранника, и развернуть их на плоскость (для этого нужно произвести разрез вдоль одного ребра), то окажется, что грани не перекрываются и никакие два ребра не пересекаются (рис. 5.2). Это возможно, только если сумма плоских углов строго меньше 360° .

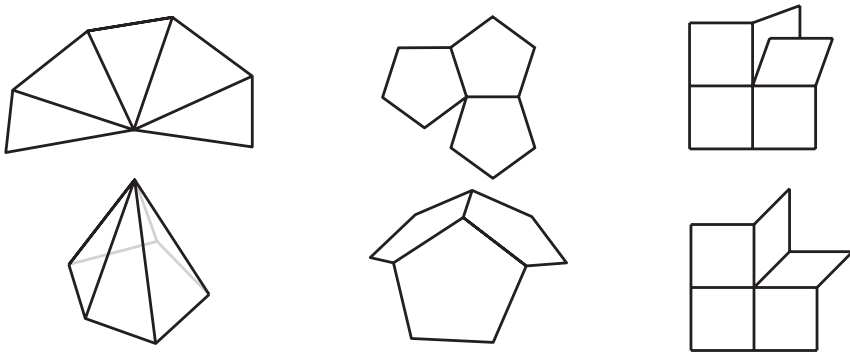


Рис. 5.2. Развертки выпуклых многогранников (слева и в центре) и для сравнения развертка невыпуклого многогранника (справа)

Теперь рассмотрим правильный многогранник. Каждая его грань – правильный n -угольник, а в каждой вершине сходятся m ребер. Поскольку каждая грань должна иметь по меньшей мере три стороны, то $n \geq 3$, а поскольку в каждой вершине сходится не менее трех ребер, то $m \geq 3$. Все углы каждой грани равны, обозначим их общую величину θ . В каждой вершине сходится m граней, и каждая приносит плоский угол θ . Из теоремы Евклида следует, что $m\theta$ должно быть меньше 360° . При каких m и n это возможно?

При $n = 3$ грани – равносторонние треугольники, так что $\theta = 60^\circ$ (внутренний угол правильного n -угольника равен $180^\circ(n-2)/n$). Мы знаем, что $m\theta < 360^\circ$, поэтому $m(60^\circ) < 360^\circ$, или $m < 6$. Следовательно, m может быть

равно только 3, 4, 5 (см. рис. 5.3). Этим значениям m соответствует тетраэдр, октаэдр и икосаэдр.

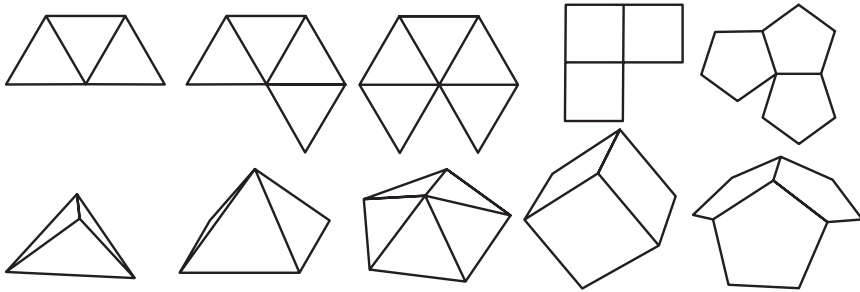


Рис. 5.3. Пять возможных вершин платоновых тел в развернутом и объемном виде

При $n = 4$ грани – квадраты, так что $\theta = 90^\circ$. Отсюда следует, что $m(90^\circ) < 360^\circ$ или $m < 4$. Стало быть, единственная возможность $m = 3$, и мы получаем куб.

При $n = 5$ грани – правильные пятиугольники и $\theta = 108^\circ$. Следовательно, $m(108^\circ) < 360^\circ$, или $m < 10/3$. Это значит, что $m = 3$, и мы получаем додекаэдр.

При $n = 6$ грани – правильные шестиугольники и $\theta = 120^\circ$. Но неравенство $m(120^\circ) < 360^\circ$ означает, что $m < 3$, что невозможно. Поэтому правильного многогранника с шестиугольными гранями не существует. Точно так же обстоит дело при $n > 6$. Следовательно, никаких других платоновых тел нет.

При внимательном изучении доказательства выясняется, что Евклид упустил из виду некоторые тонкие детали. В частности, он не исключил возможности существования двух различных многогранников, составленных из правильных n -угольников и таких, что в каждой вершине сходится m граней. Например, быть может, существует многогранник, отличный от икосаэдра, образованный равносторонними треугольниками, сходящимися по пять в каждой вершине. Евклид неявно предполагал, что такое невозможно. Евклид оказался прав в предположении выпуклости, но без него это уже не так. На рис. 5.4 мы видим невыпуклый многогранник с такими же свойствами, как у икосаэдра, – он состоит из двадцати равносторонних треугольников, сходящихся по пять в каждой вершине. Единственное отличие в том, что одна вершина вдавлена внутрь, так что многогранник невыпуклый.

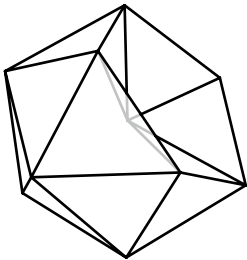


Рис. 5.4. Это невыпуклое платоново тело?

Такие пары многогранников, как икосаэдр и невыпуклый икосаэдр, показанный на рис. 5.4, называются *стереоизомерами* (термин заимствован из

химии). Они составлены из одного и того же набора граней, соединенных вдоль одних и тех же ребер.

И еще остается вопрос об изгибаемости многогранников. Представим себе, что многогранник изготовлен из жестких металлических граней с шарнирными ребрами. По меньшей мере, к Эйлеру восходит гипотеза о том, что такой многогранник не может изгибаться, пусть даже все ребра шарнирные. Его форму нельзя изменить растяжением или сжатием. В 1766-м Эйлер писал, что «замкнутая пространственная фигура не допускает изменений, пока не рвется»⁵. Доказать эту гипотезу важно, потому что если хотя бы один из правильных многогранников изгибаемый, то мы имели бы целое семейство стереоизомеров, а значит, бесконечное число немного различающихся правильных многогранников. Это стало бы приговором доказательству Евклида.

Как выясняется, Евклид был прав, но строгое доказательство было дано лишь спустя две тысячи лет плодовитым французским математиком Огюстеном Луи Коши (1789–1857). В 1811 году Коши доказал, что любые два выпуклых стереоизомера должны быть одинаковы⁶. Иными словами, зная все грани выпуклого многогранника и то, какие грани соседствуют друг с другом, мы знаем точную геометрию многогранника. Из этой знаменитой теоремы, в частности, следует, что пять платоновых тел – действительно единственные правильные многогранники. Из нее же следует, что любой выпуклый шарнирный многогранник не изгибается. Этот последний факт известен под названием теоремы о жесткости выпуклых многогранников. Интересно, что предположение о жесткости не выполняется для невыпуклых шарнирных многогранников, и этот факт был установлен только в 1877 году. Американский математик Роберт Коннелли построил первый пример изгибаемого невыпуклого многогранника⁷.

Последний значительный вклад греков в теорию правильных тел связан с именем Архимеда из Сиракуз. Архимед ввел понятие *полуправильных тел*. Полуправильное тело, как и правильное, – это выпуклый многогранник, гранями которого являются правильные многоугольники, но эти многоугольники необязательно должны быть одного типа. Кроме того, требуется, чтобы все грани с одинаковым числом сторон были конгруэнтны, а все вершины идентичны (т. е. порядок следования граней, сходящихся в каждой вершине, одинаков, и любую вершину можно повернуть так, что она совпадет с любой другой вершиной, при этом многогранник перейдет в себя). На рис. 5.5 показаны три полуправильных многогранника. Работа Архимеда утрачена, но из следующего отрывка Паппа (ок. 290–350 н. э.) мы знаем, что Архимед нашел тринадцать полуправильных тел:

Хотя можно представить себе геометрические тела с самыми разными гранями, наибольшего внимания заслуживают те, что имеют правильную форму. К ним относятся не только пять тел, найденных богоподобным Платоном... но также тела, общим числом тринадцать, открытые Архимедом и составленные из равносторонних и равноугольных, но не одинаковых многоугольников⁸.

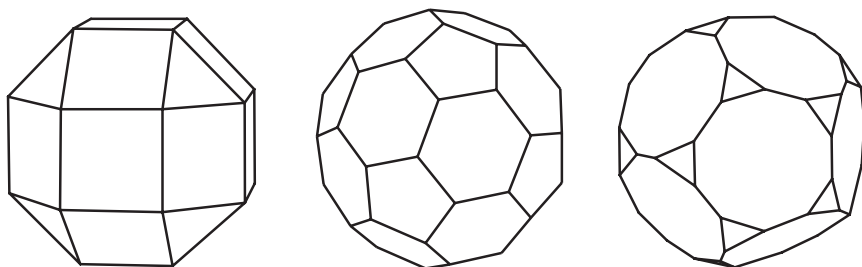


Рис. 5.5. Три полуправильных многогранника Архимеда

Весь набор из тринадцати многогранников был заново открыт в 1619 году Кеплером, который не знал о работе Архимеда. Как Теэтет доказал, что пять платоновых тел – единственные правильные многогранники, так Кеплер доказал, что существует всего тринадцать полуправильных многогранников. Следует отметить, что существует бесконечно много многогранников, называемых *призмами* и *антипризмами*, которые удовлетворяют условиям полуправильности, но исторически не считаются полуправильными телами. В настоящее время полуправильные многогранники называются *архимедовыми телами*.

После упадка греческой цивилизации центр математической жизни переместился в Персию (современный Ирак¹). Под покровительством монарха арабские математики перевели многие классические греческие трактаты, в т. ч. работы Евклида, Архимеда, Аполлония, Диофанта, Паппа и Птолемея. Но они были больше, чем хранителями греческих текстов. Они создали алгебру и внесли большой вклад в теорию чисел, системы счисления и тригонометрию. Арабский период доминирования в математике продолжался приблизительно до XV столетия.

Арабские математики развили геометрию, но практически ничего не добавили к теории многогранников. Математике пришлось ждать, когда Европа выйдет из периода Средневековья, – лишь тогда интерес к многогранникам пробудился с новой силой.

¹ Так в тексте. – Прим. перев.

Глава 6

Кеплер и его многогранная Вселенная

Иоганн Кеплер – одна из выдающихся переломных фигур в истории науки: его ум был наполовину поглощен средневековыми фантазиями, но другая половина вынашивала начатки математической науки, сформировавшей современный мир.

– Джордж Симмонс¹

Пока арабы развивали математику, Европа погрузилась во мрак Средневековья. Лишь очень немногие европейцы получали формальное образование; великие работы классической античности были почти забыты; ученых-математиков почти не было. В монастырях обучали лишь простейшим основам геометрии и арифметики. В течение 400 лет корпус математических знаний не пополнился ничем сколько-нибудь значительным.

И только с приходом европейского Возрождения в XV веке в математике стало заметно оживление. С подъемом гуманистического движения снова возник интерес к греческим классикам – сначала к греческой литературе, а затем и к математике. Романтика греческой интеллектуальной жизни прекрасно изображена на фреске Рафаэля «Афинская школа» (1510–1511), где показано воображаемое собрание Пифагора, Евклида, Сократа, Аристотеля, Платона и других греческих ученых (рис. 6.1).

Важной особенностью искусства эпохи Возрождения была перспектива. Многогранники и их остовы стали отличными объектами для демонстрации мастерства владения перспективой. Такие художники, как Пьеро делла Франческа, Альбрехт Дюрер и Даниэле Барбаро, внесли вклад как в математику, так и в искусство своими сочинениями о перспективе на примере многогранников. Среди множества художников, запечатлевших многогранники на своих картинах (см. рис. 6.2 и 6.3), были Леонардо да Винчи, который иллюстрировал книгу Лука Пачоли «Божественная пропорция» (1509); Венцель Ямницер, создавший тонкие, изысканные гравюры реальных и воображаемых многогранников; Якопо де Барбари, написавший портрет Луки Пачоли с многогранником; Паоло Уччелло, который включал

многогранники в свои картины и мозаики на полу собора Святого Марка в Венеции; Фра Джованни да Верона, создавший восхитительные интарсии (мозаики из дерева), и, как мы видим (рис. 6.5–6.8), Иоганн Кеплер, физик и математик.



Рис. 6.1. Рафаэль, «Афинская школа»

Подобно ученым и художникам Возрождения, жившим за двести лет до него, Кеплер был очарован многогранниками. В наши дни мы знаем Кеплера в основном как астронома, прославившегося законами движения планет (которые описывают эллиптическое движение планет вокруг Солнца), но это далеко не единственный его вклад в науку и математику. Его идеи бесконечного и бесконечно малого предвосхитили математический анализ. Он опубликовал работу по оптике. Он был одним из первых пользователей логарифмов. И Кеплер внес вклад, как реальный, так и причудливый, в теорию многогранников.

Кеплер родился 27 декабря 1571 г. в маленьком городке Вайль-дер-Штадт, земля Вюртемберг, Священная Римская империя; ныне он находится в Германии. Жизнь его складывалась очень трудно: болезненный ребенок, выросший в неблагополучной семье, подвергался преследованиям на религиозной почве; его первая жена и любимый сын умерли от оспы, мать обвинили в колдовстве, а скончался он в возрасте 58 лет на пути

к императору в надежде получить хотя бы часть жалованья. Несмотря на эти трудности, Кеплер был глубоко религиозным человеком. Он собирался стать лютеранским пастором, но в двадцать три года ушел из семинарии ради должности преподавателя математики и астрономии. Религиозные верования были очень важны для него, и, как видно из его сочинений, он часто черпал в них вдохновение для научной работы. Один из биографов Кеплера, Артур Кёстлер, писал: «Это сосуществование мистического и эмпирического, необузданного полета мысли и упорных, терпеливых исследований оставалось ... главной особенностью Кеплера с юных лет до старости»².

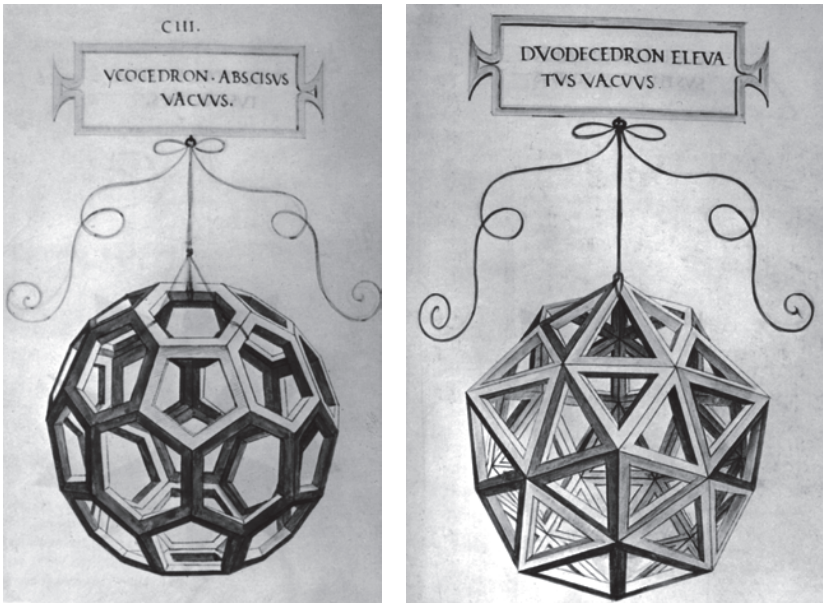


Рис. 6.2. Усеченный икосаэдр и пентакисдодекаэдр Леонардо да Винчи из иллюстраций к «Божественной пропорции»

Кеплер верил, что Бог создал мир, исполненный математической красоты. Конечно, Кеплер был уверен, что существование всего пяти правильных многогранников должно иметь какой-то важный смысл; очевидно, они должны быть отражены в устройстве Вселенной. Кёстлер писал: «Для Кеплера ложная вера в пять идеальных тел была не мимолетной причудой, а оставалась с ним, в измененном виде, до конца жизни, со всеми признаками параноидного бреда; и тем не менее она играла роль *vigor motrix*, питая его бессмертные достижения»³.

Идея первой модели Солнечной системы пришла Кеплеру 9 июля 1595 года, когда он читал лекцию в заполненном студентами зале. В то вре-

мя все считали правильной геоцентрическую (с Землей в качестве центра) модель Птолемея. За полвека до этого Николай Коперник (1473–1543) приводил аргументы в пользу гелиоцентрической (с Солнцем в центре) модели, но, по различным причинам, большинство интеллектуалов ее отвергло.

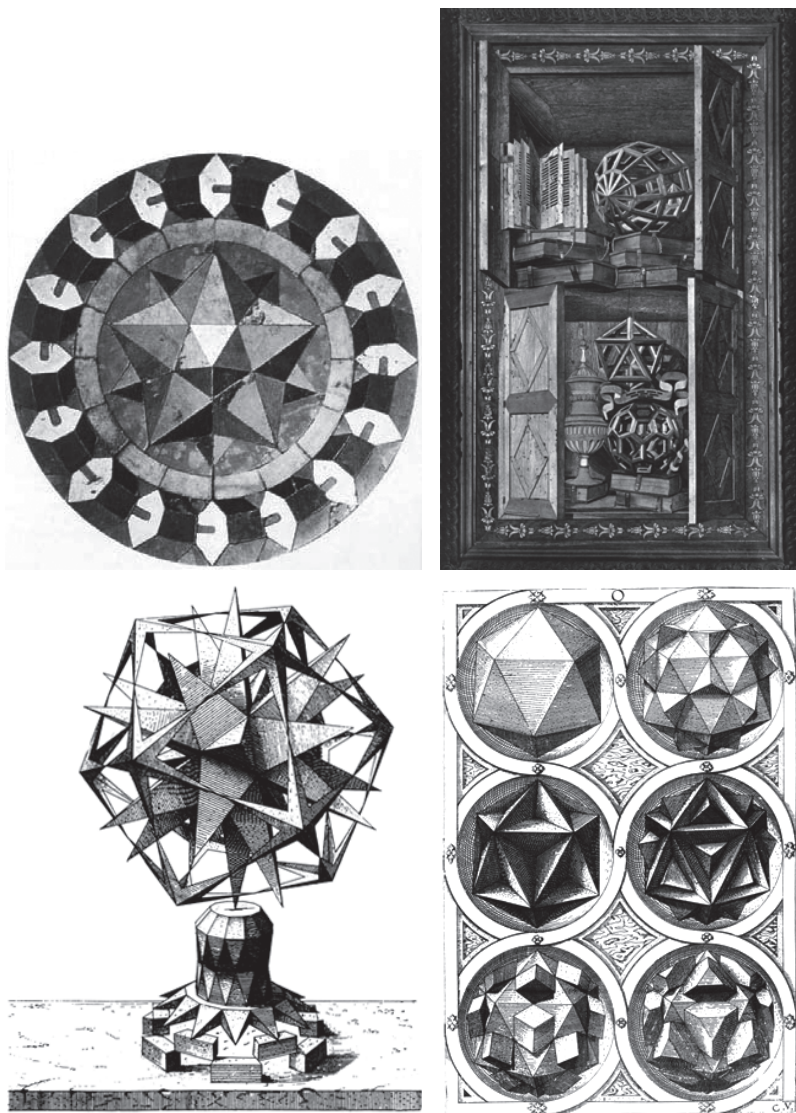


Рис. 6.3. Мраморная инкрустация Уччелло (слева сверху), одна из интарсий Фра Джованни (справа сверху) и работы Венцеля Ямницера



Рис. 6.4. Иоганн Кеплер

В один прекрасный день, когда Кеплер чертил многоугольники, вписанные в окружности, его посетила мысль, что в этом, возможно, и состоит секрет орбит планет: что, если орбиты – это вложенные друг в друга окружности, вписанные в различные многоугольники, с Солнцем в Центре? Проведя лето за скрупулезной проработкой деталей, он пришел к выводу, что эта модель Солнечной системы неправильна. Но он не отбросил ее целиком, а переработал и создал другую модель, которая нравилась ему больше. Новая модель была описана в его первой книге «Mysterium Cosmographicum» (Тайна мироздания), вышедшей в 1596 году⁴.

Кеплер осознал, что многоугольники и окружности – неподходящие объемы для модели Солнечной системы, он перешел в следующее измерение и стал рассматривать многогранники и сферы. Он считал, что существование пяти платоновых тел должно быть как-то связано с существованием шести известных планет: Сатурна, Юпитера, Марса, Земли, Венеры и Меркурия. Он утверждал, что орбиты планет соотносятся с вложенностью пяти платоновых тел, вписанных в сферы. Возьмем сферу такую, что орбита самой дальней планеты, Сатурна, проходит по ее экватору. Впишем в эту сферу куб, а в куб другую сферу. По экватору этой сферы, полагал Кеплер, проходит орбита Юпитера (см. рис. 6.5). Продолжая таким же образом (тетраэдр, сфера, додекаэдр, сфера, икосаэдр, сфера, октаэдр, сфера), мы найдем орбиты всех шести планет. Кеплер писал:

То была причина и следствие моих трудов. Невозможно выразить словами, сколь велика была моя радость от этого открытия. Я больше не жалел о потраченном времени. Денно и ночью был я поглощен вычислениями, дабы

понять, согласуется ли эта идея с коперниковыми орбитами или мою радость развеет ветер. Через несколько дней я убедился, что все правильно, и наблюдал, как одно тело за другим занимает свое законное место среди планет⁵.

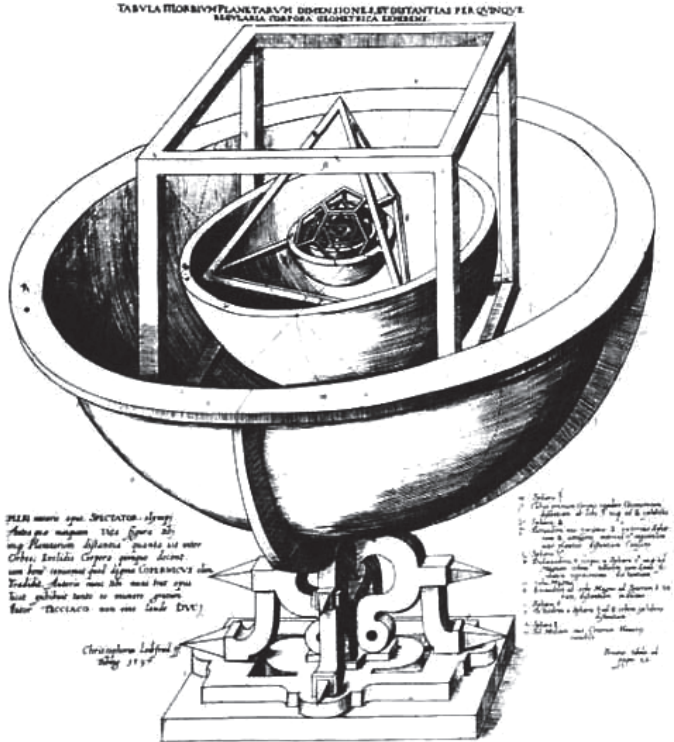


Рис. 6.5. Ранние представления Кеплера о Солнечной системе (из «Тайны мироздания»)

Таким образом, Кеплер стал профессиональным астрономом, который публично, в печати выступил в поддержку модели Коперника. В то время даже Галилей (1564–1642), который был старше Кеплера на шесть лет, хранил молчание по этому поводу.

Первая часть «Тайны мироздания» наполнена мистикой – Кеплер погружается в пучины астрологии, нумерологии и символики. Он приводит подробные ненаучные обоснования правильности своей модели Солнечной системы. Он видит очень четкую иерархию платоновых тел. Например, он делит их на первичные (тетраэдр, куб и додекаэдр) и вторичные (октаэдр и икосаэдр). Первичные отличаются тем, что в каждой вершине сходится три грани. Он утверждает, что «включать – ...более совершенное отношение», чем быть включенным⁶; в его модели первичные тела явля-

ются внешними многогранниками, а вторичные – внутренними, причем орбита Земли расположена посередине между двумя классами.

Но во второй части книги он делает резкий поворот в сторону научной аргументации, подкрепленной астрономическими данными. Чтобы согласовать теорию с данными, он внес несколько изменений в модель. Он еще не знал, что орбиты планет эллиптические, но знал, что они не круговые. Поэтому, чтобы вместить планеты, сферы в его модели должны были иметь некоторую толщину; даже если планета обращается не по круговой орбите, она все равно остается внутри сферической оболочки. Модель Кеплера на удивление точна, однако он понимал, что данные все-таки не идеально укладываются в модель (особенно орбиты Юпитера и Меркурия). Поэтому он изыскивал различные способы объяснить расхождения, например недоверие к используемым данным (полученным от Коперника).

Впоследствии Кеплер убедился, что его прототип Солнечной системы неправилен. Он писал: «Должен признать, что глава астрономии отсечена»⁷. Просеяв гигантский объем данных об орбите Марса, доставшихся ему от астронома Тихо Браге (1546–1601), Кеплер вывел истинное движение планет. Совершая один из величайших подвигов в истории науки, он использовал эти данные для открытия трех законов движения планет (первые два в 1609-м, третий в 1619 году). Через тридцать лет после его смерти эти законы были математически подтверждены Исааком Ньютоном. Интересно, что, несмотря на ложные утверждения в «Тайне мироздания», многие из этих безумных идей содержали зерно истины. Некоторые из важнейших научных достижений Кеплера восходят к, казалось бы, бессмысленным идеям, изложенным в этой книге.

Главный вклад в теорию многогранников Кеплер внес уже в конце своей карьеры в работе «*Harmonice Mundi*» (Гармония мира), опубликованной в 1619 году⁸. Этот трактат состоит из пяти частей, первые две посвящены математике. Он заново открыл все тринадцать архимедовых тел и доказал, что других не существует. Он представил класс многогранников, названных антипризмами. Он также обнаружил два звездных многогранника, которые сегодня известны под названиями большой и малый звездный додекаэдр (рис. 6.6). Он называл многогранники этого вида *эхин*, что означает морской еж. Позже мы вернемся к этим звездным многогранникам и увидим, что их можно рассматривать как правильные многогранники и что для них формула Эйлера не имеет места.

Даже на этом, позднем этапе своей карьеры Кеплера очаровывали платоновы тела. Он был приверженцем греческой теории четырех элементов и платоновой теории, утверждавшей, что элементы состоят из платоновых тел. Следует иметь в виду, что «Гармония мира» была опубликована за 42 года до революционного текста Бойля «Скептический химик». В «Гармонии мира» Кеплер использовал идеи Платона и Аристотеля наряду с собственными ненаучными аргументами, чтобы обосновать связь четырех элементов с платоновыми телами.

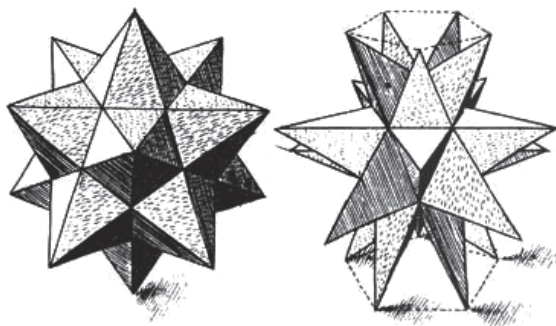


Рис. 6.6. Рисунки звездных многогранников, выполненные Кеплером (из книги «Гармония мира»)

Он утверждал, что поскольку куб можно положить на стол, так что его нелегко вывести из равновесия, он представляет собой наиболее устойчивое из платоновых тел; стало быть, это должна быть земля. Октаэдр, удерживаемый двумя пальцами, легко вращается; следовательно, он самый неустойчивый и должен соответствовать воздуху. Тетраэдр занимает наименьший объем при заданной площади поверхности, поэтому он самый сухой из пяти, т. е. соответствует огню. А икосаэдр занимает наибольший объем при заданной площади поверхности, стало быть, он самый мокрый и должен быть водой. Кеплер видел связь между двенадцатью гранями додекаэдра и двенадцатью знаками Зодиака, поэтому он утверждал, что додекаэдр является образом Вселенной. Соответствие между элементами и платоновыми телами можно наблюдать на знаменитой иллюстрации Кеплера, воспроизведенной на рис. 6.7.

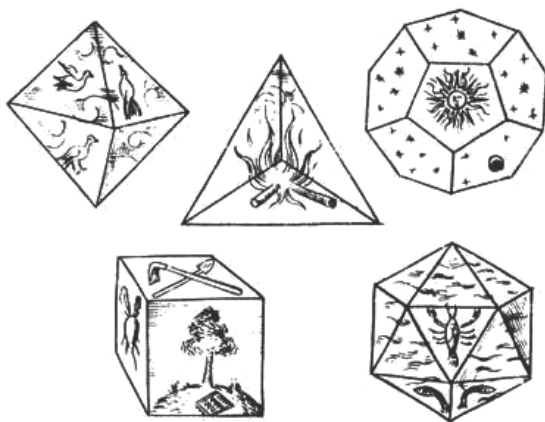


Рис. 6.7. Рисунки платоновых тел, выполненные Кеплером (из «Гармонии мира»)

В «Гармонии мира» мы снова видим раздвоение между склонностью Кеплера к мистике и его блестящим научным мышлением. В этой работе он высказывает ошибочные утверждения относительно атомистической теории, но также делает важное наблюдение о платоновых телах. Он обратил внимание на антисимметричную связь между октаэдром и кубом и между додекаэдром и икосаэдром, а также на автосимметрию тетраэдра. Из табл. 6.1 мы видим, что у куба и октаэдра по 12 ребер. Количество граней куба (6) равно количеству вершин октаэдра, а количество вершин куба (8) равно количеству граней октаэдра. Такое же зеркальное соотношение существует между додекаэдром и икосаэдром: у обоих по 30 ребер, у икосаэдра 20 граней, а у додекаэдра 20 вершин, у икосаэдра 12 вершин, а у додекаэдра 12 граней. Для тетраэдра нет парного правильного многогранника, но зато у него столько же граней, сколько вершин, поэтому он образует пару с самим собой.

Кеплер предложил физическую интерпретацию этой антисимметрии. Возьмем какой-нибудь правильный многогранник, например куб. Поместим новую вершину в центр каждой грани. Эти восемь точек образуют вершины октаэдра. Полученный многогранник называется *двойственным* исходному. На рис. 6.8 мы видим иллюстрацию Кеплера, показывающую, что октаэдр двойствен кубу. Заметим, что каждая грань куба соответствует вершине октаэдра, поэтому число граней куба равно числу вершин октаэдра. Присмотревшись более внимательно, мы увидим, что каждому ребру октаэдра можно сопоставить перпендикулярное ему ребро куба, поэтому оба многогранника имеют одинаковое число ребер. Кроме того, каждой вершине куба соответствует грань октаэдра, поэтому число тех и других одинаково. Таким способом мы устанавливаем зеркальную связь, показанную в табл. 6.1.

Таблица 6.1. Количество вершин, ребер и граней платоновых тел

	V	E	F
Октаэдр	6	12	8
Куб	8	12	6
Икосаэдр	12	30	20
Додекаэдр	20	30	12
Тетраэдр	4	6	4

Кеплер также показал, что икосаэдр двойствен додекаэдру, а тетраэдр – самому себе (см. рис. 6.8). Хотя Кеплер знал, что двойственность – взаимное отношение (куб можно вписать в октаэдр, а додекаэдр в икосаэдр), он не показал этого. Это не укладывалось в иерархию. Поскольку он верил, что отношение «включает» более совершенно, чем «быть включенным», то показал только, что первичные тела включают вторичные.

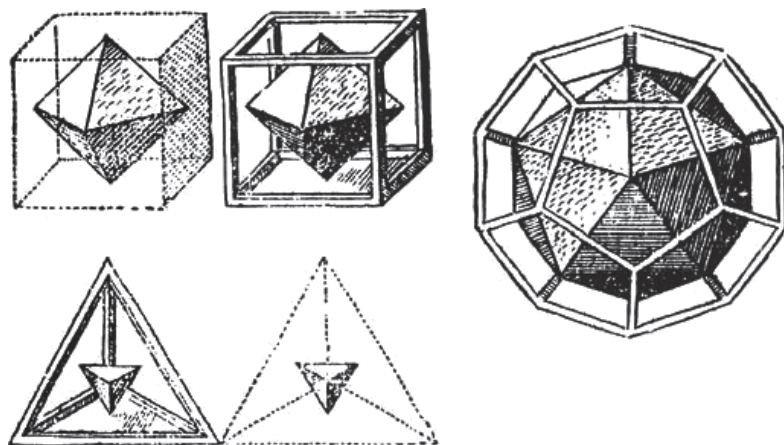


Рис. 6.8. Изображение двойственного многогранника, выполненное Кеплером (из «Гармонии мира»)

Верный своей манере, Кеплер не мог не поделиться собственной оригинальной интерпретацией этого математического наблюдения. Он приписал телам пол и воспользовался двойственностью для указания на половую совместимость. Куб и додекаэдр (оба доминирующие первичные тела) были мужского пола и включали женские октаэдр и икосаэдр (вторичные тела). Тетраэдр был гермафродитом, поскольку включал сам себя. Грани и вершины были половыми характеристиками, потому что именно в этих местах тела соприкасались. Кеплер писал:

Однако существует два достойных упоминания, так сказать, брака, получаемых сочетанием фигур, взятых из каждого класса: мужчин, куба и додекаэдра, из класса первичных тел, с женщинами, октаэдром и икосаэдром, из класса вторичных тел. Помимо них, существует фигура, символизирующая целибат, или гермафродита, – тетраэдр, поскольку он вписан сам в себя, подобно тому, как женские фигуры вписаны и, так сказать, подчинены мужским, а признаки их женского пола расположены напротив признаков мужского пола, иными словами, углы противостоят плоским граням⁹.

Производители игрушек творчески воспользовались свойствами правильных и неправильных многогранников и выпустили многочисленные разновидности экзотических игральные кости. Один такой изобретательный фабрикант даже воспользовался двойственностью правильных многогранников и сделал симметричную круглую кость! На поверхности сферы нарисованы очки, как на кубе (см. рис. 6.9). Во внутренней полости размещен двойственный кубу октаэдр. Тяжелый шарик перекатывается внутри октаэдра, пока не остановится в одной из его вершин. Благодаря весу шарика одна из «граней» кости после остановки оказывается сверху.

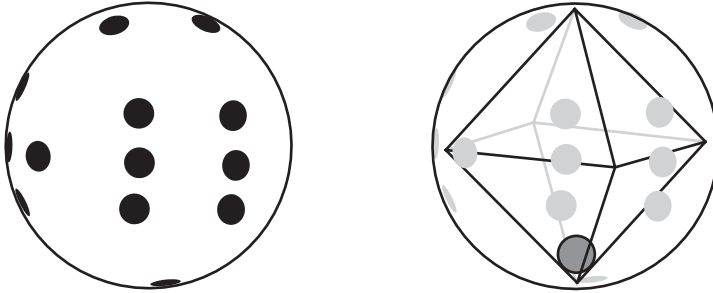


Рис. 6.9. Круглая игральная кость

Можно обобщить определение двойственности на неправильные многогранники, хотя определение оказывается более сложным. Тема двойственности постоянно возникает в математике. Мы часто создаем двойственные пары, поменяв местами какую-то ключевую величину. В случае многогранников обращается размерность: нульмерные вершины заменяются двумерными гранями, а двумерные грани – нульмерными вершинами. В других случаях местами меняются верх и низ, положительное и отрицательное и т. д. Иногда объект, больше всего похожий на данный, оказывается его точной противоположностью. Мы вернемся к понятию двойственности в главе 23.

К XVII веку математика стала в Европе академической дисциплиной. Длительный бесплодный период подошел к концу. Многогранники, вновь введенные в обиход художниками, опять оказались предметом математических исследований. В главе 9 мы увидим, что приблизительно в 1630 году Декарт открыл важные свойства многогранников, но мир узнал об этом только в 1860 году. Первого за две тысячи лет заметного вклада в теорию многогранников пришлось ждать до следующего столетия, когда Эйлер сделал свое блистательное открытие.

Глава 7

Жемчужина Эйлера

«Очевидно» – самое опасное слово в математике.

– Э. Т. Белл¹

14 ноября 1750 года газеты должны были бы поместить на первую полосу заголовки «Математик открывает ребро многогранника!». В тот день Эйлер написал из Берлина письмо своему другу Христиану Гольдбаху, специалисту по теории чисел из Санкт-Петербурга. В предложении, где, на первый взгляд, не было никакой интересной математики, Эйлер описывал «сочленения, по которым соединяются две грани, которые, за неимением общепринятого термина, я буду называть “ребрами”»². В действительности это не слишком содержательное определение было первым важным камнем, заложенным в основание того, что впоследствии стало величественной теорией.

Одним из блестящих дарований Эйлера была способность консолидировать изолированные математические результаты и выстраивать теоретическую конструкцию, в которой для всего было свое место. В 1750 году он вознамерился проделать это с многогранниками. Он приступил к тому, что, как он надеялся, станет исследованием оснований теории многогранников, или, как он называл ее, *стереометрии*.

К тому времени теории многогранников было уже с лишком две тысячи лет, но она оставалась чисто геометрической. Математики занимались исключительно *метрическими* свойствами многогранников, т. е. такими, которые можно было измерить. Их интересовало нахождение длин сторон и диагоналей, вычисление площади граней, измерение плоских углов и определение объема.

Первый же шаг Эйлера шел вразрез с этой метрической традицией. Он искал способ сгруппировать, или *классифицировать*, все многогранники по числу их признаков. Ведь именно так мы классифицируем многоугольники: многоугольники с тремя сторонами называются треугольниками, с четырьмя сторонами – четырехугольниками и т. д.

Очень быстро выясняется, что классифицировать многогранники подобным образом трудно. Очевидного признака – числа граней – недостаточно, чтобы отличить данный многогранник от всех остальных. Как видно по рис. 7.1, многогранники с одинаковым числом граней могут быть совершенно непохожи.

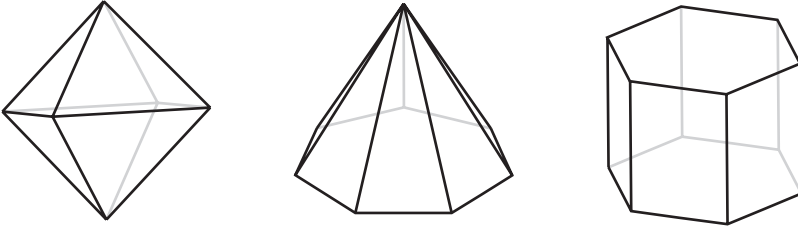


Рис. 7.1. Три различных многогранника с восемью гранями

Первой блестящей идеей Эйлера было то, что поверхность любого многогранника состоит из 0-, 1- и 2-мерных компонент, а именно вершин (или телесных углов, как он их называл), ребер и граней, и что эти признаки можно подсчитать. Именно эти три величины стали стандартными характеристиками всех топологических поверхностей. Эйлер писал:

Поэтому для любого сплошного тела следует рассматривать три вида границ, а именно: 1) точки, 2) линии и 3) поверхности, или, если использовать названия специально для этой цели: 1) телесные углы, 2) ребра и 3) грани. Эти три вида границ полностью определяют тело³.

Невозможно переоценить важность этого осознания. Как ни странно, пока Эйлер не придумал имя, никто явно не упоминал ребра многогранника. Эйлер, писавший по-латыни, употребил слово *acies*, означающее «ребро». На «вульгарной латыни» *acies* использовалось для обозначения острой кромки оружия, луча света или армии, построившейся для битвы. Поименование этого очевидного признака может показаться тривиальным делом, но это не так. В этом заключалось осознание того ключевого факта, что одномерное ребро многогранника – существенное понятие.

Для граней многогранника Эйлер использовал устоявшийся термин *hedra*, который, как мы уже говорили, переводится как «грань» или «основание». Вершины многогранника Эйлер называл *angulus solidus*, или телесный угол. До того как Эйлер стал писать о многогранниках, телесным углом называлась трехмерная область, ограниченная гранями, сходящимися в одной точке. Телесный угол куба отличается от телесного угла тетраэдра; они различаются геометрией ограничиваемой ими области. Из приведенного выше описания – согласно которому Эйлер ассоциировал телесный угол с точкой – мы видим, что он рассматривал телесные углы как нульмерные сущности. Говоря о телесном угле, он имел в виду его

острие, а не трехмерную область, ограниченную его гранями. Это тонкое различие, но понимание того, что телесные углы можно рассматривать как точки, имело большое значение для его теоремы. Тем не менее Эйлер упустил возможность дать им новое название. Вершина многогранника *отличается* от телесного угла, исходящего из нее. В 1794 году Адриен-Мари Лежандр (1752–1833) очень ясно высказался по этому поводу:

Мы часто употребляем в быту слово *угол* для обозначения точки, расположенной в его вершине; это неправильное выражение. Было бы понятнее и точнее использовать специальное название – *вершины* – для обозначения точек в вершинах углов многоугольника или многогранника. Именно в этом смысле следует понимать выражение *вершины многогранника*, которое мы использовали⁴.

После того как великий Эйлер сосредоточился на этих трех ключевых признаках – вершинах, ребрах и гранях – и начал выписывать их для различных семейств многогранников, он, вероятно, довольно быстро заметил связь между ними. Можно представить себе удивление Эйлера, когда он открыл, что для любого многогранника имеет место соотношение

$$V - E + F = 2.$$

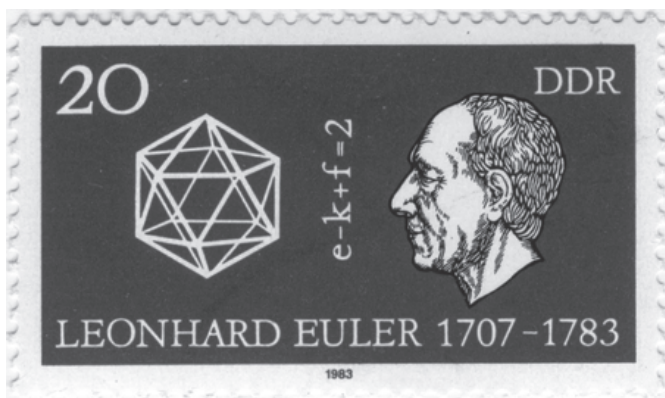


Рис. 7.2. Марка ГДР с изображением Эйлера и его формулы

Конечно же, он был поражен, как этого никто не заметил раньше. Блестящие математики Древней Греции и Возрождения посвятили бесчисленные часы исследованию всех мыслимых аспектов многогранников. Как они могли пройти мимо этого элементарного соотношения?

Простой ответ – легкомысленное замечание, что история математики изобилует очевидными теоремами, которые годами оставались незамеченными. Однако есть и более пронизательное соображение – математики прошлого не рассматривали многогранник с этой точки зрения. Предшест-

венников Эйлера интересовали в первую очередь метрические свойства, поэтому они и просмотрели эту фундаментальную взаимозависимость. Им не только не приходило в голову подсчитывать признаки многогранника, они даже не знали, что считать.

Воистину Эйлер – наш общий учитель.

Работа Эйлера по формуле для многогранников отмечена тремя важными документами. Первым было уведомление Гольдбаха о ее открытии в 1750 году. Он писал:

В каждом теле, ограниченном плоскими гранями, сумма числа граней и числа телесных углов на два больше числа ребер, т. е. $H + S = A + 2^5$.

Эйлер использовал буквы H , A и S для обозначения числа граней (*hedra*), ребер (*acies*) и вершин (*angulus solidus*). После переименования и переупорядочения членов получаем знакомую формулу:

Формула Эйлера для многогранников

Для многогранника с V вершинами, E ребрами и F гранями имеет место соотношение $V - E + F = 2$.

В это письмо Эйлер включил, без доказательства, еще десять наблюдений, касающихся многогранников. В конце письма он выделил в качестве самых важных приведенную выше формулу для многогранников и еще одну, которую мы обсудим в главе 20. И разочарованно признался, что обе формулы «настолько трудны, что я еще не смог найти им удовлетворительное доказательство»⁶.

В 1750 и 1751 годах Эйлер написал две статьи о своей формуле для многогранников. Из-за задержек в журнальных публикациях они появились в печатном виде только в 1758 году. В первой статье, «*Elementa doctrinae solidorum*»⁷ (Элементы доктрины сплошных тел), он начал изучение стереометрии. На первых тридцати страницах Эйлер делает общие замечания о многогранниках. Затем он приступает к обсуждению связи между числом вершин, ребер и граней. Он доказывает несколько теорем о связи между V , E и F и устанавливает справедливость формулы $V - E + F = 2$ в нескольких частных случаях. Но доказательства того, что она верна для всех многогранников, он еще не дал. Не видя пока выхода из тупика, он пишет: «Я не смог найти твердого доказательства этой теоремы»⁸.

В следующем году он опубликовал вторую статью «*Demonstratio nonnullarum insignium proprietatum quibus solida hedris planis inclusa sunt praedita*»⁹ (Доказательство некоторых важных свойств тел, ограниченных плоскими гранями). В ней он наконец дал доказательство своей формулы для многогранников. Несмотря на то что формула Эйлера – одна из самых известных

в математике, его доказательство практически неизвестно нынешним математикам. Тому есть несколько причин. Как мы увидим, доказательство Эйлера не удовлетворяет современным стандартам строгости. Кроме того, после 1751 года было дано много доказательств формулы Эйлера, более простых и прозрачных, чем найденное самим Эйлером. И тем не менее доказательство Эйлера весьма изобретательно, и в нем не используются метрические свойства многогранников. Первое по-настоящему строгое доказательство дал Лежандр в 1794 году, через сорок лет после Эйлера¹⁰. В этом удивительном доказательстве, которое мы приведем в главе 10, Лежандр воспользовался геометрическими свойствами сферы.

Доказательство Эйлера стало предтечей современных комбинаторных доказательств. Он воспользовался методом рассечения, чтобы, взяв сложный многогранник, быть может, с большим числом вершин, свести его к более простому путем применения систематической процедуры. Эйлер предлагает удалять вершины многогранника по одной, пока не останется всего четыре, образующие треугольную пирамиду. Следя за числом вершин, ребер и граней на каждом этапе и используя известные свойства треугольной пирамиды, он смог прийти к выводу, что $V - E + F = 2$ для исходного многогранника.

Прежде чем переходить непосредственно к доказательству Эйлера, рассмотрим пример. Взгляните на декомпозицию куба на рис. 7.3. На каждом этапе мы удаляем одну вершину куба, отрезая от него треугольные пирамиды, и продолжаем это делать, пока не останется одна треугольная пирамида. Поскольку куб – сравнительно простой многогранник, для удаления вершины достаточно отрезать одну пирамиду. Но в общем случае для этого, возможно, придется отрезать несколько пирамид. В табл. 7.1 показано количество вершин, ребер и граней на каждом этапе декомпозиции.

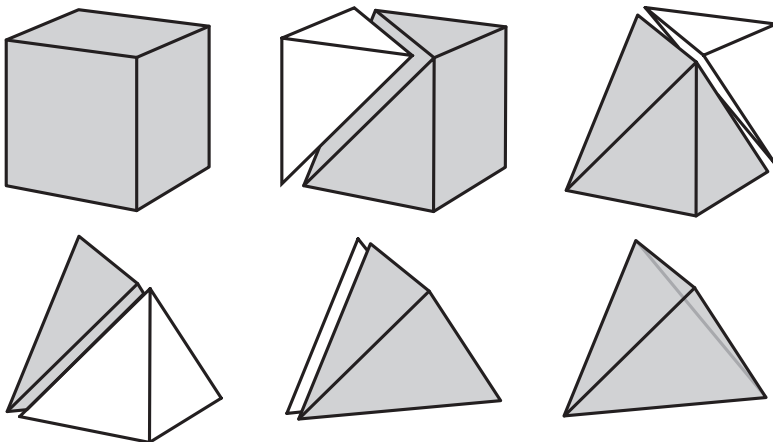


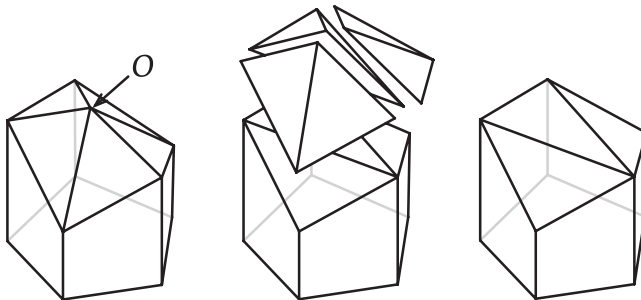
Рис. 7.3. Удаление вершин куба с целью получения тетраэдра

Таблица 7.1. Преобразование куба в тетраэдр путем удаления вершин по одной

	Грани	Ребра	Вершины	Ребра – Грани
Куб	6	12	8	6
	7	12	7	5
	7	11	6	4
	6	9	5	3
Тетраэдр	4	6	4	2

Можно было бы рассчитывать, что при уменьшении числа вершин число граней и ребер уменьшается, следуя какой-то предсказуемой закономерности. Но, как показывает таблица, в этой последовательности нет очевидного порядка. В нашем примере число граней сначала увеличивается и только потом начинает уменьшаться – в исходном многограннике было шесть граней, а после отрезания вершин их становится семь, затем снова семь, потом шесть и, наконец, четыре. Этот путь ведет в тупик. Ключом к доказательству Эйлера является пронизательное наблюдение, что разность между числом ребер и числом граней уменьшается на единицу после удаления каждой вершины (это видно из последнего столбца таблицы). Как мы увидим, в этом вся соль доказательства Эйлера.

Вначале мы имеем многогранник с V вершинами, E ребрами и F гранями. Наша первая задача – удалить вершину многогранника, чтобы в новом многограннике вершин было меньше, чем в исходном. После этого мы должны посчитать число граней и ребер в получившемся многограннике. Пусть O – вершина, подлежащая удалению, и предположим, что в ней сходится n граней (и, следовательно, n ребер). Эйлер увидел, что O можно удалить, отрезав $n - 2$ треугольных пирамид с вершиной O . Например, вершина в многограннике на рис. 7.4 образована схождением 5 граней, и для ее удаления нужно отрезать 3 пирамиды.

Рис. 7.4. Удаление вершины O путем отрезания пирамид

Мы хотели знать, сколько граней и ребер в уменьшенном многограннике. На примере куба мы видели, что простого ответа на этот вопрос нет.

Необходимо рассмотреть три случая. Сначала рассмотрим самый простой: предположим, что все грани, сходящиеся в O , треугольные. Отрезав O , мы удалим эти n граней, но под $n - 2$ отрезанными пирамидами обнаружим $n - 2$ новых треугольных граней. В предположении, что все новые треугольные грани лежат в разных плоскостях, число граней нового многогранника будет равно

$$F - n + (n - 2) = F - 2,$$

где F – исходное число граней.

По ходу дела мы удаляем также n ребер, сходящихся в вершине O , но добавляем $n - 3$ ребра, разделяющих $n - 2$ новые треугольные грани. Таким образом, число ребер в новом многограннике равно

$$E - n + (n - 3) = E - 3,$$

где E – исходное число ребер.

Снова взглянем на рис. 7.4. Мы начали с многогранника, имеющего 11 граней и 20 ребер. После отрезания трех пирамид получился многогранник с $11 - 2 = 9$ гранями и $20 - 3 = 17$ ребрами.

В приведенном рассуждении мы сделали два предположения о декомпозиции многогранника. Первое – что все грани, сходящиеся в вершине O , треугольные, второе – что новые треугольные грани многогранника не компланарны. Теперь следует рассмотреть, что будет, если одно или оба предположения не выполняются.

Предположим, что одна из граней, сходящихся в O , не треугольная (например, закрашенная грань на рис. 7.5). Тогда при отрезании пирамиды, одна из граней которой лежит в плоскости этой грани, эта грань не убирается из многогранника полностью. Кроме того, добавляется новое ребро там, где эта грань разрезана на две части. Таким образом, число граней и ребер в новом многограннике на единицу больше, чем предполагалось ранее. В этом примере мы начали с многогранника, имеющего 12 граней и 23 ребра. После отрезания пирамид получается многогранник с $12 - 2 + 1 = 11$ гранями и $23 - 3 + 1 = 21$ ребром. В общем случае, если исходный многогранник имеет s нетреугольных граней, сходящихся в O , то количество граней и ребер будет на s больше, чем ожидалось. Поэтому число граней равно $F - 2 + s$, а число ребер равно $E - 3 + s$.

С другой стороны, предположим, что две из новых треугольных граней расположены рядом и лежат в одной плоскости (например, закрашенные грани на рис. 7.6). Тогда они привнесут в результирующий многогранник не две разные грани, а одну четырехугольную грань. Таким образом, получится на одну грань меньше, чем предполагалось. Поскольку между этими гранями нет ребра, ребер тоже будет на одно меньше. В примере на рис. 7.6 мы начали с многогранника, имеющего 11 граней и 20 ребер. После отрезания пирамид стало $11 - 2 - 1 = 8$ граней и $20 - 3 - 1 = 16$ ребер. Если такое происходит t раз, то граней и ребер будет на t меньше, чем ожидалось. По-

этому в результирующем многограннике число граней будет равно $F - 2 + s - t$, а число ребер $- E - 3 + s - t$.

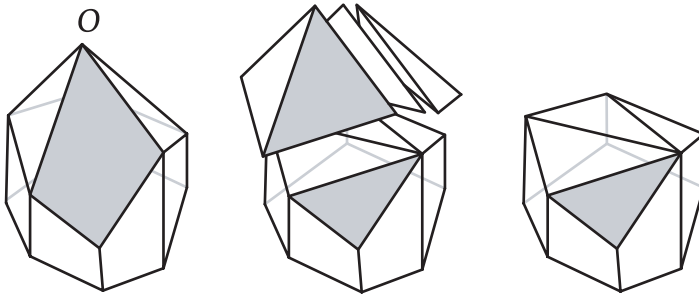


Рис. 7.5. Нетрехугольная грань приносит одну новую грань и одно новое ребро в новый многогранник

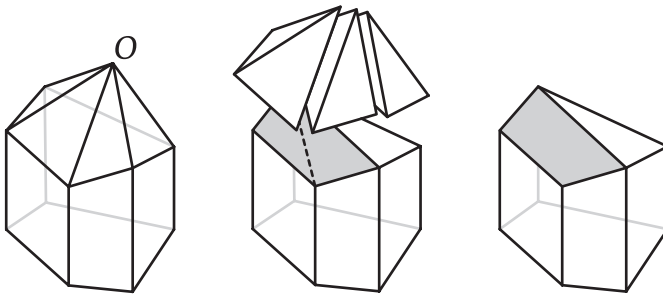


Рис. 7.6. Две компланарные грани уменьшают число граней и ребер на 1

Эти сложные на вид формулы описывают число граней и ребер после удаления *одной* вершины. Сама мысль о том, чтобы следить за этими числами после удаления нескольких вершин, приводит в ужас. Однако важное наблюдение, сделанное Эйлером, избавляет нас от этой необходимости. Если взять разность между числом ребер и граней нового многогранника, то получим

$$(E - 3 + s - t) - (F - 2 + s - t) = E - F - 1.$$

Иными словами, разность между числом ребер и числом граней равно на единицу меньше той, что была до удаления вершины. После удаления n вершин разность между числом ребер и числом граней будет равна $E - F - n$.

Теперь мы можем закончить доказательство Эйлера. Мы начали с многогранника, имеющего V вершин, E ребер и F граней. Предположим, что мы удаляем вершины по одной, всего n штук, пока не останется четыре вершины. Тогда $V - n = 4$, или $n = V - 4$. Единственный многогранник

с четырьмя вершинами – треугольная пирамида (у которой четыре грани и шесть ребер). Для треугольной пирамиды разность между числом ребер и числом граней равна $6 - 4 = 2$, но из предыдущего обсуждения мы знаем, что она также равна $E - F - n$. Таким образом, имеем равенства

$$E - F - n = 2$$

и

$$n = V - 4.$$

Подставляя второе равенство в первое и изменяя порядок членов, получаем $V - E + F = 2$, что и требовалось доказать.

В самом начале мы сказали, что доказательство Эйлера не вполне строгое и что он упустил из виду некоторые тонкости. На самом деле мы видим, что Эйлер очень внимательно следил за числом граней и ребер при удалении вершины. Однако к процессу удаления вершин он отнесся легкомысленно и не дал детальных инструкций, как следует отрезать пирамиды. Вместо этого он обошелся несколькими расплывчатыми примерами. Эйлер правильно утверждал, что может существовать несколько способов удалить данную вершину путем отрезания пирамид, но не предупредил, что одни способы декомпозиции приемлемы, а других следует избегать. У читателя создается неверное впечатление, что все способы декомпозиции равнозначны. В действительности некоторые ведут к неприятностям.

Первая подстерегающая нас ловушка заключается в том, что в процессе декомпозиции мы можем случайно получить невыпуклый многогранник. Эйлер привел пример, в котором удаляемая вершина O соседствует с четырьмя вершинами A, B, C, D (см. рис. 7.7). Он писал:

Это можно сделать двумя способами ... нужно отрезать две пирамиды: $OABC$ и $OACD$ или $OABD$ и $OBCD$. И если точки A, B, C, D не лежат в одной плоскости, то получающиеся тела будут иметь разную форму¹¹.

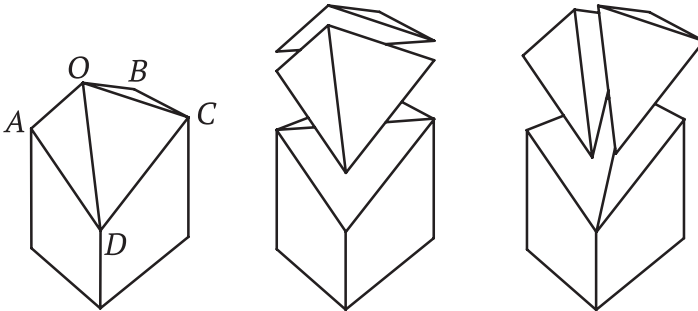


Рис. 7.7. Удаление вершины многогранника (слева) может привести как к выпуклому (в центре), так и к невыпуклому (справа) многограннику

Это правда, но если четыре соседние вершины не компланарны, то один из получающихся многогранников обязательно будет выпуклым, а другой – невыпуклым. Для многогранника на рис. 7.7 отрезание пирамид $OABD$ и $OBCD$ приводит к невыпуклому многограннику.

Эйлер ни разу не упомянул о выпуклости в своей статье. Он неявно предполагал, что все многогранники выпуклые. Если внимательно рассмотреть его алгоритм, то мы увидим, что важно, чтобы многогранник оставался выпуклым после отрезания вершины. Возникновение невыпуклого многогранника может привести к неприятности, потому что техника Эйлера неприменима к удалению вершины, находящейся в точке невыпуклости. Но и это еще не самое страшное.

Как указал математик Анри Лебег (1875–1941), мало того что результирующий многогранник может оказаться невыпуклым, он может вообще не быть многогранником¹²! На рис. 7.8 показана вершина, в которой сходятся четыре грани. Один из двух способов ее отрезания работает правильно, тогда как другой приводит к фигуре, которая является не многогранником, а объектом, состоящим из двух многогранников, соединенных по одному ребру. Хуже того, этот немногранник не удовлетворяет формуле Эйлера ($V = 6, E = 11, F = 8$, так что $V - E + F = 3$, а не 2). Похоже, этот пример указывает на серьезный дефект в доказательстве Эйлера. На рис. 7.9 показано, что, применяя метод расщепления Эйлера, мы можем получить и другие вырожденные многогранники. Одна декомпозиция дает два многогранника, соединенных в вершине, другая – несвязный многогранник. И в обоих случаях формула Эйлера не выполняется.

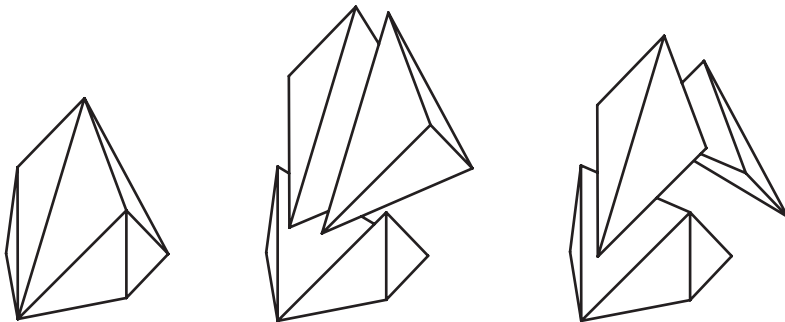


Рис. 7.8. Метод Эйлера, примененный к многограннику слева, может дать вырожденный (в центре) или невырожденный (справа) многогранник

Но, как выясняется, доказательство Эйлера можно спасти. Нужно лишь действовать более аккуратно¹³. Во всех приведенных выше примерах доказательство портил неправильный выбор в процессе декомпозиции, но в каждом случае существовала приемлемая декомпозиция. Можно дока-

зять, что, придерживаясь четкой стратегии, а не делая выбор произвольно, мы всегда сможем удалить вершину так, что результирующий объект *гарантированно* будет выпуклым многогранником, и тогда доказательство будет спасено. После этих исправлений мы наконец можем утверждать, что формула Эйлера имеет место для всех выпуклых многогранников.

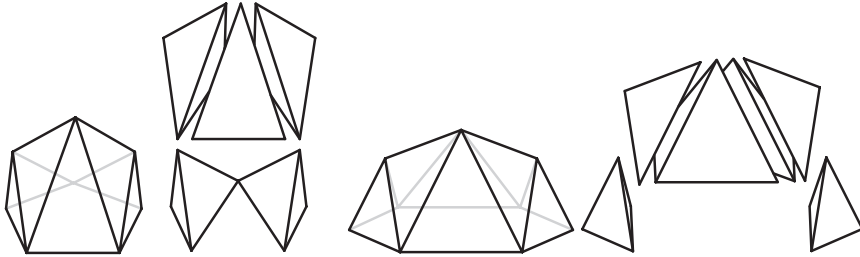


Рис. 7.9. Другие проблемы, свойственные методу Эйлера

С тех пор как Эйлер представил свое доказательство, появилось много других, как правило, более простых. Некоторые из них мы рассмотрим далее в этой книге.

Тонкая проблема выпуклости стала настоящим вызовом для математиков. Последовало несколько десятилетий интересных исследований, поскольку математики хотели точно выяснить, какими свойствами должен обладать многогранник, чтобы для него удовлетворялась формула Эйлера. Мы увидим, что они рассматривали невыпуклые многогранники, многогранники с дырками и другие, еще более патологические примеры. Это направление исследований оказалось чрезвычайно плодотворным.

Много лет потребовалось математикам, чтобы понять важность того, что Эйлеру было очевидно, – что это теорема о размерности и правилах построения математических объектов. Формула Эйлера и ее обобщения стали краеугольным камнем топологии.

Вероятно, Эйлер в полной мере не осознавал важность своей теоремы. Он никогда не возвращался к проблеме классификации многогранников и ничего больше не писал о формуле для многогранников. Он так и не узнал, что это один из самых значительных его вкладов в математику.

Глава 8

Платоновы тела, мячи для гольфа, фуллерены и геодезические купола

Математику интересует только перечисление
и сравнение отношений.

– *Карл Фридрих Гаусс*¹

Математика изучает не предметы,
а лишь отношения между ними.

– *Анри Пуанкаре*²

«**В**се это замечательно, только кому это нужно?» – спросит скептически настроенный студент, источая сарказм. Красота – чудесная вещь, но некоторые считают, что важность теоремы следует измерять ее полезностью. Для чего может пригодиться формула Эйлера?

Этот вопрос можно задать применительно к любой математической теореме. Формула Эйлера – больше, чем просто элегантная теорема. В последующих главах мы представим многочисленные применения формулы Эйлера. Для большей их части придется провести кое-какую подготовку, чтобы понять, в чем состоит применение. Но чтобы разжечь у читателя аппетит, мы сделаем паузу и опишем два простых применения. Сначала мы с помощью формулы Эйлера докажем, что не существует правильных многогранников, кроме платоновых тел, а затем воспользуемся ей, чтобы вывести структурную теорему для мячей для гольфа, больших молекул и геодезических куполов.

В главе 5 мы показали, как Евклид доказывал, что существует ровно пять платоновых тел. Хотя доказательство кажется коротким, оно опирается на геометрические теоремы, доказанные в предыдущих двенадцати книгах «Начал». В этой главе мы приведем другое доказательство этого факта, основанное на формуле Эйлера и простых арифметических выкладках.

Пусть имеется правильное тело. Мы покажем, что это должно быть одно из пяти известных платоновых тел: тетраэдр, куб, октаэдр, икосаэдр или

додекаэдр. Предположим, что многогранник имеет V вершин, E ребер и F граней. Из формулы Эйлера мы знаем, что

$$V - E + F = 2.$$

Поскольку многогранник правильный, каждая его грань является правильным многоугольником, и все они имеют одно и то же число ребер. Очевидно, что это число, которое мы обозначим n , должно быть не меньше трех. По определению, в каждой вершине сходится одно и то же число ребер. Это число m также должно быть не меньше трех (разумеется, m также равно числу граней, сходящихся в каждой вершине).

Каждая грань приносит n ребер, но поскольку каждое ребро является общим для двух граней, в величине Fn каждое ребро учтено дважды. Иначе говоря,

$$E = \frac{1}{2}(Fn).$$

Аналогично каждая грань приносит n вершин, но в каждой вершине сходится m граней, поэтому в величине Fn каждая вершина учтена m раз. Таким образом,

$$V = Fn/m.$$

Теперь подставим эти величины в формулу Эйлера и решим уравнение относительно F .

$$\begin{aligned} V - E + F &= 2. \\ \frac{Fn}{m} - \frac{Fn}{2} + F &= 2. \\ F\left(\frac{n}{m} - \frac{n}{2} + 1\right) &= 2. \\ F\left(\frac{2n - mn + 2m}{2m}\right) &= 2. \\ F &= \frac{4m}{2n - mn + 2m}. \end{aligned}$$

Мы знаем, что $4m$ и F положительны. Поэтому чтобы последнее равенство могло иметь место, должно быть

$$2n - mn + 2m > 0.$$

Легко проверить, что этому неравенству удовлетворяет только пять пар целых чисел, при условии что $n \geq 3$ и $m \geq 3$. Вот они: (3, 3), (3, 4), (3, 5), (4, 3), (5, 3). Из формул для V , E и F выше находим, что эти пары соответствуют пяти платоновым телам (табл. 8.1).

Задумавшись об удивительности этого доказательства. Доказательство Евклида было локальным и геометрическим. Он пользовался величинами углов правильных многоугольников, чтобы определить возможные конфи-

гурации в вершинах. И эту локальную информацию он использовал, чтобы сделать вывод о глобальной природе многогранника.

Таблица 8.1. Единственные пять пар целых чисел (n, m) , удовлетворяющие требованиям для правильного многогранника

	n (ребер в каждой грани)	m (граней, сходящихся в каждой вершине)	$2n - mn + 2m$	V	E	F
Тетраэдр	3	3	3	4	6	4
Октаэдр	3	4	2	6	12	8
Икосаэдр	3	5	1	12	30	20
Куб	4	3	2	8	12	6
Додекаэдр	5	3	1	20	30	12

Новое же доказательство глобально и практически не прибегает к геометрии. Это теорема о правильных телах, но нигде в доказательстве не используется тот факт, что грани – правильные многоугольники! Мы даже не предполагали, что грани конгруэнтны. Формула Эйлера по природе своей комбинаторная – в ней подсчитываются вершины, ребра и грани. Нет никакой возможности включить в формулу Эйлера длины сторон и величины углов, и тем не менее мы сумели воспользоваться ей для нахождения всех платоновых тел.

Поскольку мы не использовали все условия теоремы, то, стало быть, доказали нечто совсем иное. Мы лишь предполагали, что все грани имеют одинаковое число сторон и что в каждой вершине сходится одинаковое число граней. С этой точки зрения, все фигуры на рис. 8.1 одинаковы – все они похожи на куб.

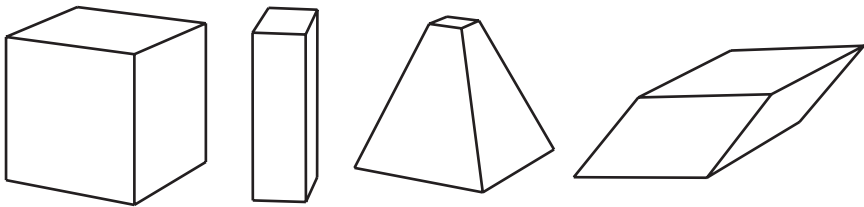


Рис. 8.1. Кубоподобные тела

По существу, мы доказали, что существует всего пять конфигураций многогранников, обладающих тем свойством, что все грани имеют одно и то же число сторон и в каждой вершине сходится одинаковое число граней. Любой такой многогранник должен быть «похож» на тетраэдр, октаэдр, икосаэдр, куб или додекаэдр – как многогранники на рис. 8.1 напоминают куб. В частности, число вершин, ребер и граней должно быть таким же, как у одного из платоновых тел.

Стремясь создать мяч для гольфа с улучшенными аэродинамическими свойствами, одна компания изобрела многогранные мячи. Поверхность мяча не покрыта сферическими лунками, а состоит из 232 вдавленных многоугольных граней (рис. 8.2). Поначалу поверхность кажется морем шестиугольных граней. Но будьте уверены, это не шестое платоново тело. При ближайшем рассмотрении мы обнаружим, что 12 граней – пятиугольные.



Рис. 8.2. Мяч для гольфа состоит из 220 шестиугольников и 12 пятиугольников

Во введении мы узнали о семействе шарообразных молекул углерода, называемых фуллеренами. На рис. 8.3 показан бакминстерфуллерен C_{60} , имеющий форму футбольного мяча. Атомы углерода образуют 12 пятиугольных и 20 шестиугольных колец. Ученые умеют создавать фуллерены с другим числом атомов углерода. Например, C_{540} – массивный фуллерен с 540 атомами. Соответствующий этой молекуле многогранник состоит из 12 пятиугольников и 260 шестиугольников. Вообще, любой фуллерен включает пятиугольные и шестиугольные кольца, причем количество пятиугольников всегда равно 12.

Следующая теорема показывает, что это не случайное совпадение. Будем называть *степенью* вершины количество сходящихся в ней ребер.

Теорема о двенадцати пятиугольниках

Если любая грань многогранника является пятиугольником или шестиугольником и если степень любой вершины равна трем, то в многограннике имеется ровно двенадцать пятиугольных граней.

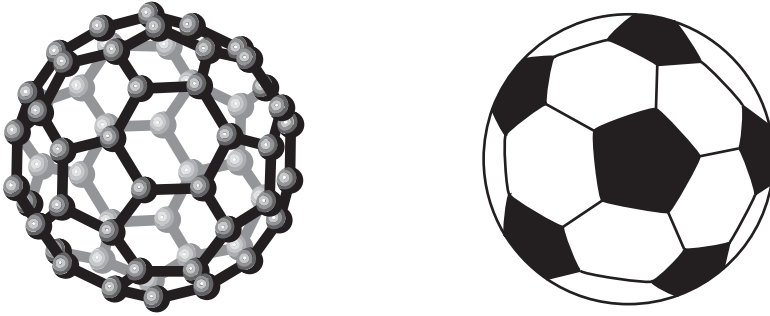


Рис. 8.3. Фуллерены и футбольные мячи включают ровно 12 пятиугольников

Эта теорема доказывается прямым применением формулы Эйлера. Предположим, что имеется такой многогранник с P пятиугольными и H шестиугольными гранями. Поскольку у пятиугольника пять сторон, а у шестиугольника – шесть и поскольку каждое ребро является общей границей двух граней, то число ребер равно $E = (5P + 6H)/2$. С другой стороны, поскольку степень каждой вершины равна 3, то число вершин равно $V = (5P + 6H)/3$. Подставляя обе величины в формулу Эйлера, получаем

$$2 = V - E + F = (5P + 6H)/3 - (5P + 6H)/2 + (P + H).$$

Умножая обе части на 6, приходим к нужному выводу:

$$12 = 10P + 12H - 15P - 18H + 6P + 6H = P.$$

У теоремы о двенадцати пятиугольниках есть двойственная формулировка, получаемая заменой граней на вершины и наоборот. Оставляем ее доказательство читателю.

Если любая грань многогранника является треугольником и степень каждой вершины равна пяти или шести, то в многограннике имеется ровно двенадцать вершин степени пять.

На рис. 8.4 показан пример такого многогранника, где выделено 7 из 12 вершин степени пять. Многие геодезические купола, например Биосфера в Монреале, сконструированы именно так. Разумеется, геодезические купола в архитектуре обычно не являются полными сферами. Тематический парк Эпкот во Всемирном центре отдыха Уолта Диснея имеет такую конструкцию, но каждая треугольная грань разбита еще на три треугольника.

Эти простые примеры позволяют составить первое впечатление о возможностях формулы Эйлера. В последующих главах мы увидим, какая мощь скрывается за элементарным, на первый взгляд, соотношением.

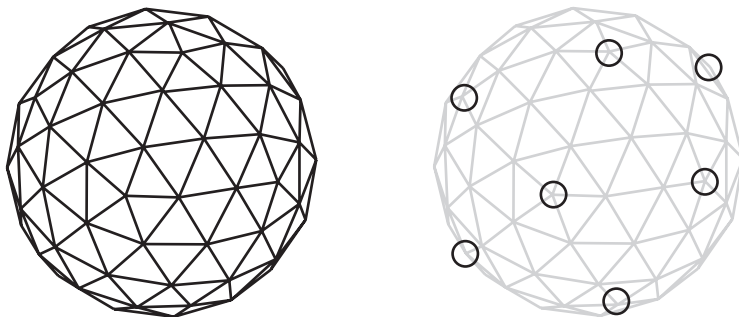


Рис. 8.4. Геодезический купол
с двенадцатью вершинами степени пять

Глава 9

Был ли Декарт первым?

И я надеюсь, что потомки будут благодарны мне не только за то, что я здесь разъяснил, но и за то, что мною было добровольно опущено, с целью предоставить им удовольствие самим найти это.

– Рене Декарт¹

В 1860 году, спустя больше ста лет после того, как Эйлер представил свое доказательство формулы для многогранников, появилось свидетельство того, что Рене Декарт, знаменитый философ, ученый и математик, знал об этом замечательном соотношении в 1630 году, более чем за сто лет до Эйлера. Это свидетельство обнаружилось в считавшейся давно утраченной рукописи. История поистине удивительная, как и спор о том, чье имя должна носить формула для многогранников.

Декарт родился в дворянской, хотя и небогатой, семье в 1596 году во французском городке Лаэ, недалеко от Тура. Его мать умерла через несколько дней после родов, а отца, хотя и оказывавшего поддержку своему «маленькому философу», большую часть детства Рене не было дома.

Юный Рене рос болезненным мальчиком, а в зрелости стал настоящим ипохондриком. Он посещал иезуитский колледж Ла Флэш, и один из его учителей разрешал ему оставаться по утрам в постели столько, сколько он захочет, хотя другие дети в это время были на занятиях. Декарт использовал это время для размышлений. Эту привычку он сохранил на всю жизнь, и многие его величайшие идеи вынашивались в спокойные и тихие утренние часы, проведенные в кровати.

Сквозной темой, пронизывавшей всю жизнь Декарта, было стремление к уединению. Как он сам писал, «я желаю лишь умиротворения и покоя»². Эта потребность не отвлекаться на пустяки нашла отражение в его многочисленных перемещениях места жительства и безбрачии – они никогда не был женат. Его службе в армии сопутствовали длительные периоды мира, что позволило ему отдаваться глубоким размышлениям. Декарт вовсе не был затворником, но всегда стремился остаться один и предаться научным

и философским занятиям. Это желание иллюстрируется его девизом: *bene vixit qui bene latuit* (хорошо жил тот, кто хорошо спрятался).



Рис. 9.1. Рене Декарт

В 1637 году Декарт опубликовал короткую книгу с длинным названием «Discours de la méthode pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences (Рассуждение о методе, чтобы хорошо направлять свой разум и отыскивать истину в науках)³, оказавшую огромное влияние. Публикация «Рассуждения о методе» положила начало современной философии. В этой книге, которая теперь считается литературной классикой, Декарт описал философию, основанную на сомнении и рационализме. Именно в ней встречается самая известная в философии фраза «*cogito ergo sum*» (мысль, следовательно, существую). Его философия стала одним из краеугольных камней научной революции.

В «Рассуждении о методе» было три приложения, самым важным и влиятельным из них оказалась «*La Géométrie*» (Геометрия) на ста страницах, появление которой часто называют рождением аналитической геометрии – предмета, настолько укорененного в современную математику, что последнюю трудно представить без нее. (Следует также отдать должное Ферма, современнику Декарта, за вклад в эту область.) Аналитическая геометрия – это сплав геометрии и алгебры. В ней вводится система координат, а положение точки описывается ее координатами (x , y). Эта система координат называется декартовой в честь Декарта. Ценность данного подхода заключается в том, что геометрические фигуры – прямые, окружности, кривые линии – можно представить алгебраическими уравнениями, что позволяет использовать алгебраические средства для решения геомет-

рических задач. Хотя в «Геометрии» аналитическая геометрия построена еще не полностью (например, Декарт нигде явно не создавал осей координат), многие ключевые идеи уже присутствуют.

В 1649 году, после многократных приглашений на протяжении трех лет, пятидесятитрехлетний Декарт согласился приехать к шведской королеве Кристине и давать ей уроки философии. Королева настояла, чтобы пятичасовые занятия, по три раза в неделю, начинались в пять утра и проходили в необычайно холодной комнате (та зима была самой холодной за шестьдесят лет).

Эти занятия ранним утром вынудили Декарта отказаться от давней привычки проводить утренние часы в постели. Тяжелые условия, вероятно, подкосили и без того хрупкое здоровье Декарта. 1 февраля 1650 года, спустя всего несколько месяцев после приезда в Швецию, он подхватил воспаление легких. Он отказался от услуг врача Кристины, предпочтя собственный рецепт – смесь вина и табака, благодаря которой он отхаркивал быстро скапливающуюся мокроту. Лечение оказалось неэффективным. Декарт умер 11 февраля 1650 года.

Его друг, посол Франции Гектор-Пьер Шаню, взял на себя труд доставить личные вещи Декарта в Париж, где они должны были храниться у зятя Шаню, Клода Клерселье. Но корабль потерпел крушение в Сене, и весь груз попал в реку. Все вещи Декарта, включая чемодан с многочисленными заметками и рукописями, уплыли. По счастью, через три дня чемодан был найден. Бумаги аккуратно разобрали и развесили сушиться, как белье в прачечной.

Став обладателем бумаг Декарта, Клерселье начал публиковать их. Он также предоставил документы в распоряжение ученых для исследования. Одним из математиков, заинтересовавшихся побывавшими в воде заметками Декарта, был Лейбниц. Во время одной из своих поездок в Париж Лейбниц снял копии некоторых заметок Декарта о многогранниках, датированных приблизительно 1630 годом. Эти важные заметки теперь называются «*De solidorum elementis*» (Об элементах геометрических тел).

Клерселье умер в 1684 году, через восемь лет после посещения Лейбница, не успев опубликовать часть рукописей, в т. ч. и «Об элементах геометрических тел». Оригинал больше никто не видел. Копия, принадлежавшая Лейбницу, пропала, и двести лет о ней не было ни слуху ни духу. Не будь на то воли провидения, мы никогда не узнали бы о прозорливой работе Декарта по многогранникам.

Фуше де Карейль, изучавший наследие Декарта в XIX веке, знал из писем Лейбница о том, что тот скопировал пропавшие впоследствии рукописи Декарта. В 1860 году он искал эти документы в хорошо организованном собрании трудов Лейбница в Ганноверской королевской библиотеке, но не нашел. Однако фортуна оказалась к нему благосклонна, и он обнаружил пыльную кипу неизвестных и некаталогизированных бумаг, принадле-

жащих Лейбницу, в каком-то позабытом шкафу. Именно в этой кипе де Карейль отыскал копию работы «Об элементах геометрических тел».

Как и все изучавшие многогранники до него, Декарт принял метрический подход. Во многих его формулах встречаются величины углов. Но, в отличие от своих предшественников, он, как и Эйлер сто лет спустя, подошел к многогранникам с комбинаторной точки зрения: он подсчитывал признаки многогранника и выводил алгебраические соотношения между ними. Если Эйлер считал вершины, ребра и грани и обнаружил формулу $V - E + F = 2$, то Декарт считал вершины (которые, как и Эйлер, называл телесными углами), грани и плоские углы.

В своих заметках Декарт привел много фактов, касающихся многогранников. Он не дал полных доказательств, но нетрудно видеть, как одни формулы логически вытекают из других. Первая важная теорема обобщала на многогранники хорошо известный для многоугольников результат: сумма внешних углов равна 360° . Мы подробно обсудим этот результат, который теперь называется формулой Декарта, в главе 20. Он также дал, вероятно, первое алгебраическое доказательство того, что платоновых тел всего пять.

Завершалась работа следующим равенством, связывающим количество граней, вершин и плоских углов (соответственно F , V и P):

$$P = 2F + 2V - 4.$$

Именно из-за этого открытия некоторые ученые считают, что формула Эйлера должна носить имя Декарта. Нужно просто заметить, что число плоских углов многогранника в два раза больше числа ребер (например, у куба 24 плоских угла и 12 ребер). Поэтому если имеется E ребер, то плоских углов будет $P = 2E$. Подстановка $2E$ вместо P дает $2E = 2F + 2V - 4$. Осталось поделить на два, изменить порядок членов – и мы получим знакомую формулу для многогранников.

Возникает вопрос: действительно ли Декарт открыл формулу Эйлера? Если да, то не должна ли она носить его имя? После обнаружения заметок Декарта вспыхнул спор, который не утихает и по сей день. Признанные математические авторитеты расходятся в этом вопросе. Даже сегодня встречаются книги, в которых решительно утверждается, что Декарт открыл – или, наоборот, не открыл – эту формулу раньше Эйлера. Разумеется, следует помнить о словах выдающегося философа Томаса Куна (1922–1996): «Тот факт, что он [вопрос о приоритете] поставлен, ... есть симптом какого-то искажения образа науки, которая отводит открытию такую фундаментальную роль»⁴.

Эрнест де Жонкьер (1820–1901), один из первых и самых пламенных защитников приоритета Декарта, предложил назвать теорему формулой Декарта–Эйлера. В 1890 г. он писал: «Невозможно отрицать, что он ее знал, поскольку она выводится так прямо и так просто, можно сказать интуитив-

но, из двух теорем, которые он только что сформулировал»⁵. Сторонники Жонкьера говорят, что формула с такой очевидностью вытекает из работы Декарта, что либо он знал об этом соотношении, либо был настолько близок к открытию теоремы, что она должна носить его имя. Они считают, что если бы Декарт подготовил рукопись к публикации, то сформулировал бы теорему в более привычном для нас виде. Кроме того, даже если Декарт не знал точной формулы, он доказал теорему, логически эквивалентную формуле Эйлера. Он и Эйлер просто выбрали разные признаки для подсчета. В наши дни формулу для многогранников не так уж редко называют формулой Декарта–Эйлера.

Удивительно, сколько споров связано с понятием ребра многогранника, которое, как мы уже говорили, было введено Эйлером. Для нас этот признак очевиден, но во времена Декарта у него не было названия. Для него ребро многогранника был просто стороной одной из многоугольных граней; ребра служили для образования углов – и только. Чтобы придать привычный вид формуле Эйлера, Декарту нужно было придумать понятие ребра.

Те, кто не признает за Декартом предвидения формулы Эйлера, говорят, что включение в нее ребер принципиально важно. Как мы уже отмечали, Эйлер осознавал, что истинный смысл теоремы состоит в том, что она связывает нульмерные объекты (вершины), одномерные объекты (ребра) и двумерные объекты (грани). Впоследствии обобщенная формула Эйлера стала важной теоремой в топологии. Топологи не остановились на двумерных гранях. В главах 22 и 23 мы увидим, что Пуанкаре и другие обобщили формулу Эйлера на объекты любой размерности.

Все согласны, что Декарт подошел очень близко, и все же он не сделал последний важный шаг. Плоские углы – не те объекты, которые должны стоять в одном ряду с гранями и вершинами. Для получения правильной формулировки необходимо было ввести понятие ребра. В ответ тем, кто заявляет, что Декарт наверняка знал о связи с ребрами, критики указывают, что даже самые талантливые математики могут не заметить очевидных следствий из собственной работы. После внимательного изучения рукописи математик Анри Лебег писал: «Декарт не сформулировал теорему; он ее не увидел»⁶.

Широко распространено ошибочное мнение, будто объекты в математике называются в честь своих первооткрывателей, а если это не так, значит, налицо чуть ли не плагиат или фальсификация истории. По такому стандарту Эйлера уязвляли неоднократно, потому что многие его открытия носят имена других людей (есть расхожая острота – «математические объекты называют в честь первого человека, открывшего их после Эйлера»). Нет числа примерам (даже в этой книге) математических объектов, названных не по имени первооткрывателя, а в честь кого-то, внесшего важный вклад в предмет, – быть может, того, кто первым осознал важность открытия. Кун

замечает, что, как в данном примере, не вполне понятно, кому принадлежит приоритет открытия. «Вот почему мы так охотно соглашаемся с тем, что процесс открытия, подобно зрению или осязанию, столь же определенно должен быть приписан отдельной личности и определенному моменту времени. Но открытие невозможно приурочить к определенному моменту; часто его нельзя и точно датировать... Открытие предполагает осознание и того, *что* произошло, и того, *каким образом* оно возникло»⁷. (Вспомните замечание Уотерхауса о том, что правильные тела ничем не выделялись, пока Теэтет не увидел то общее, что их связывает».)

Открыл ли Декарт формулу Эйлера раньше – спорный вопрос. Но поскольку работа Декарта не была опубликована и поскольку он не нашел «полезного» вида этой формулы, будет разумно и дальше называть соотношение $V - E + F = 2$ формулой Эйлера.

Глава 10

Лежандр расставляет все по местам

Главное для математиков – чтобы архитектура была правильной. Какой бы математикой я ни занимался, принципиально важно было найти правильную архитектуру. Это все равно, что строить мост. После того как основные черты архитектуры выбраны правильно, все детали укладываются как по волшебству. Вся проблема – в общей конструкции.

– Фримэн Дайсон¹

Второе опубликованное доказательство формулы Эйлера для многогранников и первое, отвечающее современным стандартам строгости, было дано Адриеном-Мари Лежандром. Лежандр стал первым французским математиком, который являлся одновременно членом Французской академии наук и Лондонского королевского общества. Он публиковал работы в нескольких областях, но наиболее важный вклад внес в теорию чисел и теорию эллиптических функций. Его наследие включает также чрезвычайно популярный учебник элементарной геометрии «*Éléments de Géométrie*» (Элементы геометрии), написанный в 1794 году. Во многих отношениях «Элементы» Лежандра заменили «Начала» Евклида, став основным учебником геометрии на следующие сто лет и задав образец для будущих учебников. Эта книга несколько раз переводилась на английский язык, а один американский перевод выдержал тридцать три издания.

Лежандр включил формулу Эйлера для многогранников в «Элементы геометрии», а благодаря популярности книги она получила широкую известность. Лежандр не стал исправлять доказательство Эйлера, а предло-



Рис. 10.1. Адриен-Мари Лежандр

жил новое – существенно отличающееся. В своем изобретательном рассуждении Лежандр воспользовался понятиями сферической геометрии и такими метрическими свойствами, как величины углов и площади. Успех выглядит особенно неожиданным в свете того, что в самой формулировке теоремы этих понятий нет.

Ключ к доказательству Лежандра – элегантная формула из сферической геометрии, которая выражает площадь треугольника на поверхности сферы через три его внутренних угла. На сфере треугольники и другие многоугольные фигуры образованы не прямыми линиями, а дугами больших окружностей. *Большой окружностью* называется любая окружность на сфере, радиус которой равен радиусу сферы, или, эквивалентно, любая окружность максимально возможного радиуса. Примерами больших окружностей являются экватор и меридианы. Параллели, отличные от экватора, например тропик Рака, тропик Козерога, Полярный круг, не являются большими окружностями. Большие окружности – не прямые, но настолько близки к прямым, насколько это возможно на сфере. Они обладают важным свойством – дают путь минимальной длины. То есть кратчайшим путем между двумя точками на сфере является дуга проходящей через них большой окружности. Если оставить в стороне физические условия, в частности ветер и вращение Земли, то кратчайший маршрут самолета из Пенсильвании в Индию должен был бы пролетать по дуге большой окружности, проходящей через Исландию.

На практике для нахождения больших окружностей на малой сфере можно использовать ленту (рис. 10.2). Возьмите ленту, например такую, которой перевязывают подарочные коробки, и положите ее на сферу. Оберните ленту вокруг сферы, так чтобы она лежала плоско и не морщила по бокам. Тогда лента покажет, где находится большая окружность.

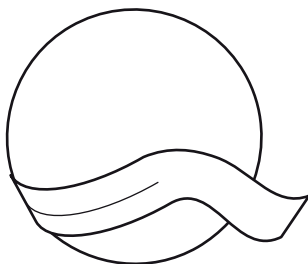


Рис. 10.2. Чтобы найти большую окружность, нужно обмотать сферу лентой

Определим сферический треугольник как область, ограниченную тремя большими окружностями (см. рис. 10.3). Математики называют большую окружность геодезической, поэтому точнее было бы называть сфериче-

ский треугольник *геодезическим треугольником*. Мы требуем, вслед за Лежандром, чтобы каждая сторона геодезического треугольника была меньше половины длины окружности сферы.

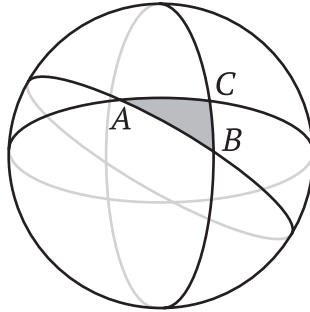


Рис. 10.3. Треугольник, образованный тремя большими окружностями

Геодезические треугольники впервые были введены греческим математиком Менелаем Александрийским (ок. 98 года) в книге «Sphaerica» (Сферика). В ней Менелай построил теорию сферической геометрии по аналогии с евклидовой теорией геометрии на плоскости, изложенной в «Началах». Он показал, что многие теоремы, справедливые для плоских треугольников, верны и для геодезических треугольников. Например, сумма длин двух сторон сферического треугольника больше длины третьей стороны. Он также доказал интересный результат, имеющий место на сфере, но не на плоскости: два подобных геодезических треугольника (т. е. с соответственно равными углами) обязательно конгруэнтны. С другой стороны, одна из самых известных теорем геометрии на плоскости – сумма внутренних углов треугольника равна 180° , или π , – для сферы неверна¹. На сфере сумма внутренних углов всегда больше π . Например, большой геодезический треугольник на рис. 10.4 имеет три прямых угла, их сумма равна $3\pi/2$. В меньших геодезических треугольниках кривизна сферы сказывается не так сильно, поэтому сумма углов меньше, но все равно превышает π .

Почти полторы тысячи лет никто не пытался уточнить утверждение Менелая о сумме внутренних углов. И лишь в XVII веке сразу два человека, Томас Хэрриот (ок. 1560–1621) и Альбер Жирар (1595–1632), количественно выразили сферический избыток суммы углов.

¹ В повседневной жизни мы измеряем углы в градусах – прямой угол равен 90° , в окружности 360° и т. д. Но в большинстве приложений математики углы измеряются в радианах. Преобразовать одно в другое просто: 180° соответствует π радианам. Поэтому прямой угол равен $\pi/2$ радиан, а полный оборот составляет 2π . Конкретные примеры, показывающие, почему радианы удобнее градусов, мы приведем ниже.

На рис. 10.4 мы видим, что существует прямая связь между площадью треугольника и суммой внутренних углов. Чем больше размер треугольника, тем сильнее искажение вследствие кривизны, поэтому сумма углов возрастает.

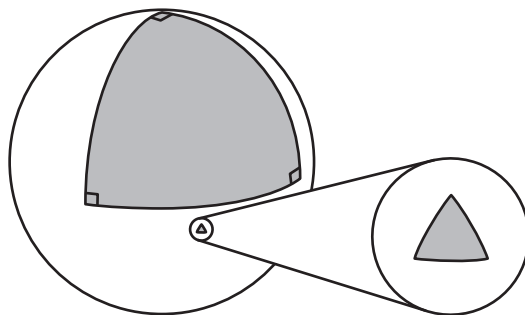


Рис. 10.4. Геодезические треугольники на сфере

Теорема Хэрриота и Жирара дает формулу, связывающую три величины: сумму внутренних углов геодезического треугольника, площадь треугольника и радиус содержащей его сферы. Для простоты мы приведем формулу для треугольников на *единичной сфере* радиуса 1 (формула для сферы произвольного радиуса получается путем соответственного масштабирования величин).

Теорема Хэрриота–Жирара

Площадь геодезического треугольника на единичной сфере с внутренними углами a, b, c равна $a + b + c - \pi$. Иными словами, площадь = (сумма углов) $- \pi$.

Поскольку сумма внутренних углов плоского треугольника равна π , мы можем записать эту формулу по-другому:

площадь = (сумма углов) $-$ (сумма углов плоского треугольника).

Таким образом, площадь сферического треугольника – это как раз та величина, на которую сумма его углов превышает сумму углов плоского треугольника. Как мы увидим, эта примечательная формула обобщается на сферические многоугольники с числом сторон больше трех. Кстати, это первый конкретный пример, показывающий, почему углы удобнее измерять в радианах; формула перестает быть верной, если углы измерены в градусах.

Для разогрева убедимся, что эта теорема верна для большого геодезического треугольника на рис. 10.4 (в предположении, что сфера единичная).

Мы можем покрыть всю сферу восемью такими треугольниками – четыре в северной полусфере и четыре в южной. Поэтому площадь треугольника равна одной восьмой площади сферы. Поскольку площадь сферы радиуса r равна $4\pi r^2$, то площадь единичной сферы ($r = 1$) равна 4π . Следовательно, площадь треугольника равна одной восьмой от 4π , или $\pi/2$.

Легко проверить, что теорема Хэрриота–Жирара дает тот же результат. Сумма трех внутренних углов этого треугольника равна $3\pi/2$. Поэтому, согласно теореме, площадь треугольника равна $(3\pi/2) - \pi = \pi/2$, что совпадает с предыдущим вычислением.

Это соотношение было независимо открыто Хэрриотом и Жираром. Британский ученый Томас Хэрриот – личность загадочная. Он был талантливый и активным исследователем, но никогда не публиковал своих работ. После его смерти осталось десять тысяч страниц неопубликованных рукописей, диаграмм, измерений и вычислений. Один биограф писал, что отвращение Хэрриота к публикации «во многом можно объяснить неблагоприятными внешними условиями, проволочками и нежеланием публиковать трактат, если, как он думал, его еще можно улучшить»². Многие его статьи были напечатаны посмертно. Больше всего он известен работами по алгебре, но занимался также оптикой, астрономией, химией и лингвистикой. Хэрриот, подобно Лейбницу и Эйлеру, снискал репутацию автора новой и элегантной математической нотации. К сожалению, из-за трудностей типографского набора нестандартных символов не все его идеи представлены в печатном виде и потому не получили широкого признания. Но два символа дошли до наших дней: $<$ (меньше) и $>$ (больше). Очень мало известно о личной жизни Хэрриота. В 1585 г. сэр Уолтер Рэйли отправил его в годичное путешествие в Новый Свет в качестве землемера и картографа. Так что, по-видимому, он был первым профессиональным математиком, ступившим на землю Северной Америки.

Французский математик Альбер Жирар обосновался в Голландии, скорее всего, потому что, будучи протестантом, не мог жить в отчем доме во французской Лотарингии. Сегодня он известен своими работами по алгебре и тригонометрии. Он первым стал использовать сокращения \sin , \tan и \sec для тригонометрических функций синус, тангенс и секанс, а также символ $\sqrt[3]{}$ для обозначения кубического корня. Также Жирар первым из математиков придал геометрический смысл отрицательным числам. Он писал: «Отрицательное решение в геометрии объясняется движением в обратном направлении, а знак минус означает возврат назад, тогда как $+$ – продвижение вперед»³.

Исторически с формулой площади сферических треугольников связывается имя Жирара, а не Хэрриота. Это и понятно, потому что первым в печати появилось доказательство Жирара, опубликованное в 1629 году⁴. Жирар известен своим лаконичным стилем, в его доказательствах часто отсутствуют детали. Даже самому Жирару это доказательство казалось не-

удовлетворительным – он назвал результат «вероятным заключением»⁵. Двадцатью шестью годами раньше эту же теорему доказал Хэрриот, о чем Жирар не знал. Разумеется, как мы уже сказали, Хэрриот не опубликовал ни этот, ни какой-либо другой свой результат. Но и в секрете он его не держал. Его доказательство было известно современникам; британский математик Генри Бриггс (1561–1630) сообщил Кеплеру о результате Хэрриота и включил его в список великих открытий своего времени. Но нет никаких свидетельств того, что Жирару было известно о доказательстве Хэрриота.

Поскольку Хэрриот первым доказал теорему, а Жирар первым опубликовал ее, теперь этот результат называется теоремой Хэрриота–Жирара. Стоит отметить, что доказательство Хэрриота гораздо проще и элегантнее доказательства Жирара. Приведенное ниже рассуждение принадлежит Лезандру, но оно очень похоже на доказательство Хэрриота.

В доказательстве Жирара остроумно используется объект, называемый *двуугольником* (по аналогии с треугольником). Это область, ограниченная двумя большими окружностями (рис. 10.5). Две большие окружности всегда пересекаются в двух диаметрально противоположных точках сферы. Если две окружности пересекаются под углом a с одной стороны, то и с другой стороны они тоже пересекаются под углом a . Если угол a измерен в радианах, то площадь двуугольника (на единичной сфере) равна $2a$. Этот факт легко выводится из простой пропорции: площадь двуугольника относится к полной площади сферы, как угол a к 2π (что видно по рис. 10.6). Поэтому имеем

$$\frac{\text{Площадь двуугольника}}{4\pi} = \frac{a}{2\pi}.$$

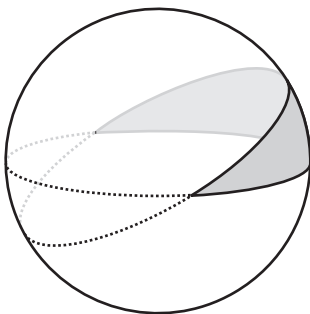


Рис. 10.5. Двуугольник на сфере

Теперь рассмотрим на единичной сфере геодезический треугольник ABC с внутренними углами a , b и c . Этот треугольник содержится в некоторой полусфере. Продолжим стороны ABC до пересечения с границей полусферы. Обозначим (см. рис. 10.7) D , E , F , G , H , I точки, в которых эти окружности пересекаются с краем полусферы.

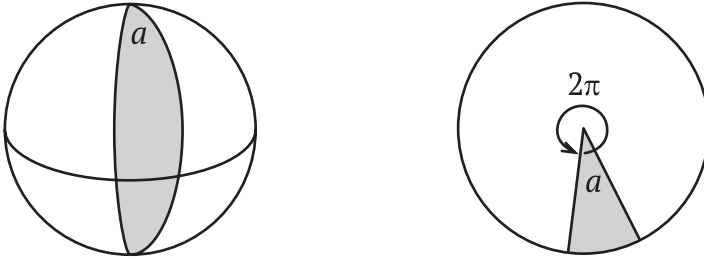


Рис. 10.6. Сферический двуугольник (слева) и вид сверху (справа)

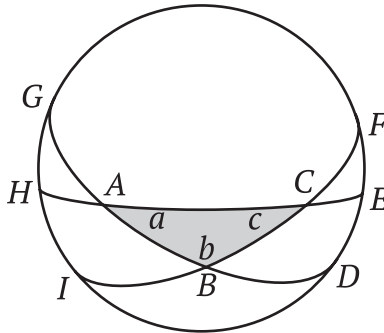


Рис. 10.7. Большие окружности на полусфере

В силу симметрии сферы сумма площадей областей ADE и AGH равна площади двуугольника с углом a . Иными словами, если вырезать треугольник AGH и склеить край GH с краем ED , то получится двуугольник с углом a . Из этого наблюдения мы заключаем, что

$$\begin{aligned} \text{площадь}(ADE) + \text{площадь}(AGH) = \\ \text{площадь двуугольника} = 2a. \end{aligned}$$

Аналогично общая площадь треугольников BFG и BDI равна площади двуугольника с углом b , а треугольников CHI и CEF – площади двуугольника с углом c . Следовательно, имеем

$$\text{площадь}(BFG) + \text{площадь}(BDI) = 2b$$

и

$$\text{площадь}(CHI) + \text{площадь}(CEF) = 2c.$$

Складывая оба равенства, получаем

$$\begin{aligned} & [\text{площадь}(ADE) + \text{площадь}(AGH)] + \\ & [\text{площадь}(BFG) + \text{площадь}(BDI)] + \\ & [\text{площадь}(CHI) + \text{площадь}(CEF)] = 2a + 2b + 2c. \end{aligned}$$

Внимательно взглянув на левую часть этого выражения, мы увидим, что площадь каждой области полусферы входит в сумму по одному разу, за исключением площади треугольника ABC , которая учтена трижды. Таким образом, имеем

$$\text{площадь(полусферы)} + 2 \cdot \text{площадь}(ABC) = 2a + 2b + 2c.$$

Поскольку площадь полусферы равна 2π , получаем

$$2\pi + 2 \cdot \text{площадь}(ABC) = 2a + 2b + 2c.$$

Изменив порядок членов и поделив на 2, приходим к окончательному выводу:

$$\text{площадь}(ABC) = a + b + c - \pi,$$

что и требовалось доказать.

В доказательстве формулы Эйлера, найденном Лежандром, нам понадобится следующее обобщение теоремы Хэрриота–Жирана на геодезические многоугольники с числом сторон больше 3.

Теорема Хэрриота–Жирана для многоугольников

Площадь геодезического n -угольника на единичной сфере с внутренними углами a_1, a_2, \dots, a_n равна $a_1 + a_2 + \dots + a_n - n\pi + 2\pi$, или, эквивалентно, площадь = (сумма углов) $- n\pi + 2\pi$.

Сумма внутренних углов любого плоского n -угольника равна $(n - 2)\pi$. (Мы более пристально рассмотрим эту теорему и ее обобщения в главе 20.) Поэтому, как и в случае треугольников, площадь геодезического многоугольника просто равна величине, на которую сумма его углов превышает сумму углов плоского многоугольника с таким же числом сторон. То есть

$$\text{площадь} = (\text{сумма углов}) - (\text{сумма углов плоского } n\text{-угольника}).$$

Чтобы понять, почему эта теорема верна, разобьем многоугольник на геодезические треугольники, проведя диагонали. При таком разбиении получается $n - 2$ треугольника (рис. 10.8). Сумма площадей этих треугольников равна площади многоугольника, а сумма их углов равна сумме углов многоугольника. Применив теорему Хэрриота–Жирана ко всем $n - 2$ треугольникам и просуммировав левые и правые части, находим площадь многоугольника:

$$\text{площадь} = a_1 + \dots + a_n - (n - 2)\pi = a_1 + \dots + a_n - n\pi + 2\pi.$$

Запомнить эту формулу просто. Изобразим многоугольник, как показано на рис. 10.9. Рядом с каждым углом напишем его величину, рядом с каждым ребром $-\pi$, а в центре 2π . Площадь многоугольника равна сумме

этих величин. Это наглядное представление окажется полезным для понимания доказательства Лежандра.

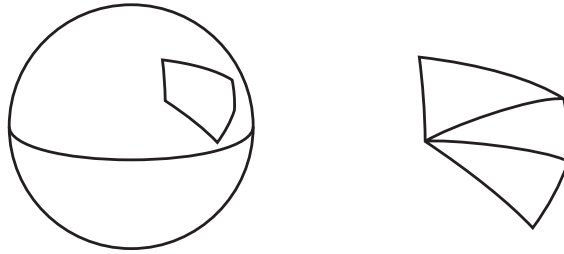


Рис. 10.8. Сферический многоугольник, разбитый на треугольники

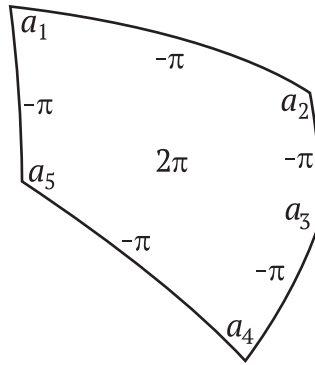


Рис. 10.9. Площадь сферического многоугольника равна сумме величин на рисунке

Вот теперь, наконец, мы готовы привести рассуждение Лежандра. Начнем с выпуклого многогранника, имеющего V вершин, E ребер и F граней. Пусть x – произвольная точка внутри него. Как показано на рис. 10.10, построим сферу с центром в x , внутри которой целиком заключен многогранник. Поскольку конкретные единицы измерения не имеют значения, мы можем выбрать их так, что радиус сферы будет равен единице. Спроецируем многогранник на сферу, проведя лучи, исходящие из точки x . Чтобы наглядно представить себе эту проекцию, можно рассмотреть проволочную модель многогранника и поместить в x лампочку. Тогда проекцией будет тень проволочного каркаса на поверхности объемлющей сферы. Мы не станем доказывать этот факт, а просто отметим, что в этом случае грани многогранника отображаются в геодезические многоугольники.

В своем доказательстве Лежандр использовал стандартный математический прием. Он вычислил одну и ту же величину – в данном случае

площадь единичной сферы – двумя разными способами, установив тем самым некое равенство. Сначала он воспользовался хорошо известным фактом – площадь единичной сферы равна 4π . А затем он сложил площади всех граней на сфере, которые в сумме, естественно, составляют полную площадь поверхности.

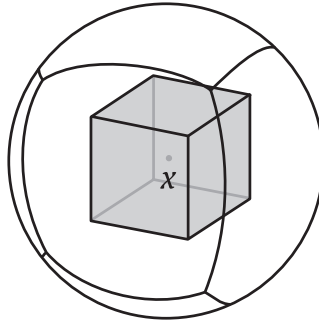


Рис. 10.10. Проекция многогранника на сферу

По теореме Хэрриота–Жирара, площадь каждой n -угольной грани равна сумме внутренних углов минус $\pi n - 2\pi$. Вместо того чтобы работать с этой формулой непосредственно, мы воспользуемся наглядным представлением на рис. 10.9. Пометим все углы, ребра и грани на сфере – рядом с каждым углом поместим его величину, рядом с каждым ребром $-\pi$, а в центре каждой грани 2π . В результате получится картина, изображенная на рис. 10.11. Чтобы вычислить площадь сферы, просуммируем величины всех меток.

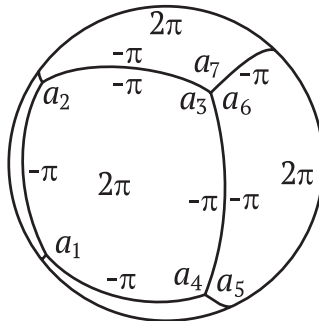


Рис. 10.11. Проекция с метками

Хотя сумма углов при любой вершине многогранника меньше 2π , после проецирования на гладкую поверхность сферы эти углы в сумме дают 2π . Поскольку всего вершин V , они вносят в сумму вклад $2\pi V$. Каждое ребро

вносит вклад -2π : $-\pi$ с одной стороны и $-\pi$ с другой. Поскольку всего ребер E , их общий вклад составляет $-2\pi E$. В середине каждой грани находится метка 2π . Поскольку всего граней F , они приносят в сумму величину $2\pi F$. Складывая все вместе, находим, что полная площадь сферы равна

$$4\pi = 2\pi V - 2\pi E + 2\pi F.$$

Поделив на 2π , получаем формулу Эйлера:

$$2 = V - E + F.$$

Сразу видно, что доказательства Эйлера и Лежандра совершенно разные. С одной стороны, кажется, что доказательство Эйлера «правильное» или, по крайней мере, соответствует духу теоремы. Теорема комбинаторная, и Эйлер дал комбинаторное доказательство. Эйлер напрямую использовал связь между вершинами, ребрами и гранями. При удалении вершины для компенсации добавляются или удаляются грани и ребра, так что знакопеременная сумма не изменяется.

С другой стороны, Лежандр для доказательства теоремы ввел понятия, на первый взгляд совершенно с ней не связанные: сферы, углы и площадь. Его подход совершенно законный и весьма остроумный, но из него не видно, *почему* теорема справедлива, – по крайней мере, не сразу. Тем не менее доказательство Лежандра – первый намек на то, что это нечто большее, чем просто комбинаторная теорема. Тот факт, что мы *можем* доказать теорему, используя метрическую геометрию, наводит на мысль о важной связи между формулой Эйлера и геометрией. Мы вернемся к этой теме в главах 20 и 21.

И последнее замечание о доказательстве Лежандра. В подходе Эйлера мы осторожно (осторожнее, чем сам Эйлер) применяли формулу только к выпуклым многогранникам. Как и Эйлер, Лежандр предполагал, что многогранники выпуклые. Но в приложении к статье 1809 года Луи Пуансо (1777–1859) заметил, что доказательство Лежандра применимо к несколько более широкому классу тел – *звездным* многогранникам⁶.

Первым шагом в доказательстве Лежандра было проецирование многогранника на сферу. Для этого нам нужна внутренняя точка x , являющаяся центром проекции. Эта точка должна обладать тем свойством, что из нее «видна» любая точка многогранника. Для выпуклого многогранника мы можем выбрать любую внутреннюю точку. В большинстве же невыпуклых многогранников такой точки нет, а те, в которых она есть, называются звездными (или звездчатыми). Многогранник Кеплера, показанный на рис. 6.6, – пример звездного многогранника, как и те, что показаны на рис. 10.12. В каждом из них существует внутренняя точка, из которой «видно все» и которая, следовательно, может быть выбрана в качестве центра проекции. Пуансо объяснил это следующим образом:

[Формула Эйлера] остается верной для любого многогранника с входящими телесными углами, при условии что внутри тела можно найти точку, являющуюся центром сферы такой, что когда на нее проецируются грани

тела с помощью прямых, исходящих из центра, то их проекции на сфере не пересекаются; я хочу сказать, что никакая грань, полностью или частично, не проецируется на проекцию другой грани. Как легко видеть, это условие применимо к бесконечному числу многогранников с входящими телесными углами. Истинность этого утверждения легко устанавливается из самого доказательства г-на Лежандра, в которое не нужно вносить никаких изменений⁷.

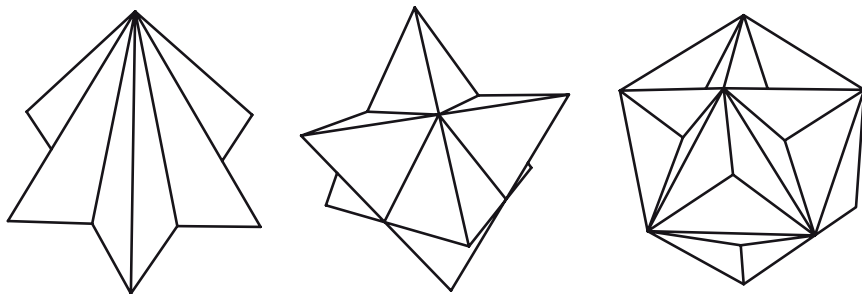


Рис. 10.12. Звездные многогранники



Рис. 10.13. Луи Пуансо

Благодаря Лежандру к концу XIX века под формулу Эйлера было подведено прочное основание для всех выпуклых многогранников, а его популярный учебник раскрыл красоту этой формулы широкой аудитории. В последующие годы Пуансо и другие авторитетные математики были заморожены этим элегантным соотношением. Они искали новые доказательства и дальнейшие обобщения. Чтобы понять некоторые из этих обобщений, нам предстоит познакомиться с теорией графов. Истоки этой дисциплины восходят – неудивительно – к Эйлеру и математической головоломке о мостах города Кёнигсберга.

Глава 11

Прогулка по Кёнигсбергу

Что толку возвращаться по старым следам? Аспид обитает на тропе,
которую вы протоптали собственными ногами. Нужно прокладывать
пути в Неведомое.

– Генри Дэвид Торо¹

Чтобы поместить формулу Эйлера в современный контекст, нам придется обсудить раздел математики, называемый *теорией графов*. Речь идет не о графиках функций, с которыми мы знакомились в школе на уроках алгебры и основ математического анализа ($y = tx + b$ – прямая, $y = x^2$ – парабола и т. д.), а об изучении объектов – графов, – показанных на рис. 11.1. Они состоят из точек, называемых *вершинами*, и соединяющих эти точки линий, называемых *ребрами*¹.

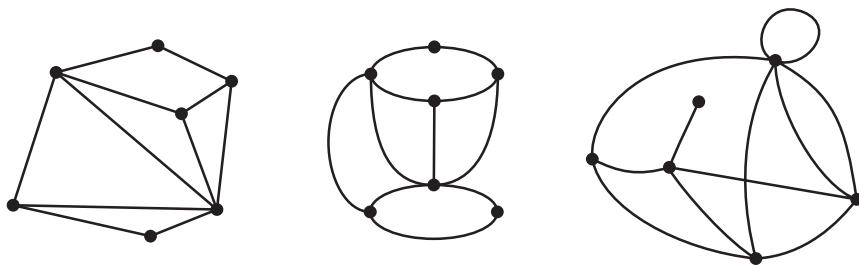


Рис. 11.1. Графы

В 1736-м, во время своего первого пребывания в Санкт-Петербурге, Эйлер занялся знаменитой задачей о семи кёнигсбергских мостах. Его вклад в решение этой задачи часто называют рождением теории графов и топологии.

¹ Иногда графы называют *сетями*, а вершины и ребра – соответственно *узлами* и *связями*.

Город Кёнигсберг был основан тевтонскими рыцарями в 1254 году. В то время он находился в Пруссии, недалеко от Балтийского моря, в развилке реки Прегель. Впоследствии он стал столицей Восточной Пруссии. Город, сильно пострадавший от бомбежек союзников во время Второй мировой войны, был передан Советскому Союзу по условиям Потсдамской конференции. После того как Кёнигсберг стал частью Советского государства, там произошло много изменений – большая часть коренных немецких жителей была выселена, город был переименован в Калининград, а река получила название Преголя. Сегодня Калининград – часть России и столица Калининградской области. Особенность Калининградской области состоит в том, что она не связана с остальной Россией, а окружена Польшей, Литвой и Балтийским морем. В отличие от таких городов, как Сталинград и Ленинград, Калининграду не было возвращено его прежнее название. Самым знаменитым жителем Кёнигсберга был философ XVIII века Иммануил Кант (1724–1804). Из Кёнигсберга также родом Христиан Гольдбах – математик, которому Эйлер сообщил об открытии формулы для многогранников.

Город расположен в развилке реки, а посередине реки, близ развилки, находится остров Кнайпхоф. Во времена Эйлера реку пересекало семь мостов, соединяющих берега и остров (рис. 11.2). Говорят, что жители Кёнигсберга на досуге гуляли по городу и развлекались, пытаясь пройти по каждому мосту ровно один раз. Но никому не удавалось найти такой маршрут. Вот из этого времяпрепровождения и возникла задача о кёнигсбергских мостах:

Может ли пешеход обойти все семь мостов, не проходя ни по какому дважды?

Неизвестно, как Эйлер узнал об этой задаче. Быть может, он услышал о ней от своего друга Карла Элера, мэра прусского города Данцига, который переписывался с Эйлером от имени местного профессора математики. У нас имеются письма Эйлера и Элера за период с 1735 по 1742 год, и в некоторых из них обсуждается задача о кёнигсбергских мостах. Мы знаем, что сначала Эйлер ей не заинтересовался. В 1736 г. в письме к Элеру Эйлер пишет:

Следовательно, Ты можешь убедиться, славнейший муж, что это решение по своему характеру, по-видимому, имеет мало отношения к математике, и мне не понятно, почему следует скорее от математика ожидать этого решения, нежели от какого-нибудь другого человека, ибо это решение подкрепляется одним только рассуждением, и нет необходимости привлекать для нахождения этого решения какие-либо законы, свойственные математике².

Но в конце концов Эйлер уделил этой задаче некоторое время. Та самая особенность, которая сначала оттолкнула его, затем пробудила интерес: задача действительно не укладывалась ни в какую из существующих математических дисциплин. Он понял, что хотя задача казалась геометрической, точные расстояния в ней не играли роли. Нужна была только информация о взаимном расположении.

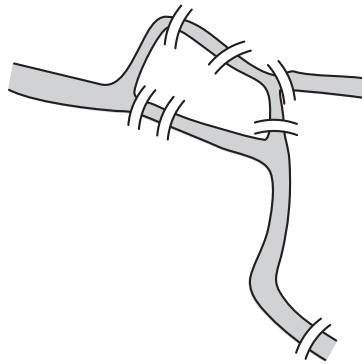
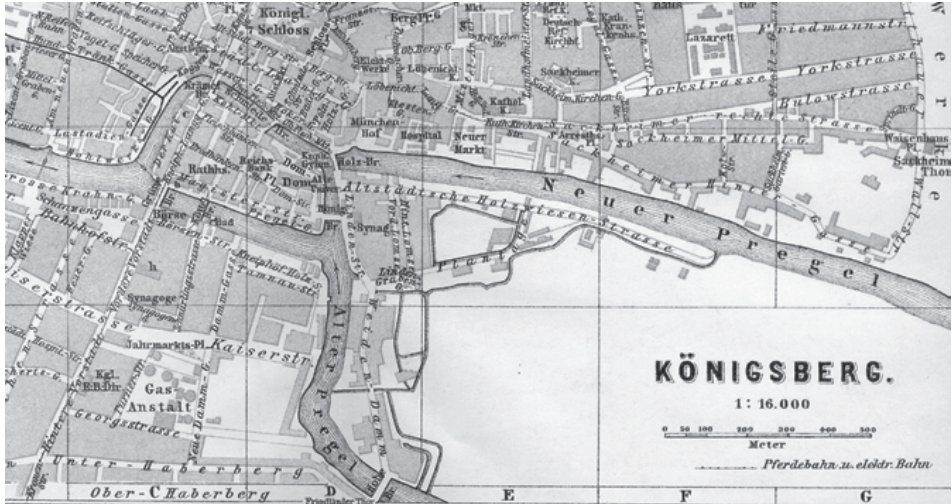


Рис. 11.2. Семь кёнигсбергских мостов

В другом письме, датированном 1736 годом, к итальянскому математику Джованни Маринони (1670–1755) Эйлер писал:

Вопрос этот, хотя и банальный, показался мне, однако, достойным внимания тем, что для его решения недостаточны ни геометрия, ни алгебра, ни комбинаторное искусство. Поэтому мне пришла в голову мысль, не относится ли она случайно к геометрии положения, которую в свое время исследовал Лейбниц³.

В этом письме Эйлер употребил предложенный Лейбницем термин *geometriam situs*, или «геометрия положения». Позже он превратился в *analysis situs* (анализ положения) и, наконец, в топологию. Лейбниц имел в виду новый раздел математики, в котором «изучалось положение, как алгебра изучает величины»⁴. Среди ученых нет согласия по вопросу о том, правильно ли Эйлер понял, что разумел Лейбниц под этим термином; тем

не менее Эйлер был согласен с Лейбницем, что для изучения этой ситуации необходим новый математический подход.

В 1736 году Эйлер представил Санкт-Петербургской академии статью «Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis» («Решение задачи, относящейся к геометрии положения»)⁵, опубликованную в 1741 году. В ней он решил задачу о кёнигсбергских мостах и в свойственной ему манере обобщил решение на любое расположение мостов.

Эйлер понял, что в этой задаче важны только относительные положения частей суши и соединяющих их мостов. На рисунке эту ситуацию можно показать просто и элегантно. Поместим вершину в каждую часть суши (по одной на трех берегах и еще одну на острове) и проведем между каждой парой вершин столько ребер, сколько имеется мостов, соединяющих соответствующие части суши. Результирующий граф показан на рис. 11.3.

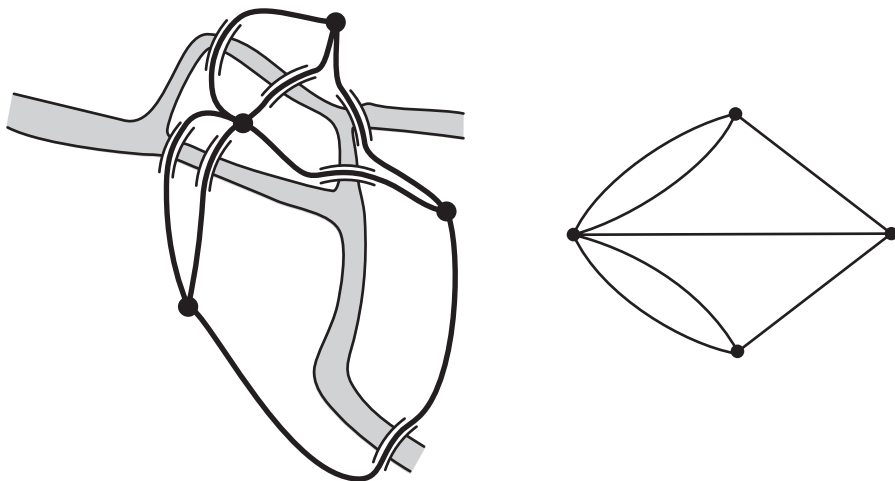


Рис. 11.3. Граф, ассоциированный с задачей о кёнигсбергских мостах

Таким образом, задача свелась к задаче о графе – можно ли начертить этот граф, не отрывая карандаша от бумаги и не проходя дважды по одному и тому же ребру? Глядя на пример, мы можем сформулировать более общий вопрос: как узнать, можно ли начертить заданный граф таким образом?

Часто думают, что граф кёнигсбергских мостов, показанный на рис. 11.3, приведен в статье Эйлера. Это ошибка – там нет ни кёнигсбергского, ни какого другого графа. Принципы вычерчивания графов развивались независимо от задачи о кёнигсбергских мостах. Головоломки на эту тему появились в начале XIX века как в математических статьях, так и в книгах по развлекательной математике. И лишь в 1892 году У. У. Роуз Болл (1850–

1925) в своей популярной книге «Математические задачи и развлечения»⁶ установил связь между результатом Эйлера о кёнигсбергских мостах и вычерчиванием графов. Впервые кёнигсбергский граф появился в книге Болла спустя сто пятьдесят с лишним лет после публикации статьи Эйлера.

Также статью Эйлера часто называют зарождением теории графов. Это утверждение не лишено оснований. Хотя Эйлер не чертил графов в своей статье, его абстрактный подход к проблеме напоминает рассуждения, свойственные теории графов. Его применение новой дисциплины – *geometriam situs*, или топологии, – к задаче и осознание новизны этого метода свидетельствуют об основании нового раздела математики.

Для обсуждения решения нам понадобится несколько определений. Как и в случае многогранников, будем называть *степенью* вершины количество исходящих из нее ребер. Если в вершине есть *петля* (ребро, начинающееся и заканчивающееся в ней, как в правом графе на рис. 11.1), то она увеличивает степень на 2. В графе, образованном кёнигсбергскими мостами, имеется три вершины степени 3 и одна вершина степени 5. Граф называется *связным*, если из любой вершины можно дойти до любой другой, следуя по ребрам.

Вычерчивание графа, начинающееся в одной вершине и заканчивающееся в другой, называется *обходом*. Нас интересует весьма специальный класс обходов – такие, при которых каждое ребро посещается ровно один раз; они называются *эйлеровыми обходами*. Если эйлеров обход начинается и заканчивается в одной и той же вершине, то она называется *эйлеровым циклом*. В общем случае *циклом* называется обход графа, который начинается и заканчивается в одной и той же вершине и не проходит по одному ребру дважды. Произвольный (не эйлеров) цикл может не проходить по каждому ребру.

На языке теории графов мы можем переформулировать задачу о кёнигсбергских мостах следующим образом:

Существует ли для графа кёнигсбергских мостов (рис. 11.3) эйлеров обход? Вообще, как узнать, существует ли для произвольного графа эйлеров обход?

Эйлер решил обе эти задачи. В переводе на современный язык решение описывается следующим образом.

Для графа существует эйлеров обход тогда и только тогда, когда граф связный и в нем имеется ноль или две вершины нечетной степени. Если имеется две вершины нечетной степени, то обход должен начинаться в одной из них, иначе он может начинаться в любой вершине.

С помощью этого критерия задача о кёнигсбергских мостах легко решается. Поскольку в графе четыре вершины нечетной степени, то эйлерова обхода не существует! Неудивительно разочарование жителей Кёнигсбер-

га, которые никак не могли отыскать маршрута для идеальной вечерней прогулки.

Но почему решение Эйлера правильно? Требование связности графа очевидно. А вот требование о существовании нуля или двух вершин нечетной степени нуждается в осмыслении. Для доказательства теоремы нужно сделать две вещи. Во-первых, мы должны показать, что в любом графе, допускающем эйлеров обход, существует ноль или две вершины нечетной степени. Во-вторых, мы должны доказать обратное: если в связном графе имеется ноль или две вершины нечетной степени, то он допускает эйлеров обход.

Предположим, что имеется граф, допускающий эйлеров обход; мы покажем, что в нем имеется ноль или две вершины нечетной степени. Положим лист кальки поверх графа и начнем вычерчивать эйлеров обход. В начале вычерчивания первая вершина будет иметь степень 1, а остальные – степень 0. После того как мы дойдем до второй вершины и оставим ее позади, она будет иметь степень 2. Начиная с этого момента, каждый проход через вершину увеличивает ее степень на два. Это продолжается, пока мы не дойдем до конца обхода. В этот момент мы увеличиваем степень последней вершины на единицу. Если обход начинается и заканчивается в разных вершинах, то обе они будут иметь нечетную степень, и это будут единственные вершины нечетной степени. Если же обход начинается и заканчивается в одной и той же вершине, то она, как и все остальные вершины, будет иметь четную степень.

Обратное утверждение Эйлер принял как само собой разумеющееся: если в графе имеется ноль или две вершины нечетной степени, то он допускает эйлеров обход. Первое доказательство этого факта было дано Карлом Хирхольцером (1840–1871) и опубликовано после его смерти, в 1873 году⁷.

Начнем со связного графа, имеющего ноль или две вершины нечетной степени. Если таких вершин две, то поместим карандаш в одну из них, в противном случае – в произвольную вершину. Начнем вычерчивание в любом направлении. Дойдя до первой вершины, выберем случайным образом следующее ребро. Будем продолжать таким образом – делать случайный выбор в каждой вершине (конечно, избегая уже посещенных ребер), пока дальнейшее движение не станет невозможным. В силу приведенного выше рассуждения, если мы начинали с вершины нечетной степени, то закончим вычерчивание в другой вершине нечетной степени, иначе вычерчивание завершится в той вершине, с которой начинали. На рис. 11.4 путь *abcdefghi* определяет такой обход.

Если этот путь не проходит по всем ребрам графа, то удалим все посещенные ребра и посмотрим на оставшийся граф (возможно, он уже не связный). Поместим карандаш в какую-нибудь вершину, которая посещалась при первоначальном вычерчивании. Как и раньше, будем вычерчивать граф, пока не окажется, что дальше двигаться невозможно. В нашем

примере получится обход jkl . Теперь вставим новую трассу вычерчивания в нужное место построенного ранее обхода. В нашем примере путь jkl вставляется между ребрами b и c первоначального обхода. Таким образом, мы получили путь $abjklcdefghi$, являющийся эйлеровым обходом. В общем случае, возможно, придется проделать такую вставку несколько раз, пока не будут вычерчены все ребра.

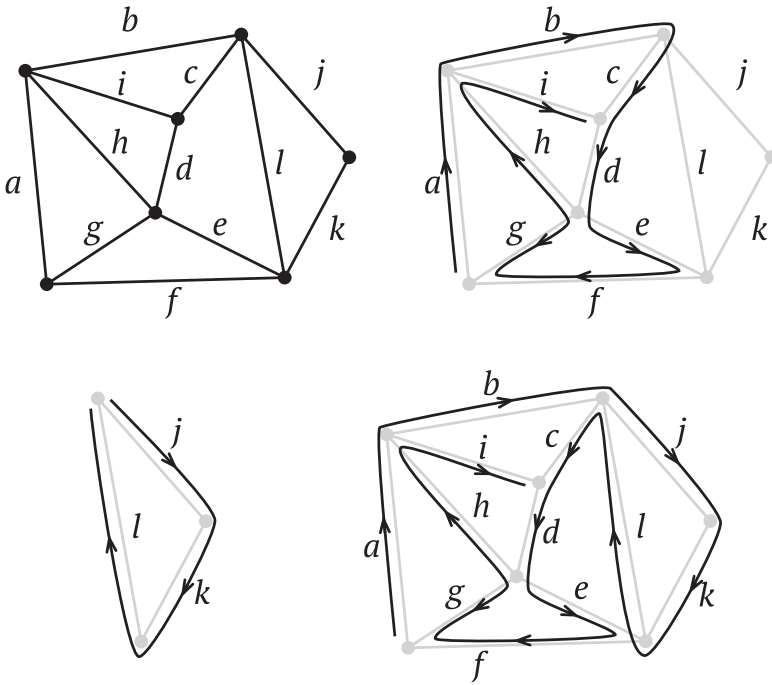


Рис. 11.4. Построение эйлерова обхода

Заметим, что мы узнали о вычерчивании графов больше, чем видно из этого решения на первый взгляд. Мы ставили целью найти эйлеровы обходы, но заодно определили, когда обход может начинаться и заканчиваться в одной и той же вершине. Точнее:

Граф допускает эйлеров цикл тогда и только тогда, когда он связный и не содержит вершин нечетной степени. В этом случае эйлеров цикл может начинаться и заканчиваться в любой вершине.

В 1875 году, спустя полтора века после того, как Эйлер проанализировал маршруты прогулок по Кёнигсбергу, в городе был построен новый мост⁸. Он был возведен к западу от острова Кнайпхоф и соединил северный берег реки с южным (рис. 11.5). Наконец-то жители Кёнигсберга смогли совершить прогулку по всем мостам, пройдя по каждому ровно один раз,

поскольку теперь оказалось ровно две вершины нечетной степени – соответствующие острову и суше между рукавами реки. Конечно, некоторые горожане не могли начать прогулку от порога своего дома, и никому не удалось бы закончить прогулку в том же месте, где она началась.

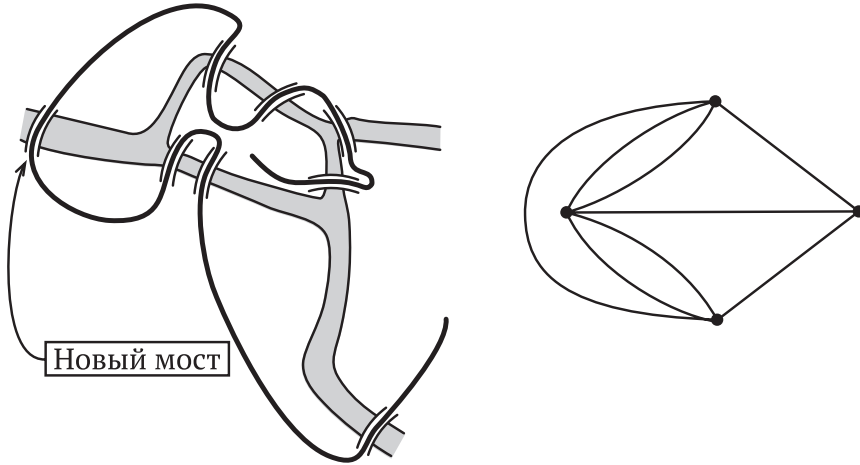


Рис. 11.5. Новый мост в Кёнигсберге и новый граф

Решение задачи о кёнигсбергских мостах иллюстрирует общее для математики явление. Начиная изучать проблему, мы сталкиваемся с уймой лишней информации. Хороший метод решения позволяет устранить все несущественное и сконцентрироваться на сути. В данном случае такие детали, как точное положение мостов и участков суши, ширина реки и форма острова, оказались не важны. Эйлер упростил задачу, так что ее стало возможно сформулировать в терминах теории графов. Это и есть признак гения.

В заключение приведем три примера. В 1847 году Иоганн Бенедикт Листинг (1808–1882), математик, с которым мы еще встретимся снова, придумал граф, изображенный на рис. 11.6, чтобы проиллюстрировать проблему вычерчивания (мы рисуем граф так, как это сделал Листинг, опуская вершины в точках пересечения)⁹. Допускает ли этот граф эйлеров обход? А эйлеров цикл? Предлагаем читателю подумать над этой задачей, прежде чем продолжить чтение.

Мы видим, что все вершины имеют четную степень, кроме самой левой и самой правой, степень которых равна 5. Поскольку существует ровно две вершины нечетной степени, граф Листинга опускает эйлеров обход, и каждый такой обход должен начинаться в одной из этих вершин и заканчиваться в другой. Поскольку в графе есть вершины нечетной степени, то эйлерова цикла не существует.

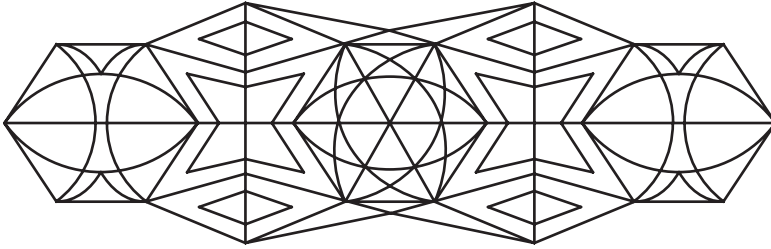


Рис. 11.6. Головоломка Листинга на вычерчивание графа

Второй пример – вариация на тему задачи о мостах. Рассмотрим рисунок, напоминающий кирпичную стену (рис. 11.7). Можно ли провести непрерывную кривую, пересекающую каждый отрезок ровно один раз (кривая может начинаться и заканчиваться в разных кирпичах)? Попытка, показанная на правом рисунке, – не решение, потому что кривая не пересекает один отрезок.

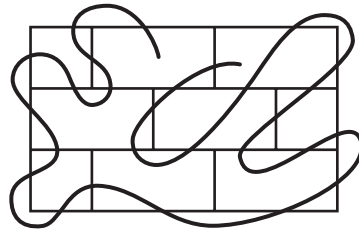
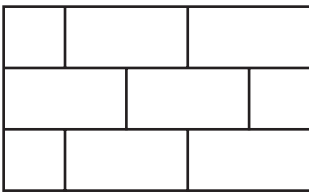


Рис. 11.7. Неправильное решение головоломки

Это невозможно. Обосновать это утверждение можно, преобразовав задачу в задачу о вычерчивании графа. Поместим по одной вершине внутри каждого кирпича и еще одну вне стенки. Проведем между вершинами ребра, соответствующие отрезкам, разделяющим кирпичи (см. рис. 11.8). Достаточно выяснить, допускает ли этот граф эйлеров обход. Поскольку в графе четыре вершины степени 5, эйлеров обход невозможен. Поэтому не существует кривой, обладающей желаемыми свойствами.

И наконец, применим теорию графов и эйлеровых обходов к игре в домино. Этот пример придумал Орли Теркем (1782–1862) в 1849 году¹⁰. В стандартном комплекте домино на каждой половине костяшки нанесено от одной до шести точек. В комплекте нет двух одинаковых костяшек и все комбинации присутствуют. Всего, таким образом, получается 28 костяшек. Каждый игрок по очереди выкладывает костяшки, так чтобы число точек на одной половине его костяшки совпадало с числом точек на свободном конце уже выложенной костяшки. Костяшки с одинаковым числом точек на обеих половинах (дубли) можно класть перпендикулярно костяшке с со-

ответствующим числом точек (как на рис. 11.9). Игра заканчивается, когда игрок не может выложить очередную костяшку. Спрашивается, всегда ли игра заканчивается, когда у какого-то игрока на руках есть костяшки? Или можно выложить все костяшки, так что у игроков ни одной не останется?

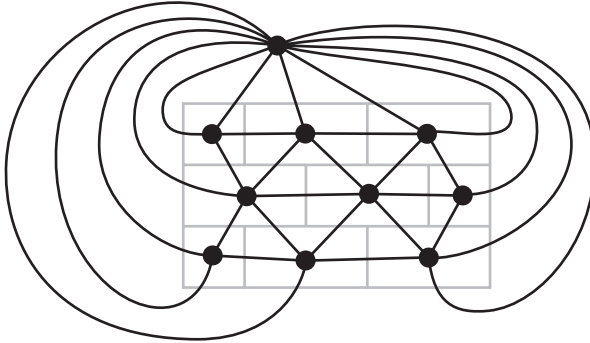


Рис. 11.8. Граф, ассоциированный с головоломкой о кирпичной стене

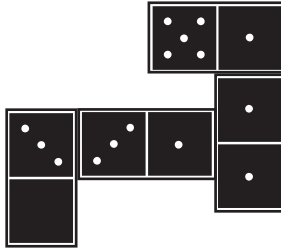


Рис. 11.9. Типичная партия в домино

Для анализа этой задачи построим граф следующим образом. Начнем с семи вершин, пронумерованных от 0 до 6. Каждой костяшке соответствует ребро графа. Костяшке с m точками на одной половине и n точками на другой соответствует ребро из вершины m в вершину n . Сопоставив ребра всем костяшкам, мы получим граф, показанный на рис. 11.10. Заметим, что в каждой вершине имеется петля, соответствующая костяшкам-дублям.

Все вершины в графе домино имеют степень 8. Поскольку степени всех вершин четные, граф допускает эйлеров обход. Следовательно, весь граф можно вычертить, не проходя по одному ребру дважды. Это наблюдение и есть ключ к ответу на поставленный вопрос. Чтобы показать, что можно сыграть все костяшки домино, достаточно предъявить соответствующую партию. Мы построим ее просто (хотя вряд ли такая конфигурация возникнет в реальной партии) – выстроив костяшки в линию.

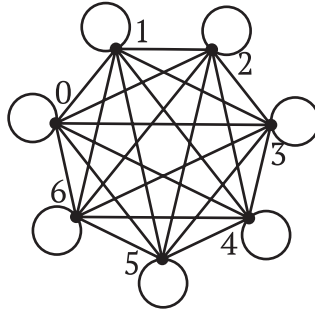


Рис. 11.10. Граф, соответствующий комплекту костяшек домино

Начнем с первого ребра в эйлеровом обходе. Пусть оно соединяет вершины 0 и 3. Выложим костяшку, содержащую 0 и 3 точки (0:3). Теперь рассмотрим второе ребро в обходе. Допустим, что оно соединяет вершины 3 и 1. Выложим костяшку 3:1, приложим ее к предыдущей (рис. 11.11). Будем продолжать таким же образом, выкладывая костяшки на каждом шаге. Поскольку мы совершаем эйлеров обход, каждое ребро будет посещено ровно один раз. Поэтому мы сможем выложить все до одной костяшки.

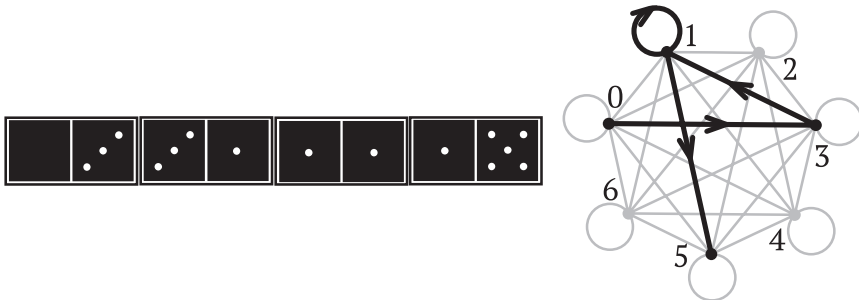


Рис. 11.11. Часть партии в домино и соответствующая ей часть обхода графа

Как показывают эти примеры, теория графов имеет интересные применения в развлекательной математике. Однако это также весьма важная часть серьезной математики, имеющая многочисленные практические применения в таких разных областях, как информатика, вычислительные сети, социальные структуры, транспортные системы и моделирование эпидемий. Мы еще встретимся с теорией графов в последующих главах. В частности, мы выведем аналог формулы Эйлера для одного класса графов.

Глава 12

Плоскостные многогранники Коши

Коши – безумец, и с этим ничего не поделаешь, но сейчас он единственный, кто знает, как надо делать математику.

– Нильс Абель¹

За сто лет, прошедших с того момента, когда Эйлер доказал формулу для многогранников, появилось много новых доказательств и целый ряд обобщений на экзотические многогранные тела. Первое значительное обобщение сделал Огюстен Луи Коши, который также придумал остроумное новое доказательство.



Рис. 12.1. Огюстен-Луи Коши

Коши родился в Париже в 1789 году. Он был старшим сыном высокопоставленного чиновника. Хотя в эпоху террора семья покинула Париж, отец позаботился о том, чтобы сын получил хорошее образование. В юности он познакомился с математиками Пьером-Симоном Лапласом (1749–1827)

и Жозефом-Луи Лагранжем, а также с химиком Клодом Луи Бертолле (1748–1822), так что уже на заре своей жизни общался с авторитетными учеными.

Коши недолго работал военным инженером на строительстве Уркского канала, моста Сен-Клод и Шербургской базы флота. Первые математические сочинения он опубликовал в 1811 году, за два года до возвращения в Париж, где начал строить карьеру в математике. В 1815 году он был принят на работу в Политехническую школу.

Коши был потрясающе плодовитым ученым. По количеству написанных работ он уступает только Эйлеру; собрание его сочинений, включающее по меньшей мере семь книг и восемьсот статей, занимает двадцать семь объемистых томов. Наверное, это байка, но говорят, что Французская академия наук ввела правило, ограничивающее количество публикаций одного автора в год, в ответ на неиссякаемый поток работ, выходявший из-под пера Коши.

Коши внес значительный и глубокий вклад во многие разделы математики, включая комплексный анализ, вещественный анализ, алгебру, дифференциальные уравнения, теорию вероятностей, теорию определителей и математическую физику. Многие фундаментальные идеи анализа, высказанные Ньютоном, Лейбницем, Эйлером и другими, были наконец-то поставлены на твердое теоретическое основание именно Коши. Ему мы должны быть благодарны за современные определения непрерывности, предела, производной и определенного интеграла. Благодаря частым лекциям в Политехнической школе и многочисленным публикациям его голос был постоянно слышен в математическом сообществе в течение всей первой половины XIX века.

Непреложным свидетельством влияния Коши является количество названных в его честь теорем, свойств и понятий – быть может, больше, чем в честь любого другого математика, включая Эйлера. И тем не менее создается впечатление, что Коши стал одним из величайших математиков вопреки самому себе. Зачастую он публиковал работы, казалось, не осознавая их глубины и важности. Математик Ганс Фройденталь (1905–1990) писал: «Почти во всех случаях он оставлял окончательную форму своих открытий следующему поколению. Всем достижениям Коши недостает глубины, что необычно... Он был самым поверхностным из великих математиков, он обладал несомненным чутьем на простое и фундаментальное, сам того не осознавая»².

Хотя Коши вызывает огромное восхищение как математик, о его личности этого не скажешь. Он был известен своим упрямством и склонностью к мелодраматичности. Типичным примером является его добровольная ссылка из Франции в Турин и Прагу, затянувшаяся почти на десять лет. По политическим убеждениям он был консерватором, последовавшим в изгнание за низложенным королем Карлом X после июльской револю-

ции 1830 года. До отъезда из Франции и после возвращения он отказался присягать новому режиму и даже не соглашался выступать на публике. Он был ревностным католиком, но его благотворительная деятельность затмевалась поведением, выдававшим «ханжеского, эгоистичного, узколобого фанатика»³. Один биограф писал, что Коши был «высокомерным роялистом в политике и лицемерным, нравоучительным, богобоязненным в религии... большинство коллег-ученых недолюбливало его и считало чопорным ханжой»⁴.

Первые математические работы Коши написал еще в бытность инженером. В них содержатся его результаты по многогранникам, в т. ч. теорема о жесткости (которую мы обсуждали в главе 5) и по формуле Эйлера. Эти важные результаты – один из очень немногих вкладов Коши в геометрию.

Первая особенность, отличающая доказательство формулы Эйлера, данное Коши, от предшествующих, заключается в том, что многогранники считаются полыми, а не сплошными. Точнее, он рассматривает «выпуклую поверхность многогранника»⁵. Из-за его языка и оттого, что в других местах статьи он вырезает из многогранника куски, может показаться, что он по-прежнему рассматривает многогранник как сплошное тело и только для целей доказательства предполагает, что он полый.

Первый шаг доказательства Коши – преобразование этого полого многогранника в граф на плоскости. Он удаляет из многогранника одну грань, а затем «путем переноса на эту грань всех остальных вершин, не изменяя их числа, получает плоскую фигуру, состоящую из нескольких многоугольников внутри данного контура». Коши уточняет это построение, говоря, что «остальные грани ... можно рассматривать как образующие набор многоугольников, содержащихся в области, которую занимала удаленная грань». Этот процесс показан на рис. 12.2, где многогранник в форме домика спроецирован на плоскость пола.

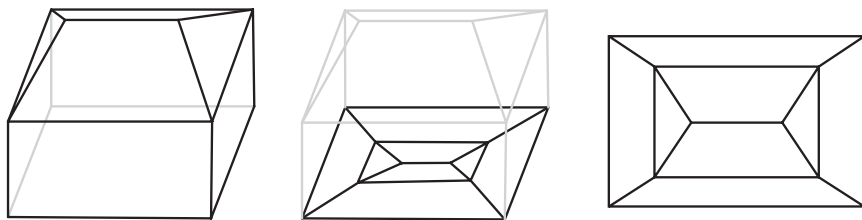


Рис. 12.2. Коши спроецировал многогранник на нижнюю грань

Жозеф Диас Жергонн (1771–1859), современник Коши, с которым мы еще встретимся в главе 15, так описывал этот процесс:

Возьмем многогранник с одной прозрачной гранью и представим себе, что глаз приближается к этой грани извне настолько близко, что можно рассмотреть внутренние поверхности всех остальных граней; это всегда возможно,

если многогранник выпуклый. В этой конфигурации представим, что на плоскости прозрачной грани построена перспектива всех остальных граней⁶.

В своей замечательной книге «Доказательства и опровержения» Имре Лакатос (1922–1974) изложил идею Жергонна в современном виде, предложив поместить фотокамеру рядом с удаленной гранью и сфотографировать внутренность многогранника. Тогда на фотографии появится интересный нас граф. Наглядно представить плоскостной многогранник можно также с помощью теней, отбрасываемых его ребрами, когда рядом с удаленной гранью помещена лампа (рис. 12.3).

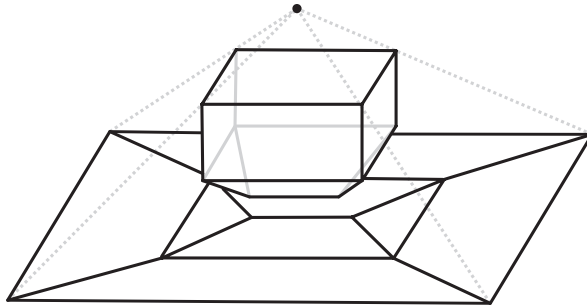


Рис. 12.3. Плоскостной многогранник, рассматриваемый как тень своих ребер

Коши осознал, что достаточно установить связь между числом вершин, ребер и граней этого графа, и доказал, что для любого такого графа имеет место формула $V - E + F = 1$. После того как этот факт установлен, уже нетрудно завершить доказательство формулы для многогранников. Граф, полученный переносом многогранника на плоскость, имеет столько же вершин и ребер, сколько многогранник, но на одну грань меньше. Поскольку для графа $V - E + F = 1$, то для многогранника $V - E + F = 2$. Распространение формулы Эйлера на графы на плоскости – одно из самых полезных ее обобщений.

Идея доказательства Коши заключается в том, чтобы добавлять и удалять ребра таким образом, что величина $V - E + F$ не изменяется. Тогда в конце останется один треугольник, для которого $V - E + F = 3 - 3 + 1 = 1$, откуда следует, что $V - E + F = 1$ для исходного графа. На первом шаге доказательства Коши разбивает граф на треугольники, добавляя диагонали в каждую нетреугольную грань (рис. 12.4). Эта процедура называется *триангуляцией* графа. При добавлении каждой диагонали число ребер увеличивается на единицу, число граней уменьшается на единицу, а число вершин не изменяется. Поэтому величина $V - E + F$ для модифицированного графа такая же, как для исходного. Триангулировав граф, мы начинаем упрощать его, удаляя наружные ребра по одному до тех пор, пока не останется один

треугольник (один из возможных порядков упрощения обозначен числовыми метками на рис. 12.4).

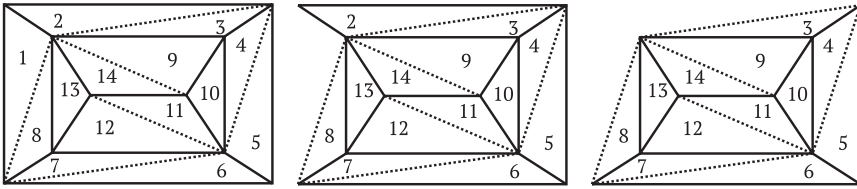


Рис. 12.4. Порядок удаления треугольников из триангулированного графа

Заметим, что треугольник, примыкающий к внешней границе графа, может иметь одно или два наружных ребра. В первом случае треугольник можно удалить, убрав одно ребро и оставив на месте все вершины (как треугольник 1 на рисунке). Во втором случае для удаления треугольника нужно убрать два ребра и одну вершину (как в случае треугольника 2 на рисунке). В обоих случаях величина $V - E + F$ не изменяется. Следовательно, она остается такой же, как для исходного графа.

Впоследствии доказательство Коши было подвергнуто критике. Как Эйлер попал впросак, не дав четких инструкций по порядку удаления пирамид, так и Коши не привел надежных указаний, в каком порядке отрезать треугольники. Если действовать неаккуратно, то можно, следуя алгоритму Коши, получить несвязный граф, для которого доказываемое соотношение не выполняется. Например, на рис. 12.5 мы удаляли треугольники в неправильном порядке и в результате получили несвязный граф, не удовлетворяющий формуле Эйлера ($V = 10, E = 14, F = 6$). Тем не менее всегда возможно, воспользовавшись методом Коши, упростить граф, не сталкиваясь с такой ситуацией.

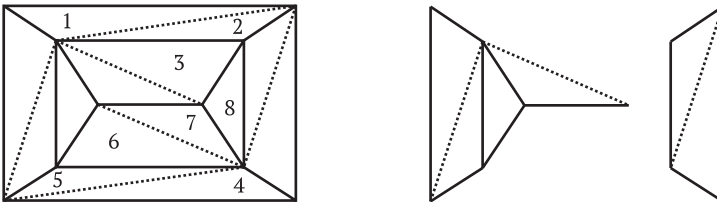


Рис. 12.5. Метод Коши может приводить к вырожденным многоугольникам

Как мы уже отмечали, Коши поставил рекорд по доказательству теорем, не осознавая их важности и не доводя до логического завершения. Яркий пример – его доказательство формулы Эйлера. В своей статье он явно ут-

верждает, что его доказательство применимо к выпуклым многогранникам. Это правда, но на самом деле оно применимо к гораздо более общему классу многогранников. Ключевой шаг доказательства Коши – удаление грани и перенос оставшейся части многогранника на плоскость удаленной грани, так чтобы никакие грани не пересекались. Это можно сделать для любого выпуклого многогранника, но также и для многих других.

Например, доказательство Коши проходит без каких-либо изменений для невыпуклого многогранника на рис. 12.6. Чтобы убедиться в этом, просто расположим камеру Лакатоса рядом с нижней гранью куба.

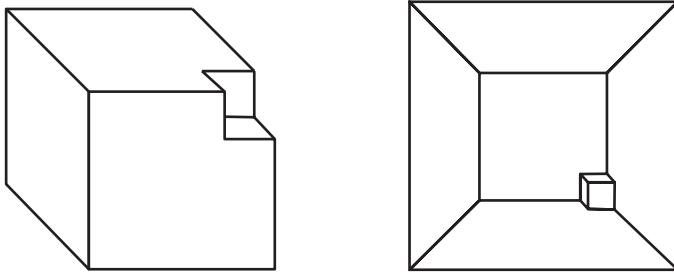


Рис. 12.6. Куб с вырезанным уголком и его граф

Лакатос и математик Эрнст Штайниц (1871–1928) считают, что Коши знал, что его доказательство применимо к некоторым, а быть может, и ко всем невыпуклым многогранникам. Недоразумение проистекает из небрежного употребления Коши слова «выпуклый». Оно отсутствует в формулировке теоремы, но в доказательстве он говорит о «выпуклой поверхности многогранника». Он так никогда и не развеял это недоразумение, поэтому невозможно сказать, что он знал и чего не знал.

Независимо от того, понимал ли Коши, что его результат можно распространить и на некоторые невыпуклые многогранники, другие это быстро заметили. В 1813 году, в тот же год, когда была опубликована статья Коши, Жергонн дал свое доказательство формулы Эйлера. Впоследствии он писал: «И все же кто-то может предпочесть – и не без причины – красивое доказательство г-на Коши, обладающее тем драгоценным преимуществом, что в нем не предполагается выпуклость многогранника»⁷.

При некотором воображении доказательство Коши можно применить и к еще более широкому классу многогранников. В современных вариантах этого доказательства многогранник предполагается сделанным из резины. Если после удаления грани оставшуюся часть многогранника можно растянуть на плоскости без перекрытий и складывания, то доказательство Коши применимо. В главе 15 мы увидим патологические примеры многогранников, не обладающих этим свойством – после удаления грани остаток нельзя разложить на плоскости. Оказывается, что ключевым свойством яв-

ляется то, что многогранник имеет «форму сферы». Мы подробно обсудим это кажущееся расплывчатым свойство в главе 16. Коши был буквально в шаге от осознания этого важнейшего свойства. Если бы он обратил на него внимание, то сделал бы важный вклад в только зарождавшуюся дисциплину – топологию, или *analysis situs*, как ее тогда называли. Как писал Жак Адамар (1865–1963) в 1907 году:

Я считаю одним из самых удивительных событий в истории науки ошибку, которую допустил Коши, полагавший, что доказал теорему Эйлера, но не сделавший никаких предположений о природе изучаемого многогранника. От его внимания ускользнул принцип огромной важности, открытие которого он оставил Риману: фундаментальная роль *analysis situs* в математике⁸.

Коши недооценил весь потенциал своего доказательства не только для многогранников, но и для графов. Например, Артур Кэли (1821–1895) в 1861 году заметил, что доказательство Коши применимо также к графам с криволинейными ребрами (этот факт был независимо отмечен Листингом в 1861 году и Камилем Жорданом [1838–1922] в 1866 году)⁹. В формулировке своей теоремы Коши предполагал, что граф – это совокупность многоугольников внутри многоугольной области. В следующей главе мы увидим, что о графах можно высказывать гораздо более общие утверждения, но для этого нужно сначала ввести современную терминологию.

Глава 13

Планарные графы, математические планшеты и брюссельская капуста

В большинстве наук одно поколение разрушает созданное предыдущим и отменяет установленное ранее. Только в математике каждое поколение добавляет новый этаж к прежней конструкции.

– Герман Ганкель¹

В предыдущей главе мы видели, какую остроумную технику применил Коши для доказательства формулы Эйлера. Он взял многогранник, удалил одну грань и спроецировал все, что осталось, на плоскость этой грани. Затем он доказал, что для получившегося многоугольника имеет место формула $V - E + F = 1$, а значит, для исходного многогранника – формула $V - E + F = 2$. Связь с теорией графов бросается в глаза. На первый взгляд кажется, что было бы тривиально обобщить формулу Эйлера на графы, которые не являются проекциями многогранников и имеют криволинейные ребра.

Но трудность обобщения формулы Эйлера состоит в том, что это проходит не для всех графов. Подсчитать вершины и ребра просто – это те элементы, из которых граф и состоит, но вот граней у графа может и не быть. Даже в том случае, когда граф нарисован на бумаге, ребра необязательно разбивают область на грани. Например, ребро PR в левом графе на рис. 13.1 пересекает ребро QS , поэтому не может быть границей никакой грани. Однако этот граф можно нарисовать по-другому (как в правой части), так что пересечений не будет, и тогда область разбивается на грани. Граф, который можно нарисовать, так что ребра не пересекаются, называется *планарным*.

В многограннике грань – это область, ограниченная многоугольником. Для графов определение не такое строгое. Грань может быть ограничена одним ребром, как петля из P в P на рис. 13.1. Или двумя ребрами, как в случае пары ребер, соединяющих вершины Q и R . (Два ребра между одной

и той же парой вершин называются *параллельными*.) Возможно даже, что ребро заходит внутрь грани, как ребро между S и T .

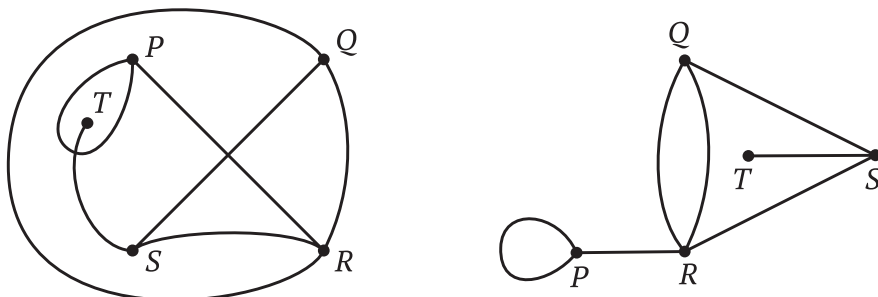


Рис. 13.1. Два представления одного и того же графа

Многие специалисты по теории графов считают внешнюю область гранью. Если рассматривать граф как остров, то эта неограниченная грань будет морем, протянувшимся в бесконечность во всех направлениях. И хотя называть эту неограниченную область гранью довольно странно, часто полезнее включать ее в число граней, чем исключать. Один из способов обрести душевный покой в этом вопросе – рассматривать граф как остров не в бескрайнем море, а на глобусе (рис. 13.2). Тогда неограниченная грань оказывается конечной.

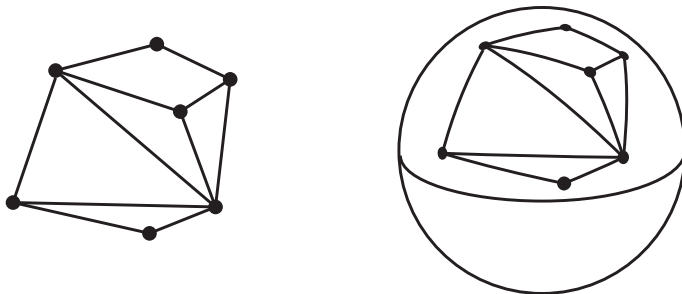


Рис. 13.2. Расположение планарного графа на сфере

Итак, мы имеем следующее обобщение формулы Эйлера для планарных графов.

Формула Эйлера для планарных графов

Для связного планарного графа с V вершинами, E ребрами и F гранями имеет место соотношение $V - E + F = 2$.

Если не считать неограниченную область гранью, то формула Эйлера принимает вид $V - E + F = 1$. У графа на рис. 13.1 пять вершин, семь ребер и четыре грани, $5 - 7 + 4 = 2$, как и должно быть.

В качестве элементарного примера рассмотрим *дерево*. Деревом называется связный граф без циклов (см. рис. 13.3). Поскольку в дереве нет циклов, не ограничена всего одна грань, поэтому формула Эйлера дает $V - E + 1 = 2$, или $V = E + 1$. Иными словами, число вершин дерева на единицу больше числа ребер. В дереве на рис. 13.3 имеется 19 вершин и 18 ребер.

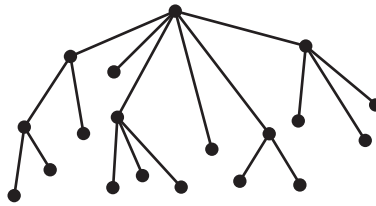


Рис. 13.3. Дерево

Существует много доказательств формулы Эйлера для графов. Мы приведем короткое, в котором, как и Коши, будем удалять ребра по одному. Но при этом будем осторожны, чтобы не повторить его ошибки.

Начнем с произвольного связного планарного графа. Выберем любое ребро. Это ребро либо соединяет две разные вершины, либо является петлей, которая начинается и заканчивается в одной и той же вершине. Предположим, что оно соединяет две вершины. Тогда будем стягивать ребро, пока оно не исчезнет полностью и два его конца не сольются в один. Это можно сделать так, что результирующий граф останется планарным (см. стягивание ребер a , c и d на рис. 13.4). Такая процедура уменьшает количество ребер и вершин на единицу, а число граней оставляет тем же самым. Поэтому величина $V - E + F$ не изменяется. Теперь предположим, что ребро является петлей. В этом случае просто удалим ребро из графа (см. удаление ребер b и e на рис. 13.4). При этом число ребер и граней уменьшается на единицу, а число вершин остается неизменным. Поэтому величина $V - E + F$ не изменяется.

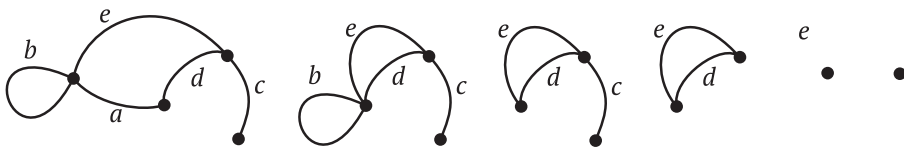


Рис. 13.4. Сведение планарного графа к одной вершине путем удаления ребер a , b , c , d и, наконец, e

Продолжим процесс удаления ребер, пока не останется единственная вершина. В этот момент мы имеем одну вершину, ни одного ребра и одну грань (внешняя область). Поэтому $V - E + F = 2$. Поскольку величина $V - E + F$ не изменялась на протяжении всего процесса, то $V - E + F = 2$ и для исходного графа.

У этой формулы есть интересное следствие: в любом представлении планарного графа с E ребрами и V вершинами количество граней одинаково. Иными словами, если десять человек нарисуют планарный граф, поставив точки там, где пожелают, и проведя ребра, так чтобы они не пересекались, то у всех графов будет одно и то же число граней ($F = 1 + E - V$, если не считать неограниченной грани). Например, на рис. 13.5 показан граф с четырьмя вершинами и шестью ребрами и два его планарных представления с тремя гранями каждое.

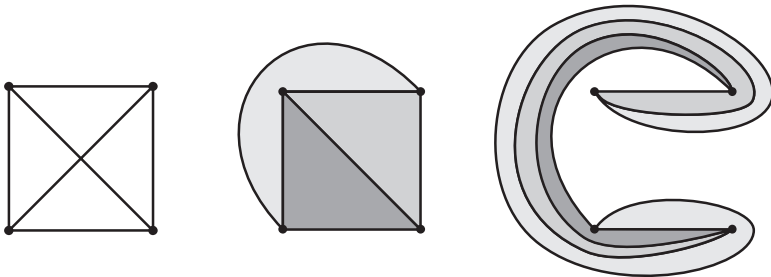


Рис. 13.5. Два разных планарных представления одного графа будут иметь одно и то же число граней

Поскольку формула Эйлера применима только к планарным графам, часто она используется для доказательства того, что граф не планарный. Для иллюстрации этой идеи введем два важных семейства графов: *полные графы* и *полные двудольные графы*.

В полном графе с n вершинами, обозначаемом K_n , n вершин, и каждая пара вершин соединена ровно одним ребром. Это самый большой возможный граф с n вершинами, не имеющий ни петель, ни параллельных ребер. Графы K_1, \dots, K_5 показаны на рис. 13.6. Удалив петли из графа домино (рис. 11.11), мы получили бы граф K_7 .

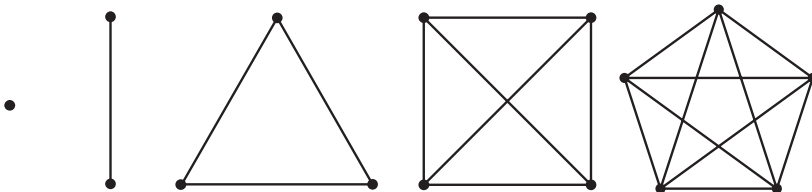


Рис. 13.6. Полные графы K_1, K_2, K_3, K_4 и K_5

С полным графом тесно связан полный двудольный граф. Он обладает тем свойством, что множество вершин можно разделить на два подмножества U и V , так что никакие две вершины, принадлежащие U , и никакие две вершины, принадлежащие V , не соединены ребром, а каждая вершина из U соединена с каждой вершиной из V ровно одним ребром. Если U содержит m вершин, а $V - n$ вершин, то соответствующий полный двудольный граф обозначается $K_{m,n}$. Графы $K_{3,2}$ и $K_{3,3}$ показаны на рис. 13.7. Типичный пример полного двудольного графа, который приводится в любом начальном учебнике по теории графов, – граф ресурсоснабжающих компаний. Множество U состоит из компаний (газовой, водопроводной, электрической и т. д.), а множество V – из клиентов. Поскольку каждый клиент должен получать ресурсы каждого вида, то получающийся граф полный двудольный.

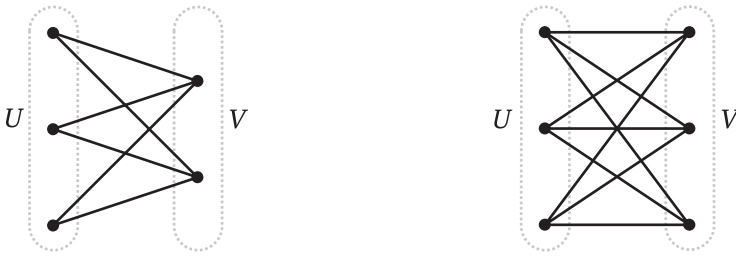


Рис. 13.7. Полные двудольные графы $K_{3,2}$ и $K_{3,3}$

Мы хотели бы знать, какие из полных и полных двудольных графов планарные. Легко показать, что графы $K_1, K_2, K_3, K_4, K_{m,1}$ и $K_{m,2}$ планарные. Например, на рис. 13.8 мы видим, что K_4 и $K_{3,2}$ планарные. Оказывается, что все остальные графы интересующего нас вида непланарные. Воспользуемся формулой Эйлера, чтобы доказать, что K_5 и $K_{3,3}$ непланарные.

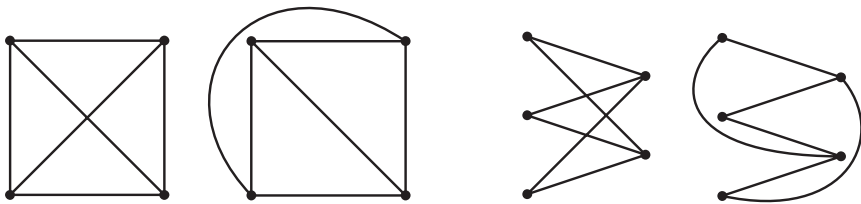


Рис. 13.8. K_4 и $K_{3,2}$ – планарные графы

Чтобы доказать, что K_5 непланарный, мы воспользуемся техникой *доказательства от противного*. Предположим, что утверждение, которое мы хотим доказать, неверно (т. е. что граф K_5 планарный), и покажем, что это приводит к логическому противоречию. Тогда можно будет заключить, что K_5 непланарный. Г. Х. Харди писал: «Метод доказательства *reductio ad*

absurdum, столь любимый Евклидом, – один из самых лучших инструментов математика. Это гораздо более “хитроумный” гамбит, чем любой шахматный гамбит: шахматист может пожертвовать пешку или даже фигуру, но математик жертвует партию»².

Предположим, что K_5 – планарный граф. Тогда мы сможем нарисовать K_5 на плоскости, так что никакие два ребра не будут пересекаться. K_5 имеет 5 вершин и 10 ребер. Формула Эйлера для планарных графов утверждает, что $V - E + F = 2$, поэтому в нашем планарном чертеже K_5 должно быть 7 граней, включая неограниченную (потому что $2 = F - 10 + 5$).

Каждое ребро является общей границей двух граней, поэтому $2E = pF$, где p – среднее число сторон по всем граням. K_5 – полный граф, поэтому в нем нет ни петель, ни параллельных ребер. Так как нет петель, то не существует граней, ограниченных только одним ребром, а поскольку нет параллельных ребер, то не существует граней, ограниченных двумя ребрами. Следовательно, среднее число ребер на одну грань должно быть не меньше трех. Это значит, что $p \geq 3$ и $2E \geq 3F$. Но из того, что $F = 7$ и $E = 10$, следует, что $20 \geq 21$, т. е. мы пришли к противоречию. Поэтому K_5 должен быть непланарным.

Аналогично можно доказать, что полный двудольный граф $K_{3,3}$ непланарный (попробуйте сами!). Главное отличие заключается в том, что, поскольку $K_{3,3}$ двудольный, путь, который начинается и заканчивается в одной и той же вершине, должен иметь четное число ребер. Поэтому в нем не может быть также граней с тремя сторонами.

В общем случае справедлива следующая теорема.

Граф K_n не является планарным для $n \geq 5$, а граф $K_{m,n}$ не является планарным, когда одновременно $m \geq 3$ и $n \geq 3$.

Оказывается, что в некотором смысле K_5 и $K_{3,3}$ – единственные препятствия, мешающие графу быть планарным. Знаменитая теорема Куратовского–Понтрягина утверждает, что граф может быть непланарным, только если он содержит в качестве подграфа K_5 или $K_{3,3}$. Например, граф на рис. 13.9 непланарный, потому что содержит копию K_5 .

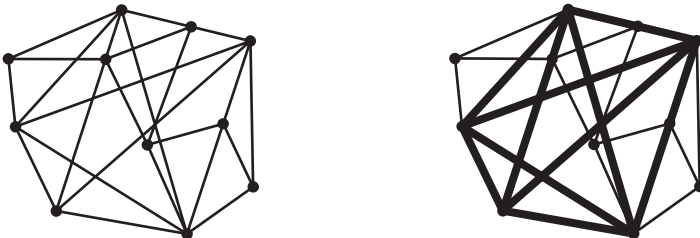


Рис. 13.9. Пример непланарного графа, содержащего K_5

Далее мы приведем еще одно интересное применение формулы Эйлера, называемое теоремой Пика. Ее доказал Георг Александр Пик (1859–ок. 1943) в 1899 году³. Пик был австрийским математиком, большую часть жизни прожил в Праге. Он погиб в концлагере Терезиенштадт в Чехословакии.

Для формулировки теоремы Пика обратимся к *математическому планшету* – популярному средству обучения, изобретенному Каледом Гаттеню (1911–1988), который прекрасно помогает детям изучать основы геометрии. Математический планшет можно изготовить самостоятельно – нужно только вбить в доску гвозди, так чтобы они образовывали квадратную сетку. Учащиеся натягивают на гвозди резинки, формируя разные многоугольники (рис. 13.10). С помощью планшета учитель может обсуждать такие геометрические понятия, как периметр, угол, площадь и теорему Пифагора.

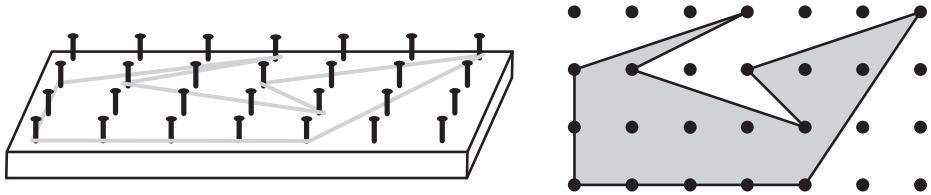


Рис. 13.10. Многоугольник на математическом планшете

Теорема Пика дает простой способ вычисления площадей даже очень сложных невыпуклых многоугольников (мы, однако, требуем, чтобы резинка не пересекала самое себя).

Теорема Пика

Если на границе многоугольника находится B гвоздей, а внутри многоугольника I гвоздей, то его площадь равна $A = I + B/2 - 1$.

Например, поскольку для многоугольника на рис. 13.10 $B = 12$ и $I = 5$, то его площадь равна $5 + 12/2 - 1 = 10$.

Оказалось, что один лесник в Орегоне использовал приближение к теореме Пика для оценки площади леса⁴. Лесник взял прозрачную пластинку с нанесенной на нее решеткой точек и наложил ее на многоугольную карту своего участка. Для оценки площади он сложил число точек во внутренней области с половиной числа точек на границе (очень близко к теореме Пика!) и умножил на подходящий масштабный коэффициент.

Теорема Пика с легкостью вытекает из формулы Эйлера, при условии что нам известна площадь *примитивного* треугольника. Треугольник называется примитивным, если внутри него нет гвоздей, а единственные гвозди

на границе находятся в вершинах (например, треугольник на рис. 13.11). Иными словами, треугольник примитивный, если $B = 3$ и $I = 0$. Удивительно, но площадь любого примитивного треугольника равна $1/2$.

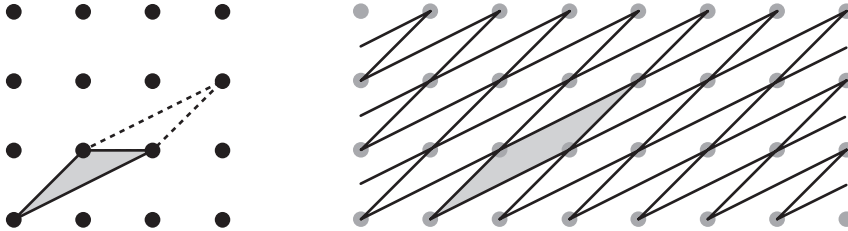


Рис. 13.11. Параллелограмм, построенный по примитивному треугольнику на плоскости

К сожалению, доказать этот факт довольно трудно. Вместо полного доказательства мы поясним, почему это должно быть верно. Легко видеть, что плоскость (бесконечный математический планшет) можно замостить квадратами 1×1 . Такое замощение обладает тем свойством, что если сдвинуть любую плитку на единицу вверх, вниз, вправо или влево, то она совпадет с другой плиткой. Аналогично возьмем примитивный треугольник и достроим его до параллелограмма, имеющего вдвое большую площадь. Параллелограммами тоже можно замостить плоскость, сдвигая их на единицу вверх, вниз, вправо или влево. Поэтому параллелограмм, как и квадрат, должен иметь площадь 1. А значит, площадь треугольника равна $1/2$.

Теперь мы можем доказать теорему Пика. Сначала построим триангуляцию многоугольника – разобьем его на T примитивных треугольников (как показано на рис. 13.12). Если считать неограниченную область гранью, то $F = T + 1$. Поскольку площадь каждой треугольной грани равна $1/2$, то полная площадь многоугольника $A = (1/2)T$.

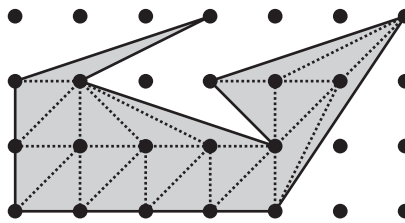


Рис. 13.12. Многоугольник разбит на примитивные треугольники

У каждой ограниченной грани три стороны, поэтому в величине $3T$ каждое ребро учтено дважды, за исключением граничных ребер, которые

учитываются один раз. Поскольку число граничных ребер равно числу расположенных на границе вершин, имеем

$$3T = 2E - B,$$

или

$$E = \frac{3T}{2} + \frac{B}{2}.$$

Количество вершин $V = I + B$. Применяя формулу Эйлера, получаем

$$\begin{aligned} 2 &= V - E + F; \\ 2 &= (I + B) - \left(\frac{3T}{2} + \frac{B}{2} \right) + (T + 1); \\ 2 &= -\frac{T}{2} + \frac{B}{2} + I + 1. \end{aligned}$$

Поэтому число треугольных граней равно

$$T = 2I + B - 2,$$

а полная площадь равна

$$A = \frac{T}{2} = \frac{1}{2}(2I + B - 2) = I + \frac{B}{2} - 1,$$

что и требовалось доказать.

И в заключение опишем две игры с карандашом и бумагой. Несмотря на сходство, одна является интеллектуальным вызовом, а другая – насмешкой над игроками, поскольку исход известен еще до того, как сделан первый ход.

По словам Мартина Гарднера (1914–2010), который долгое время вел математическую колонку в журнале «Scientific American», игру «Рассада» придумали за чашкой чая одним февральским утром 1967 года Джон Хортон Конвей (1937–2020) и Майкл Патерсон из Кембриджского университета. Она стала сенсацией. Конвей писал Гарднеру, что «на следующий день после того, как рассада проросла, в нее, казалось, играли все. Во время перерыва на чай или кофе собирались группки людей, склонившихся над фантастически нелепыми позициями рассады»⁵.

В начале игры на чистом листе бумаги рисуется несколько точек. Затем игроки по очереди ходят. Ход заключается в том, что игрок соединяет линией (прямой или кривой) две точки либо рисует петлю, начинающуюся и заканчивающуюся в какой-то точке, а потом ставит на этой линии новую точку. Правила очень простые: линии не должны пересекаться, линия не должна проходить через ранее поставленные точки, из каждой точки не должно исходить более трех точек. Победителем считается игрок, сде-

лавший последний возможный ход. На рис. 13.13 показана игра с двумя начальными точками, в которой игрок 2 выигрывает на четвертом ходу.

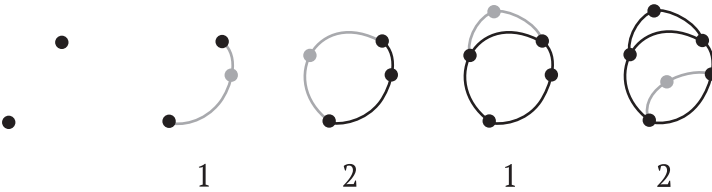


Рис. 13.13. Игрок 2 выигрывает в «Рассаду»

Чем больше точек нарисовано в начале, тем дольше длится игра, но бесконечно продолжаться она не может. В начале игры с n точками существует $3n$ мест для присоединения ребра. После проведения каждого нового ребра количество свободных мест уменьшается на единицу (два места использованы, одно добавилось). Поэтому самая длинная игра не может продолжаться более $3n - 1$ ходов.

Оказывается, что при небольших n преимущество есть у первого или второго игрока, в зависимости от числа точек. Если в начале игры всего две точки, то второй игрок всегда может делать ходы, гарантированно приводящие к выигрышу. Это верно также для $n = 1, 6, 7, 8$. С другой стороны, первый игрок имеет преимущество при $n = 3, 4, 5, 9, 10, 11$. Большая часть этих случаев ($n > 6$) была проверена на компьютере⁶. Для следующих значений n неизвестно, имеет ли какой-то игрок преимущество. Хотя теоретически эта игра несправедлива, конкретная выигрышная стратегия известна только для самых малых n . В любом случае на практике для выигрыша нужно приложить интеллектуальные усилия.

Впоследствии Конвей придумал вариант «Рассады», который назвал «Брюссельская капуста». Вначале рисуется не n точек, а n плюсики. Игроки по очереди соединяют свободные концы плюсигов линией и ставят на ней новый плюстик (с двумя свободными концами) (см. рис. 13.14). В отличие от «Рассады», правила «Брюссельской капусты» позволяют сходиться в одной вершине четырем ребрам. Как и раньше, победителем считается игрок, сделавший последний ход. Как выяснилось, забавное название «Брюссельская капуста» было намеком на то, что и сама игра шуточная.

Мы видели, что «Рассада» обязательно заканчивается, но для «Брюссельской капусты» это не так очевидно. Каждый ход убирает два свободных конца, но и добавляет два новых, поэтому кажется, что игра может продолжаться бесконечно. Однако конец любой партии в «Брюссельскую капусту» предопределен, и в этом и состоит шутка. Какими бы гениальными или тупыми ни были игроки, игра всегда заканчивается после $5n - 2$ ходов – не больше, не меньше. Иными словами, если вначале было нечетное число

плюсиков, то гарантированно выиграет первый игрок, иначе лавры победителя достанутся второму игроку.

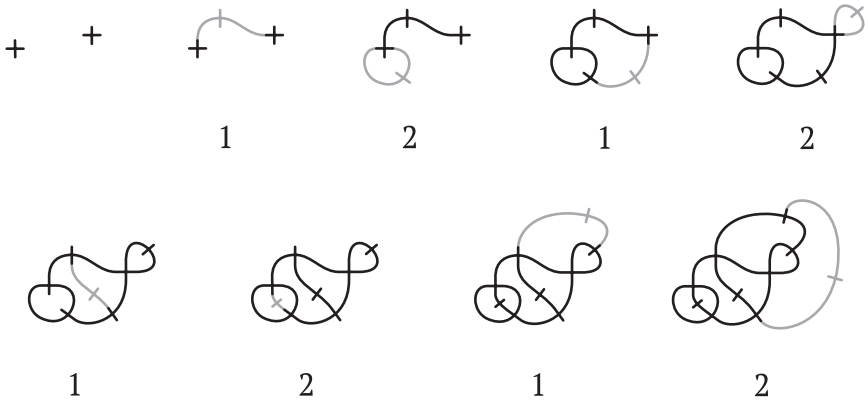


Рис. 13.14. Игрок 2 выигрывает в «Брюссельскую капусту»

Если игнорировать свободные концы плюсиков, то на каждом ходу игровое поле представляет собой планарный граф (быть может, состоящий из нескольких компонент связности). Если считать плюсиками вершинами, то каждый ход добавляет два ребра и одну вершину. Если новая линия не соединяет две компоненты связности, то каждый ход добавляет также одну грань.

Мы утверждаем, что игра закончится, когда граф станет связным и будет иметь ровно $4n$ граней (внешняя область тоже считается гранью). В начале игры имеется n плюсиков с $4n$ свободными концами. Поскольку каждый ход убирает два свободных конца и добавляет два новых, всегда имеется $4n$ свободных концов. Для любой грани должен существовать по крайней мере один свободный конец, указывающий внутрь нее, а именно тот, что принадлежит последней нарисованной линии, ограничивающей ее. Таким образом, граф имеет не более $4n$ граней. С другой стороны, если граней меньше $4n$, то какая-то грань должна содержать два свободных конца, поэтому игра еще не закончена.

Предположим, что игра заканчивается после m ходов, и в результате получается связный граф с V вершинами, E ребрами и $F = 4n$ гранями. (В финальной конфигурации на рис. 13.15 $V = 10$, $E = 16$, $F = 8$.) Как уже было сказано, на каждом из m ходов добавляется два новых ребра и одна новая вершина. Поскольку в начале игры ребер не было, а вершин было n , то в конце мы будем иметь $E = 2m$ ребер и $V = n + m$ вершин. По формуле Эйлера:

$$2 = V - E + F = (n + m) - 2m + 4n.$$

Отсюда $m = 5n - 2$.

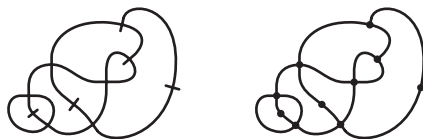


Рис. 13.15. Финальный граф
игры в брюссельскую капусту на рис. 13.14

Так что если хотите подшутить над своими ничего не подозревающими друзьями, предложите им сыграть в «Брюссельскую капусту». Разрешите им выбрать либо очередь хода, либо начальное количество плюсиков. В любом случае вы сможете гарантировать себе выигрыш.

Глава 14

Этот красочный мир

- Иллинойс зеленый, а Индиана розовая. Ну-ка, покажи мне внизу что-нибудь розовое, если можешь. Нет, сэр, тут все зеленое...
- Гек Финн, да неужто ты воображаешь, что каждый штат в природе такого же цвета, как на карте?
- Том Сойер, для чего, по-твоему, существует карта? Ведь она сообщает нам о фактах?
- Разумеется.
- Ну, а как же она может сообщать нам о фактах, если она все врёт?

– *Марк Твен, «Том Сойер за границей»¹*

Математик Чарльз Лютвидж Доджсон (1832–1898), больше известный как Льюис Кэрролл, автор «Алисы в Стране чудес», изобрел следующую игру для двух человек. Игрок А рисует карту континента с любым числом стран. Затем игрок В раскрашивает эту карту, так чтобы соседние страны (имеющие общую границу, касание в одной точке не считается) были выкрашены в разные цвета. Для А цель игры заключается в том, чтобы нарисовать как можно более сложную карту, вынудив В использовать много цветов. Наоборот, В должен раскрасить карту в наименьшее возможное число цветов.

Простую карту типа шахматной доски можно раскрасить всего в два цвета, но даже самый неумелый картограф сможет нарисовать карту, для которой нужно три цвета. Нетрудно также нарисовать карту, требующую четырех цветов, – нужно лишь сделать так, чтобы страну окружали ровно три другие страны (как Люксембург окружают Германия, Франция и Бельгия). Поскольку каждая из четырех стран граничит с тремя другими, необходимо четыре цвета (еще два примера дают Парагвай и Малави).

Во введении мы видели более тонкий случай, когда требуется четыре цвета. Столько необходимо для раскрашивания Невады, Калифорнии, Аризоны, Юты, Айдахо и Орегона, потому что Невада окружена нечетным числом стран (рис. 14.1). Оказывается, что Невада, Западная Вирджиния и Кентукки – единственные штаты США, для которых имеет место такая

проблема. Правильно раскрасив эти штаты и их соседей, мы сможем распространить раскраску на все США, так что четвертый цвет придется использовать всего два раза.

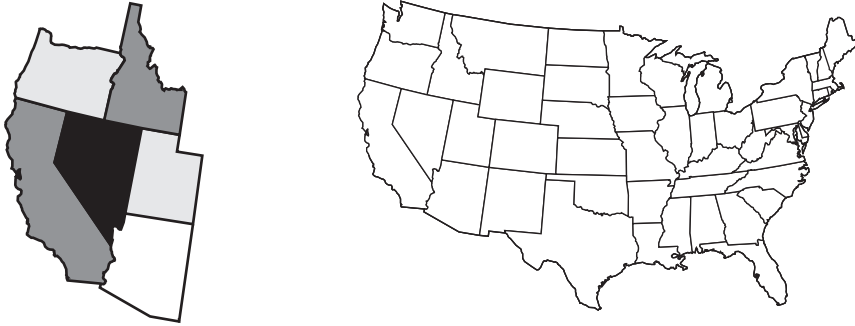


Рис. 14.1. Карту США можно раскрасить в четыре цвета

Может ли А добиться большего? Может ли он заставить В использовать пять цветов? Как мы скоро узнаем, невозможно найти пять взаимно соседствующих стран (мы сразу запрещаем использовать «империалистические» страны, состоящие из неграничащих частей, как страна *a* на рис. 14.2). Достаточно ли этого, чтобы утверждать, что четырех цветов хватит для раскрашивания любой карты?

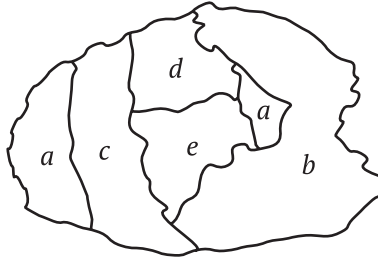


Рис. 14.2. При наличии разделенных на неграничащие части стран может понадобиться пять цветов

Рассказывают, что именно картографы первыми заметили, что четырех цветов достаточно для раскрашивания любой карты. Правда, подтверждающих фактов нет. Если они об этом и знали, то нигде не опубликовали. Кеннет О. Мэй проштудировал многочисленные книги по картографии и истории изготовления карт, но не нашел ни единого упоминания теоремы о четырех красках². При внимательном изучении атласа выясняется, что большинство карт раскрашено либо в один, либо во много цветов. Нет даже намек на то, что картографы старались минимизировать число цветов.

Насколько нам известно, впервые это было замечено в 1852 году. Фрэнсис Гатри (1831–1899), недавний выпускник математического факультета, увидел, что все английские графства можно раскрасить, используя всего четыре цвета, и задался вопросом, всегда ли это верно. Он сформулировал гипотезу, которая стала одной из самых трудных и широко известных проблем во всей математике: *гипотезу четырех красок*.

Гипотеза четырех красок

Любую карту можно раскрасить в четыре или меньшее число цветов, так что никакие две соседние страны не будут окрашены в один цвет.

Фрэнсис Гатри рассказал о своем наблюдении брату Фредерику, который, в свою очередь, поделился со своим профессором, уважаемым математиком Огастесом де Морганом (1806–1871). Де Морган был заинтересован. 23 октября 1852 г. он написал сэру Уильяму Роуэну Гамильтону (1805–1865):

Мой студент попросил меня сегодня объяснить один факт, про который мне ничего не было известно – и я до сих пор не уверен, что это действительно так. Он говорит, что если некая фигура разделена на части любым способом и ее части раскрашены по-разному, так что фигуры с общей границей в виде линии окрашены в разные цвета, то для этого может потребоваться четыре краски, но не больше... Вопрос: нельзя ли придумать случай для пяти красок или больше?.. Что скажете? И был ли этот факт, если он и вправду имеет место, замечен ранее?.. Чем больше я об этом думаю, тем более очевидным мне это кажется. Если вы приведете мне в ответ какой-нибудь очень простой пример, который выставит меня глупым животным, думаю, что я должен буду поступить, как поступил Сфинкс³.

К счастью для де Моргана, ему не пришлось бросаться со скалы, как сделал Сфинкс, когда Эдип разгадал его загадку. Гамильтон даже не заинтересовался его задачей. Он ответил: «Маловероятно, что я займусь Вашим “кватернионом красок” в ближайшем будущем»⁴.

Хотя де Морган пытался уговорить еще несколько человек подумать над проблемой, математическое сообщество упрямо отказывалось рассматривать ее. Почти двадцать лет в печати не появлялось ничего. Поворотной точкой в проблеме четырех красок стал день 13 июня 1878 года, когда на собрании Лондонского математического общества уважаемый математик Артур Кэли спросил, решена ли эта задача, и признался, что сам решить ее не смог. Вопрос был опубликован в записках общества и широко разошелся по миру⁵.

Эта задача стала любимым времяпрепровождением любителей математики с тех пор, как Кэли привлек к ней внимание. Красота вопроса в том, что он формулируется настолько просто, что доступен даже пониманию ребенка. Безусловно, это математическая проблема, но для нее не требу-

ется знания арифметики, алгебры, тригонометрии или анализа. Кажется, что до доказательства рукой подать. Вот что писал знаменитый геометр Г. С. М. Кокстер (1907–2003):

Наверное, чуть ли не каждый математик испытал ночной восторг, когда ему казалось, что он нашел доказательство, но утром обнаруживал, что попал в аналогичную ловушку⁶.

Работая в *Scientific American*, Мартин Гарднер раз в несколько месяцев получал длинное доказательство гипотезы четырех красок (конечно, все неверные). Поэтому в 1975 году он включил ее в колонку, вышедшую в первоапрельском номере. В статье «Шесть сенсационных открытий, которые каким-то образом ускользнули от внимания публики» он упомянул шесть главных открытий 1974 году, в т. ч. контрпример к гипотезе о четырех красках. Надпись под картой 110 областей говорила всё: «Теорема о четырех красках разнесена в пух и прах»⁷. Но до многих читателей шутка не дошла. От простофиль, не понявших, что это розыгрыш, пришло больше тысячи откликов на статью, в которых содержалось свыше сотни раскрашенных копий «контрпримера».

Хотя сейчас мы приписываем постановку проблемы четырех красок Фрэнсису Гатри, во многих старых текстах эту честь отдают немецкому математику Августу Мёбиусу (1790–1868). Мёбиус, последователь Мартина Лютера, был тихим и замкнутым семьянином. Повзрослев, он редко путешествовал, но в бытность аспирантом посещал Лейпцигский университет, Гёттингенский университет (на протяжении двух семестров работал вместе с Гауссом), Университет в Галле, а затем вернулся в Лейпциг, где закончил работу над докторской диссертацией по астрономии. После этого периода частых переездов он предпочел остаться в своей любимой Саксонии. Несмотря на многократные предложения работы в других университетах, он сохранял верность Лейпцигу на протяжении всей оставшейся жизни.

В Лейпциге Мёбиус работал астрономом и стоял во главе тамошней обсерватории. Он любил математику и именно в математику, а не в астрономию, внес наиболее важный свой вклад. Больше всего он известен работами по барицентрическому исчислению, проективной и аффинной геометрии и основаниям топологии. Благодаря уединенному образу жизни и скрупулезному подходу к математике он создавал отличные работы, но это не делало его талантливым лектором. Поэтому на его занятия ходило очень мало платных студентов.

Ошибка атрибуции проистекает из истории, рассказанной одним из студентов Мёбиуса Ричардом Бальцером (1818–1887). Бальцер писал, что в 1840 г. Мёбиус поставил перед аудиторией *проблему пяти принцев*. Он описал ее следующим образом:

Однажды в Индии правил царь, у которого было большое царство и пять сыновей. В своем завещании он написал, что после его смерти царство должно

быть поделено между сыновьями таким образом, чтобы территория каждого граничила (по линии, а не в одной точке) с территориями остальных четырех. Как было разделено царство⁸?

На следующий день Мёбиус признался студентам, что в таком виде задача неразрешима.



Рис. 14.3. Август Мёбиус

С учетом того, что нам известно, легко понять, почему у задачи нет решения. Предположим, что существует способ разделить царство на пять таких областей и что в каждой области имеется дворец принца. Тогда для любых двух братьев можно проложить дорогу между их дворцами, так что она не будет проходить по землям других братьев. Но это означает, что мы построили планарный граф, в котором вершинами являются дворцы, а ребрами – дороги. Точнее, это полный граф с пятью вершинами, K_5 , который, как мы доказали, планарным не является.

В постскриптуме Бальцер пришел к неверному выводу, будто неразрешимость этой задачи означает, что теорема о четырех красках верна. Он писал: «С каким восторгом Мёбиус, должно быть, видел далеко идущие применения» этой задачи⁹. Тонкая связь между проблемой пяти принцев и проблемой четырех красок заключается в том, что если бы нужное разделение царства существовало, то его карту (подобно карте на рис. 14.2) было бы невозможно раскрасить только лишь четырьмя цветами. Однако на самом деле это устраняет лишь одно препятствие к доказательству теоремы о четырех красках. Остается теоретическая возможность построить сложную карту, в которой нет пяти взаимно граничащих областей, но тем не менее раскрасить ее четырьмя цветами невозможно. По словам Мартина Гарднера, многие неправильные доказательства теоремы о четырех

красках, ложившиеся в его почтовый ящик, на самом деле были не чем иным, как замаскированной проблемой пяти принцев.

Но не следует совсем отбрасывать задачку Мёбиуса. Метод соединения дворцов дорогами действительно полезен. Как и в задаче о кёнигсбергских мостах, точная география стран несущественна, важны лишь относительные местоположения. Это топологическая задача, которую можно переформулировать в терминах теории графов.

В *графе смежности* карты имеется по одной вершине для каждой страны, и две вершины соединены ребром, если у соответствующих стран есть общая граница (см. рис. 14.4). Если две страны граничат в нескольких местах, то мы все равно проводим между соответствующими вершинами только одно ребро. Нетрудно видеть, что граф смежности любой карты планарный. Просто будем считать, что вершины – это столицы стран, а ребра – дороги между столицами, проложенные внутри стран. По построению, в графе смежности нет ни петель, ни параллельных ребер; такой граф называется *простым*. Короче говоря, граф смежности карты является простым планарным графом. Заметим, что если карта связная, то таковым будет и граф смежности.

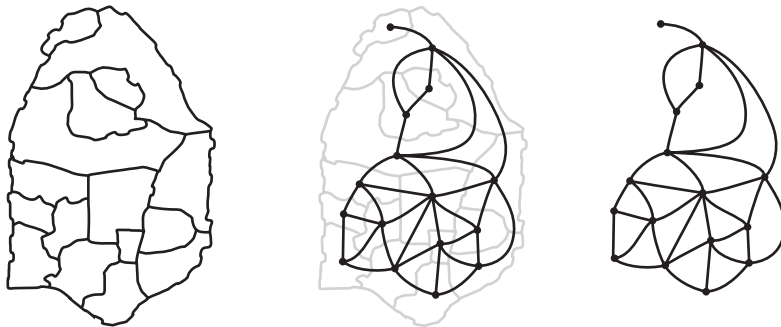


Рис. 14.4. Граф смежности карты

Создав граф смежности карты, мы преобразовали проблему раскраски карты в проблему раскраски графа. Вместо раскрашивания стран на карте мы раскрашиваем вершины графа. Если карту (или граф) можно раскрасить n цветами, так что соседние страны (вершины) будут раскрашены в разные цвета, то мы говорим, что она допускает n -раскраску. Гипотезу четырех красок можно переформулировать следующим образом:

Гипотеза четырех красок для планарных графов

Любой простой планарный граф допускает 4-раскраску.

На рис. 14.5 показана карта Невады и ее соседей, а также соответствующий граф смежности. Мы раскрасили граф четырьмя цветами, а затем перенесли эту раскраску на исходную карту.

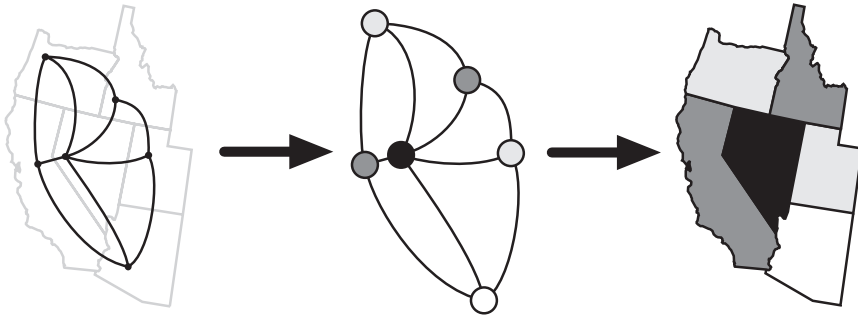


Рис. 14.5. Раскраска графа смежности порождает раскраску карты

На типичной карте могут встречаться страны, имеющие много соседей, но это невозможно для всех стран сразу. На любой карте найдется страна, имеющая пять или менее соседей. Этот важный факт называется *теоремой о пяти соседях*. Для его доказательства нужна формула Эйлера и немного арифметики. В терминах теории графов она формулируется так:

Теорема о пяти соседях

В каждом простом планарном графе существует вершина степени 5 или меньше.

Пусть имеется простой планарный граф. Поскольку в нем нет петель и параллельных ребер, можно добавить ребра так, что каждая грань будет ограничена ровно тремя ребрами. Мы докажем, что этот (большой) триангулированный граф содержит вершину степени 5 или меньше, а потому такая вершина должна быть и в (меньшем) исходном графе. Предположим, что триангулированный граф имеет V вершин, E ребер и F граней (внешняя область считается гранью). Каждое ребро является общей границей двух граней, а каждая грань ограничена тремя ребрами, поэтому $3F = 2E$. По формуле Эйлера, $V - E + F = 2$, или, эквивалентно, $6E - 6F = 6V - 12$. Подставляя $4E$ вместо $6F$, получаем

$$2E = 6V - 12.$$

Поскольку у каждого ребра два конца, сумма степеней всех вершин равна $2E$. Поэтому средняя степень вершин равна

$$\text{Средняя степень} = \frac{2E}{V} = \frac{6V - 12}{V} = 6 - \frac{12}{V} < 6.$$

Так как средняя степень меньше шести, то должна существовать по меньшей мере одна вершина степени 5 или меньше.

Чтобы продемонстрировать полезность теоремы о пяти соседях в задачах раскрашивания графов, докажем теорему о шести красках.

Теорема о шести красках

Любую карту можно раскрасить шестью или меньшим количеством цветов.

Предположим, что это утверждение неверно. Тогда найдется одна или несколько карт, которые нельзя раскрасить шестью цветами. Найдем в этом множестве «плохих» карт карту с наименьшим числом стран. Пусть число стран на этой карте равно N . Такой наименьший контрпример часто называют *минимальным злодеем*. Польза выделения минимального злодея в том, что можно с уверенностью сказать, что любую карту, содержащую $N - 1$ или меньше стран, можно раскрасить шестью цветами.

Рассмотрим граф смежности G минимального злодея. По теореме о пяти соседях, в G найдется вершина v степени 5 или меньше. После удаления v и всех инцидентных ей ребер из G получится новый граф H . Легко видеть, что H является графом смежности карты с $N - 1$ странами. Поскольку H содержит $N - 1$ вершин, его можно раскрасить шестью цветами. Теперь вернем удаленную вершину вместе с ребрами в граф. Поскольку v соседствует не более чем с 5 другими вершинами, найдется хотя бы один неиспользованный цвет, которым можно покрасить v . Таким образом, G можно раскрасить в шесть цветов. Это противоречит предположению о том, что G – минимальный злодей, а следовательно, любая карта допускает 6-раскраску. На рис. 14.6 эта техника использована для раскрашивания графа в красный, синий, зеленый, фиолетовый и оранжевый цвета.

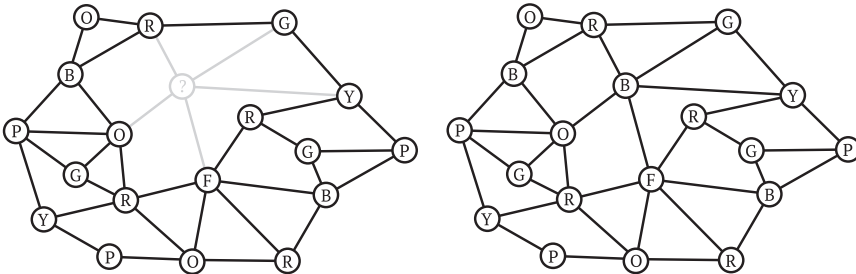


Рис. 14.6. Раскрашивание минимального злодея шестью цветами

К сожалению, это доказательство не проходит, когда число доступных цветов равно 4 или 5. Когда придет время вставить вершину v обратно, может не оказаться свободного цвета для ее окрашивания. В этих случаях нужны более тонкие рассуждения.

Одно такое рассуждение придумал Альфред Брей Кемпе (1849–1922). 17 июля 1879 года Кемпе, ученик Кэли, объявил, что нашел доказательство гипотезы четырех красок, и это доказательство было опубликовано в том же году¹⁰.



Рис. 14.7. Альфред Брей Кемпе

В отличие от большинства неверных доказательств, найденных за последующие сто лет, доказательство Кемпе было очень убедительным. Он предложил несколько новых остроумных методов, что позволило ему покрасить последнюю оставшуюся вершину минимального злодея. Математическое сообщество было взбудоражено.

Доказательство Кемпе оставалось последним словом в гипотезе четырех красок на протяжении десяти лет. Но, к сожалению для Кемпе, дело не было закрыто. В 1889 году Перси Джон Хивуд (1861–1955) нашел ошибку в рассуждениях Кемпе. И она оказалась фатальной. Хивуд предъявил пример карты, для которой аргументация Кемпе потерпела крах. В публикации, появившейся в 1890 году, Хивуд писал:

Настоящая статья не претендует на доказательство исходной Теоремы; на самом деле ее цели скорее деструктивные, чем конструктивные, т. к. будет показано, что в общепризнанном доказательстве имеется дефект¹¹.

Хотя доказательство Кемпе оказалось неправильным, предложенная им техника очень важна. Хивуд признал, что идей Кемпе достаточно для доказательства теоремы о пяти красках. Более того, они вошли неотъемлемой

частью в окончательное доказательство теоремы о четырех красках. И хотя неверное доказательство стало ударом по репутации Кемпе, окончательно его карьеру оно не подорвало. Он остался активным членом Лондонского королевского общества (в которое был избран за математические работы, не относящиеся к теореме о четырех красках), а впоследствии был возведен в рыцари.

Всякий, кто пытался раскрасить большую карту в четыре цвета, знает, что поначалу все идет легко, но в какой-то момент оказывается, что дальнейшее раскрашивание невозможно¹. В этот момент приходится вернуться и перекрасить части карты в другие цвета. Прием, придуманный Кемпе, дает простой способ перекрасить карту.

Начнем с любого раскрашенного (или частично раскрашенного) графа. Выберем два цвета, скажем красный (R) и синий (B), и вершину, покрашенную в один из них. Проследуем по всем возможным путям из этой вершины, которые проходят через синюю вершину, потом красную, затем синюю и т. д. Это множество красных и синих вершин называется *красно-синей цепочкой*, или *цепочкой Кемпе* (см. рис. 14.8). Заметим, что цепочка Кемпе часто нелинейная, в ней могут быть ветвления или циклы. Ключевое наблюдение состоит в том, что поскольку никакая вершина, смежная с цепочкой Кемпе, не может быть ни красной, ни синей, мы можем перекрасить каждую красную вершину в цепочке в синий цвет и наоборот, и полученная раскраска графа по-прежнему будет правильной.

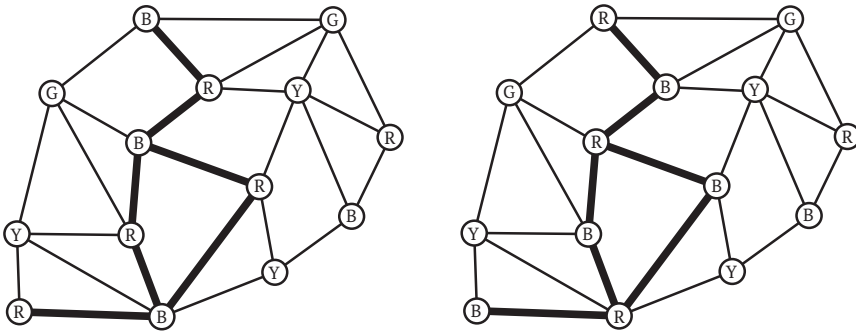


Рис. 14.8. Перестановка цветов в красно-синей цепочке дает еще одну допустимую раскраску

Выше мы доказали теорему о шести красках. А прием Кемпе позволит нам доказать теорему о пяти красках.

¹ Стивен Барр предложил в связи с этим игру для двоих. Первый игрок рисует страну и раскрашивает ее в один из четырех цветов. Второй игрок добавляет страну и тоже раскрашивает ее. Так продолжается до тех пор, пока какой-то игрок не будет вынужден использовать пятый цвет¹².

Теорема о пяти красках

Любую карту можно раскрасить пятью или меньшим количеством цветов.

Начнем доказательство точно так же, как для теоремы о шести красках. Предположим, что имеется минимальный злодей – карта с наименьшим количеством стран N , которую нельзя раскрасить пятью красками. По теореме о пяти соседях, в графе смежности G существует вершина v степени 5 или меньше. Обозначим H граф, полученный удалением вершины v . Поскольку H содержит $N - 1$ вершин, его можно раскрасить в пять красок. Рассмотрим вершины, соседние с v . Если для раскрашивания этих вершин использовано 4 или меньше красок (например, если степень v не больше 4), то раскраску можно завершить, выбрав для окрашивания v неиспользованный цвет. Но если для раскрашивания вершин, соседних с v , использованы все пять цветов, то решение не такое простое.

Назовем a, b, c, d, e вершины, соседние с v (перечислены по часовой стрелке), и предположим, что они раскрашены в красный, синий, желтый, зеленый и фиолетовый цвета. Рассмотрим красную вершину a и содержащую ее красно-желтую цепочку. Необходимо рассмотреть два случая. Сначала предположим, что вершина c не принадлежит этой красно-желтой цепочке (как на рис. 14.9). Тогда мы можем поменять цвета красных и желтых вершин в цепочке на противоположные, не меняя цвета вершины c . В частности, мы сможем покрасить v красным и получить 5-раскраску G . С другой стороны, предположим, что c принадлежит красно-желтой цепочке (как на рис. 14.10). Тогда перемена цветов в цепочке изменила бы и цвет c , поэтому для v не освободился бы цвет. Это нам ничего бы не дало. Однако поскольку граф планарный, сине-зеленая цепочка, содержащая вершину d , не может содержать вершину b . Поэтому перемена цветов в этой сине-зеленой цепочке позволяет покрасить v зеленым цветом, и мы получим 5-раскраску G .

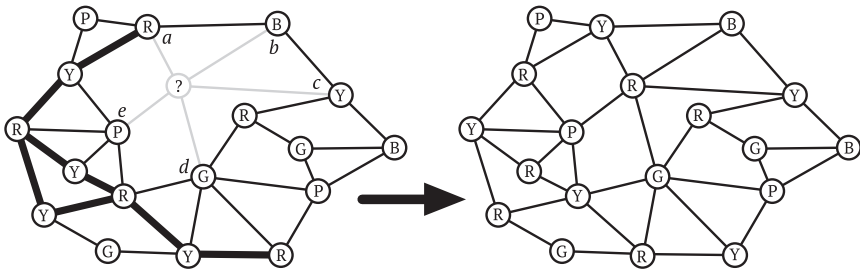


Рис. 14.9. Перестановка цветов в красно-желтой цепочке для завершения раскраски

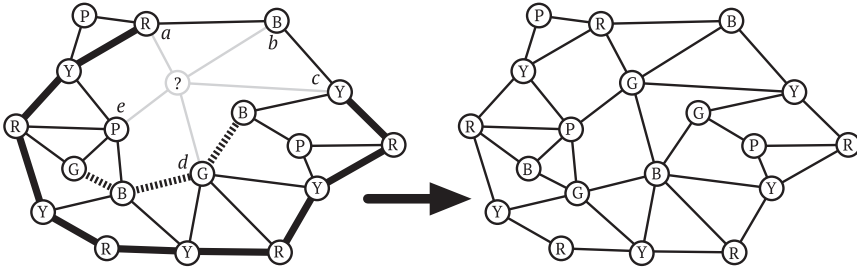


Рис. 14.10. Перестановка цветов в сине-зеленой цепочке для завершения раскраски

Дефектное доказательство Кемпе теоремы о четырех красках было похоже на это доказательство теоремы о пяти красках. Но рассуждение было по необходимости более тонким. Может случиться, что вершина v степени 5 окружена вершинами четырех разных цветов. Пришлось бы перекрасить одну или две цепочки Кемпе, чтобы уменьшить это число до трех и покрасить v . Но хотя этот метод, на первый взгляд, кажется корректным, был упущен один случай, когда перекрашивание двух цепочек Кемпе дает недопустимую раскраску.

Популярность этой завораживающей задачи продолжала увлекать как профессиональных математиков, так и любителей. Такие известные математики, как Джордж Д. Биркгоф (1884–1944), Хасслер Уитни (1907–1989), Анри Лебег (1875–1941) и Освальд Веблен (1880–1960), приняли этот вызов. Несмотря на длинные послужные списки, гиганты не смогли расколоть этот трудный орешек. Некоторые авторитетные математики, например Г. С. М. Кокстер, даже выражали сомнение в правильности гипотезы.

Наступил XX век, и внимание ученых обратилось к неизбежным множествам и приводимым конфигурациям. Неизбежным множеством называется набор конфигураций, из которых по меньшей мере одна должна присутствовать в каждом графе смежности. Например, теорема о пяти соседях дает простейшее неизбежное множество, показанное на рис. 14.11, – должна существовать вершина степени меньше 6.



Рис. 14.11. Неизбежное множество конфигураций

С другой стороны, приводимой конфигурацией называется набор вершин и ребер, которые не могут встречаться в минимальном злодее. Используя метод цепочек Кемпе, легко показать, что первые четыре конфигурации на рис. 14.11 приводимые. Мы можем удалить вершину, раскрасить

оставшийся граф, при необходимости перекрасить его один раз с помощью цепочек Кемпе, а затем покрасить последнюю вершину. Пятая конфигурация составляет проблему.

Таким образом, целью стало нахождение неизбежного множества неприводимых конфигураций. Сделав это, мы доказали бы теорему о четырех красках, потому что это был бы набор конфигураций, которые не могут встречаться в минимальном злодее, но должны встречаться в любом графе смежности. Это противоречило бы существованию минимального злодея.

22 июля 1976 г., спустя почти сто лет после ошибочного доказательства Кемпе, два исследователя из Иллинойского университета, Кеннет Аппель (1932–2013) и Вольфганг Хакен (родился в 1928 г.), объявили, что нашли неизбежное множество, содержащее 1936 приводимых конфигураций. К моменту появления своих двух статей в следующем году они сумели упростить работу, исключив избыточность и уменьшив количество до 1482¹³. (Они также добавили в одну из статей третьего автора, Джона Коха, за помощь в вычислениях.) Теорема о четырех красках наконец-то пала!

Теорема о четырех красках

Любую карту можно раскрасить четырьмя или меньшим количеством цветов.

В конце лета 1976 года Хакен представил свою работу на совместном собрании Американского математического общества и Математической ассоциации Америки. В конце лекции аудитория не разразилась бурными аплодисментами, не было слышно радостных возгласов, и никто с энтузиазмом не похлопывал Хакена по спине. Раздались лишь вежливые хлопки. Для собравшихся в зале математиков-теоретиков так долго ожидаемая развязка одной из самых интересных историй в математике оказалась в высшей степени разочаровывающей.

Причина такого холодного приема заключалась в том, что после того как Аппель и Хакен подготовили конфигурации графов, что заняло семьсот страниц рукописного текста, они загрузили их в компьютер и запрограммировали его на проверку многих тысяч частных случаев. Работу компьютера даже нельзя было проверить вручную. Вычисления заняли шесть месяцев, свыше тысячи часов машинного времени, и результатом стала гора распечаток высотой 1,2 м. Хотя люди в основном верят, что доказательство правильно, большинство чистых математиков находят его неэлегантным, неудовлетворительным и неспортивным. Все равно, как если бы Эвел Нивель похвастался, что пересечет Большой Каньон на мотоцикле, а потом построил мост и переехал по нему. Быть может, такие чувства испытывают настоящие альпинисты при виде людей, использующих бутылочки с кислородом во время высокогорного восхождения.



Рис. 14.12. Кеннет Аппель и Вольфганг Хакен

Ученые и инженеры используют компьютеры для решения бесчисленных задач, но математики так не поступают. Компьютеры хороши для быстрых вычислений, но не для точных и тонких рассуждений, необходимых в математических доказательствах. Подобно литературе, философии и изобразительному искусству, математика всегда была устремлением человеческого духа, не поддающимся автоматизации. Быть может, настанет день, когда кто-нибудь создаст черный ящик для доказывания теорем. Мы вводим утверждение, а черный ящик отвечает «истина» или «ложь». (Такие попытки уже предпринимаются.) Кто-то скажет, что это лишило бы математику ее очарования и сделало бы менее красивой.

Доказательство теоремы о четырех красках стало первым широко обсуждаемым доказательством, полученным с помощью компьютера. И вряд ли последним. Еще один дискуссионный пример – доказательство гипотезы Кеплера, полученное в 1998 году Томасом К. Хейлсом¹⁴. Хейлс доказал, что Кеплер был прав, утверждая, что самый эффективный способ упаковки шаров в ящик – гранецентрированная кубическая упаковка: как бакалейщики укладывают апельсины, а артиллеристы ядра. Хотя этот результат был опубликован в престижном журнале *Annals of Mathematics*, редакция тянула с публикацией несколько лет (статья вышла в 2005 году), и даже тогда редакторы оговорились, что не стали и не смогли бы проверить тысячи строк компьютерного кода.

За годы, прошедшие с момента опубликования Аппелем и Хакеном своего спорного доказательства, оно было подвергнуто независимой проверке.

Другие математики нашли меньшие неизбежные множества приводимых конфигураций и более эффективные способы доказательства теоремы, но и по сей день все доказательства нуждаются в проверке на компьютере.

Пауль Эрдёш (1913–1996), знаменитый венгерский математик, известный своей эксцентричностью, говаривал о «Книге» – воображаемом томе, содержащем самые красивые и элегантные доказательства математических теорем. Сегодня дверь перед теоремой о четырех красках почти закрыта, но мы все еще ждем старомодной проверки с помощью карандаша и бумаги – пока что мы не видели доказательства, достойного войти в Книгу.

Глава 15

Новые проблемы и новые доказательства

Первые важные понятия топологии были открыты
в процессе изучения многогранников.

– Анри Лебег¹

Допустим, вам задали вопрос: какие деревья меняют цвет и сбрасывают листья осенью? Сказав «клены», вы дали бы правильный ответ. Но всякий, кто ездил на машине по Пенсильванской глубинке в октябре, знает о раскрашенных в самые разные цвета дубах, березах и буках, возвышающихся посреди куч опавших листьев. Так что хотя ответ верный, он не содержит полного перечня таких деревьев. Можно ли сказать, что все деревья осенью меняют цвет? Нет. У сосен, елей и кедров нет листьев, им нечего сбрасывать. Чтобы высказать общее и при этом истинное утверждение, следует внимательно изучить различные деревья. Более полный ответ мог бы звучать так: листопадные деревья меняют цвет и сбрасывают листья осенью.

Для выпуклых многогранников имеет место соотношение $V - E + F = 2$. Это истинное утверждение. Мы знаем об этом из доказательств Эйлера, Лежандра, Коши и других. Однако мы знаем и то, что его можно усилить. Как заметил Пуансо, формула Эйлера справедлива не только для выпуклых многогранников, а, например, еще и для звездных. Математик Д. М. Я. Сомервилль (1879–1934) писал: «Выпуклость – это в какой-то мере акцидентальное свойство, выпуклый многогранник можно трансформировать, например путем сминания или вдавливания одной или нескольких вершин, в невыпуклый с точно такими конфигурационными характеристиками»². Поэтому было бы неточностью и ненужным упрощением говорить, что только для выпуклых многогранников имеет место формула Эйлера. Эрнест де Жонкьер полагал, что, «ссылаясь на Лежандра и других высоких авторитетов, мы лишь способствуем широкому распространению предрас-

судка, от которого не свободны даже лучшие умы: будто теорема Эйлера верна только для выпуклых многогранников»³.

Можно ли зайти настолько далеко, чтобы утверждать, что все многогранники эйлеровы? Нет, как существуют деревья, не меняющие цвета осенью, так существуют и многогранники, не удовлетворяющие формуле Эйлера. Мы хотели бы установить, какими точно свойствами должен обладать многогранник, чтобы для него выполнялась формула Эйлера. Минералог Иоганн Фридрих Кристиан Гессель (1796–1872), с которым мы вскоре познакомимся, называл такие многогранники *эйлеровыми*.

В главе 2 мы говорили, что математики работали с многогранниками много столетий, не имея надлежащего определения. Все было хорошо, пока они предполагали (почти всегда неявно) выпуклость, но стоило им заявить, что какое-то утверждение справедливо для всех многогранников, как они обычно попадали впросак. Необходимость в строгом определении многогранника была осознана в начале XIX века.

Первым, кто занялся тщательным изучением того, какие многогранники удовлетворяют формуле Эйлера, был Симон Антуан Жан Люилье (1750–1840). Быть может, Люилье самой судьбой было предназначено поработать с формулой Эйлера. Как и Эйлер, Люилье был швейцарцем, а родился он в тот год, когда Эйлер открыл свою формулу для многогранников. Но самое забавное, что слово «l'huilier» буквально переводится как «масленка» или «тот, кто смазывает», поэтому Люилье можно было бы назвать «The Oiler» – так же, как фамилия Эйлер звучит по-немецки. Как и Эйлер, Люилье отказался от церковной карьеры, соблазнившись математикой. Когда Люилье был еще юношей, один из его родственников пообещал оставить ему часть своего состояния, если он изберет духовную стезю. Но вместо того чтобы принять это щедрое предложение, Люилье решил стать математиком.

Начало математической карьеры Люилье прошло в Варшаве, где он был наставником сына князя Адама Чарторийского. Затем он вернулся в Швейцарию, где занял должность в Женевской академии и в конечном итоге дорос до ректора. За свою долгую жизнь он внес вклад в геометрию, алгебру и теорию вероятностей и за свои работы получил международное признание. Он также написал популярные учебники, которые много лет использовались в Польше. О его личности один биограф писал: «Если поляки находили Люилье откровенным пуританином, то сограждане в Женеве укоряли его за недостаточный аскетизм и причуды, хотя последнее качество никогда не шло дальше изложения геометрических теорем в стихах и сочинения баллад о числе три и о квадратном корне из минус единицы»⁴.

В 1813 году Люилье внес важный вклад в теорию многогранников и в понимание формулы Эйлера. В своей работе он представил три класса многогранников, не удовлетворяющих этой формуле, и назвал их «исключениями».

Статья Люилье была опубликована в новом частном журнале «*Annales de mathématiques pures et appliquées*». Этот журнал, первый посвященный исключительно математике, основал и редактировал артиллерийский офицер и опытный геометр Жозеф Диас Жергонн (1771–1859). Как писал математик Жан-Клод Понт, Жергонн «имел отвратительную привычку публиковать только те части предложенных ему работ, которые его интересовали»⁵. Мало того что Жергонн подверг работу Люилье существенному редактированию, так он еще неоднократно вставлял собственные комментарии в текст его статьи – даже утверждал, что знал о двух из трех исключений, до того как прочел статью Люилье!

Первый класс исключений, открытых Люилье, состоял из многогранников с кольцевыми гранями. Например, на рис. 15.1 углубление в середине одной грани куба порождает грань в форме квадратной втулки. У этого многогранника 10 граней (5 квадратных, 4 треугольных и одна кольцевая), 20 ребер и 13 вершин. В данном случае формула Эйлера не выполняется, потому что $13 - 20 + 10 = 3$. Люилье не называл такие грани кольцевыми, а говорил, что грань содержит «внутренний многоугольник».

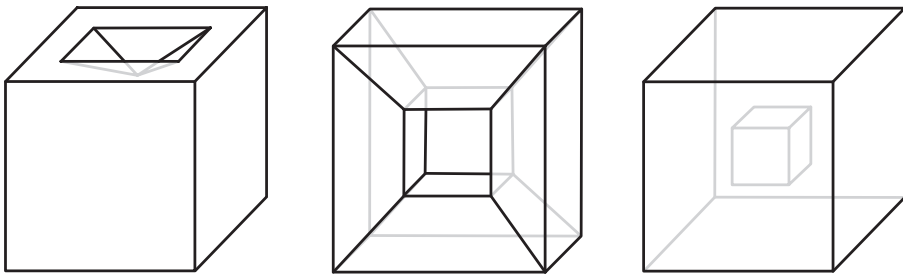


Рис. 15.1. Исключения Люилье: кольцевые грани, туннели и полости

Второй класс исключений Люилье – многогранники с одним или несколькими «туннелями», просверленными сквозь центр. На рис. 15.1 мы видим многогранник в виде бублика. В нем 16 вершин, 32 ребра и 16 граней, т. е. $16 - 32 + 16 = 0$. Идею третьего класса исключений Люилье навеяла коллекция минералов, которую он видел у своего знакомого. В одном из образцов Люилье заметил цветной кристалл внутри прозрачного. (Позднее, в 1832 году Гесселя также вдохновил такой кристалл; в его случае то был кубический кристалл галенита (сульфида свинца) с кристаллом хлористого кальция внутри.) Люилье представил себе многогранник с многогранной же внутренней полостью. Разумеется, такое исключение имеет смысл, только если считать многогранник сплошным, а не полым телом. Куб с кубической полостью показан на рис. 15.1. У этого многогранника 16 вершин, 24 ребра и 12 граней, так что $16 - 24 + 12 = 4$.

Люилье (и Жергонн) полагал, что этим исчерпываются все возможные исключения из формулы Эйлера. Люилье писал: «Легко убедиться, что теорема Эйлера верна в общем случае для всех многогранников, выпуклых и невыпуклых, за исключением случаев, которые будут описаны ниже»⁶.

Затем, вместо того чтобы игнорировать исключения, Люилье придумал модификацию формулы Эйлера, учитывающую особенности исключительных многогранников. Он утверждал, что многогранник с T туннелями, C полостями и P внутренними многогранниками удовлетворяет формуле

$$V - E + F = 2 - 2T + P + 2C.$$

Нетрудно проверить, что эта формула действительно верна для всех трех многогранников на рис. 15.1.

Но, как оказалось, три случая, найденных Люилье, не исчерпывают всех исключений из формулы Эйлера, и его изобретательная формула неприменима ко всем «экзотическим» многогранникам. Например, ни один из четырех многогранников на рис. 15.2 не попадает ни в одну из категорий Люилье и не понятно, как применить его формулу. У первого многогранника имеется грань с двумя внутренними многоугольниками с общей вершиной; во втором имеется туннель с разветвлением; в третьем – полость в форме тора, а четвертый сам имеет форму тора, но наличие туннеля не очевидно.

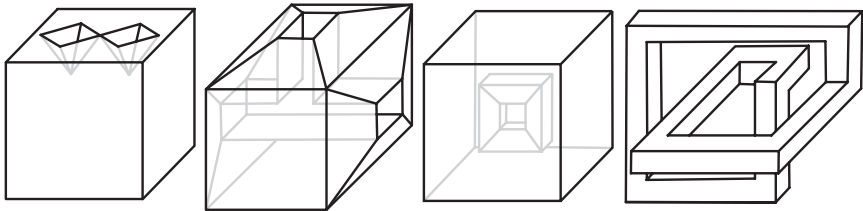


Рис. 15.2. Многогранники сложной формы

И мы снова возвращаемся к проблеме определения многогранника – невозможно классифицировать эйлеровы многогранники, не имея точного определения, что такое многогранник. Тем не менее классификация исключений Люилье принесла чрезвычайную пользу, а его формула в несколько модифицированном виде в конечном итоге оказалась правильной. На самом деле, согласно Лакатосу, этот модифицированный вариант формулы Эйлера или похожий на него переоткрывался десяток раз за восемьдесят лет, последовавших за открытием Люилье.

Иоганн Гессель сначала получил медицинское образование, но изменил род занятий, после того как известный минералог К. К. фон Леонард убедил его заняться минералогией. В итоге Гессель стал профессором минералогии и технологий горных работ в немецком Марбурге. Он внес вклад

в разные области науки, но больше всего известен математическими исследованиями классов симметрии минералов.

В статье 1832 года Гессель описал пять исключений из формулы для многогранников⁷. Работая над статьей и предлагая ее для публикации, Гессель не знал о работе Люилье, написанной двадцатью годами раньше. Но вскоре он узнал об этой работе и о том, что три из пяти его исключений уже были описаны Люилье. Гессель полагал, что многим неизвестно об этих важных исключениях, поэтому не стал отзываться статью. Два новых исключения Гесселя показаны на рис. 15.3. Одно из них – многогранник, образованный двумя многогранниками, соединенными по ребру, а другое – многогранник, образованный двумя многогранниками, соединенными в вершине. Вопрос о том, следует ли называть эти фигуры многогранниками, спорный, но нет сомнений, что они не удовлетворяют формуле Эйлера. Первый имеет 12 вершин, 20 ребер и 11 граней ($12 - 20 + 11 = 3$), а второй – 8 вершин, 14 ребер и 9 граней ($8 - 14 + 9 = 3$).

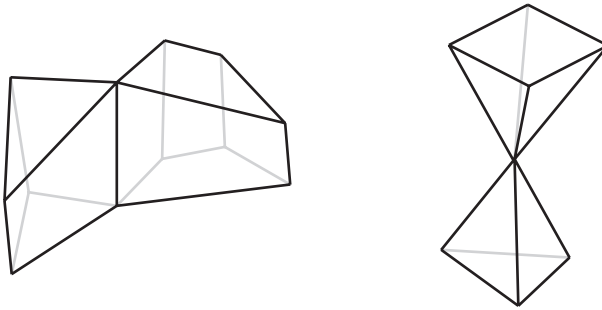


Рис. 15.3. Исключения Гесселя из формулы для многогранников

Луи Пуансо нашел еще два исключения в 1810 году⁸. В статье, содержащей уточнение доказательства Лежандра, Пуансо также представил четыре звездных многогранника, показанных на рис. 15.4. Как мы видели, математические теоремы часто открываются, потом забываются и открываются заново. Напомним, что два из этих четырех звездных многогранников, большой и малый звездные додекаэдры, были описаны еще Кеплером (см. рис. 6.6), а до того встречались на картинах Ямницера и Уччелло (рис. 6.3). Пуансо первым представил два других звездных многогранника, большой додекаэдр и большой икосаэдр, в математическом контексте, хотя первый также встречается на рисунках Ямницера (рис. 6.3). Эти четыре многогранника теперь называются *многогранниками Кеплера–Пуансо*.

Проще всего рассматривать их как невыпуклые многогранники, составленные из треугольных граней. Мы уже отмечали, что они звездные и поэтому, как следует из доказательства Лежандра, удовлетворяют формуле

Эйлера для многогранников. Однако ни Кеплер, ни Пуансо не воспринимали их таким образом. Они считали эти экзотические тела новыми видами правильных многогранников.

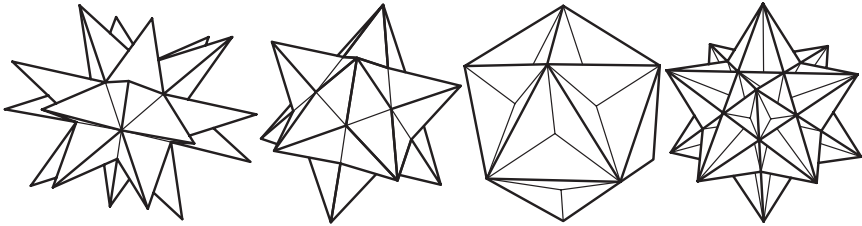


Рис. 15.4. Многогранники Кеплера–Пуансо: большой и малый звездные додекаэдр, большой додекаэдр и большой икосаэдр

Чтобы понять их точку зрения, нам придется вернуться к многоугольникам на плоскости. Ранее мы утверждали, что существует только один правильный n -угольник для любого $n > 2$. Например, правильный пятиугольник показан на рис. 15.5 слева. Но если ослабить требования и допустить пересечение сторон многоугольника, то можно будет найти еще один правильный пятиугольник – пентаграмму пифагорейцев. В конце концов, для вычерчивания пентаграммы нужно провести только пять линий карандашом. Мы считаем, что пентаграмма имеет пять вершин и пять сторон, соединяющих эти вершины. Каждая сторона пересекает две другие, но эти точки пересечения игнорируются и не считаются вершинами. Пентаграмма образована пятью сторонами равной длины, и углы между ними равны. Чем не правильный пятиугольник?

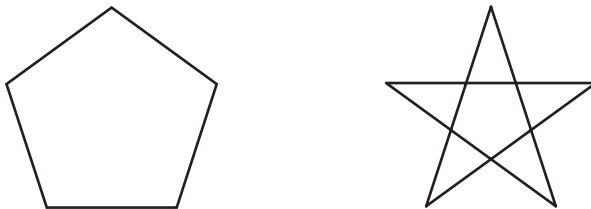


Рис. 15.5. Правильный пятиугольник и правильный самопересекающийся пятиугольник, пентаграмма

Кеплер и Пуансо рассматривали свои звездные многогранники точно так же. Большой додекаэдр, с их точки зрения, образован не треугольниками, а двенадцатью самопересекающимися пятиугольными гранями (см. рис. 15.6). То есть нужно взять все компланарные грани и объединить их в одну грань. Таким образом, большой додекаэдр построен из конгруэнт-

ных правильных пятиугольников, и в каждой вершине сходится одинаковое число граней. Если мы готовы отказаться от требования выпуклости, то большой додекаэдр можно рассматривать как правильный многогранник наравне с платоновыми телами. И три других тела Кеплера–Пуансо обладают этой переопределенной характеристикой правильности – у большого и малого звездных додекаэдров гранями являются пентаграммы, а у большого икосаэдра – равносторонние треугольники.

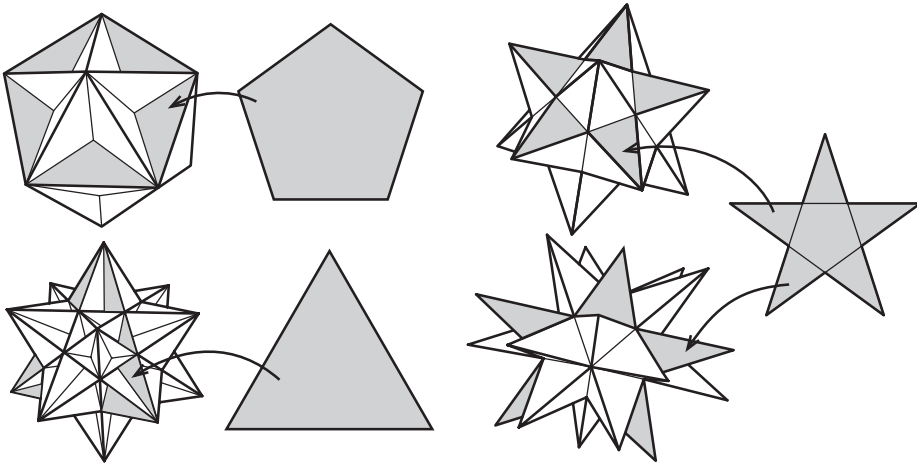


Рис. 15.6. Правильные многогранники с самопересекающимися гранями

Как Теэтет доказал, что существует всего пять правильных многогранников, так Коши в 1811 году доказал, что существует только четыре многогранника, удовлетворяющих этому новому, ослабленному определению правильности, – четыре многогранника Кеплера–Пуансо⁹.

Хотя это не те многогранники, что встречаются в повседневной жизни, вычислить для них величину $V - E + F$ все же можно. Конечно, большой икосаэдр ($V = 12, E = 30, F = 20$) и большой звездный додекаэдр ($V = 20, E = 30, F = 12$) удовлетворяют формуле Эйлера. Но остальные два нет – это еще два исключения из формулы Эйлера. Действительно, если рассматривать большой додекаэдр как многогранник с двенадцатью пятиугольными гранями, то он не удовлетворяет этой формуле. В нем 30 ребер и 12 вершин, поэтому $12 - 30 + 12 = -6$. В малом звездном додекаэдре также 12 вершин, 30 ребер и 12 граней, так что знакочередующаяся сумма снова равна -6 .

Первая половина XIX века видела много исключений из формулы Эйлера, но и много новых доказательств. К 1811 году уже существовали доказательства Эйлера, Лежандра и Коши. В 1813 году Люилье в той же статье, где были описаны три исключения¹⁰, дал новое доказательство того, что фор-

мула Эйлера верна для выпуклых многогранников. Как и Эйлер, Люилье разложил многогранник на пирамиды. Для этого он поместил новую вершину внутрь многогранника и построил ребра и грани, соединяющие эту вершину с вершинами и гранями исходного многогранника. Тем самым он разложил многогранник на много пирамид с общей вершиной. Затем он доказал, что формула для многогранников имеет место для любой пирамиды и для тел, построенных из пирамид таким способом.

В статье Люилье Жергонн привел доказательство для выпуклых многогранников (это доказательство через четырнадцать лет заново открыл Якоб Штайнер [1796–1863])¹¹. Жергонн спроецировал многогранник на плоскость и воспользовался рассуждениями, включающими углы многоугольников.

Одно из самых остроумных доказательств формулы для многогранников придумал Карл Георг Кристиан фон Штаудт (1798–1867) в 1847 году. У этого доказательства есть дополнительное достоинство: оно применимо к широкому классу невыпуклых многогранников. Штаудт родился в дворянской семье в Ротенбурге в Германии. В двенадцать лет он поступил в Гёттингенский университет для изучения астрономии и математики под руководством Гаусса. Его докторская диссертация по астрономии произвела на Гаусса такое впечатление, что он помог Штаудту получить место, дающее право на чтение лекций, в Вюрцбургском университете, хотя Штаудт в то время работал учителем в средней школе. В 1835 году Штаудт стал полным профессором Эрлангенского университета, где был ведущим математиком. Штаудт не отличался плодовитостью, но в 1847 году написал оказавшую заметное влияние книгу по проективной геометрии «*Geometrie der Lage*», к которой впоследствии добавил три длинных дополнения. Именно этой книгой он больше всего и запомнился.

Выпуклость является достаточным условием для формулы Эйлера, но, как указал Пуансо, не необходимым. В «*Geometrie der Lage*» Штаудт наконец дал очень общий набор условий, описывающих эйлеровы многогранники¹². Как и Коши, Штаудт неявно предполагал, что многогранники являются полыми оболочками, а не сплошными телами. Кроме того, он сделал следующие предположения о многогранниках:

- 1) из любой вершины существует путь в любую другую вершину, проходящий по ребрам;
- 2) любой путь, составленный из ребер, который начинается и заканчивается в одной и той же вершине и не заходит ни в какую вершину дважды (напомним, что такой путь называется циклом), разбивает многогранник на две части.

Прозорливому критерию Штаудта удовлетворяют многие невыпуклые многогранники. Например, на рис. 15.7 показано два многогранника очень сложной формы. Первый, как выясняется, удовлетворяет всем условиям Штаудта (для него $V = 48$, $E = 72$, $F = 26$, так что $48 - 72 + 26 = 2$). А второй –

нет. Разрез по выделенной линии не разбивает этот многогранник на две части (для него $V = 40$, $E = 60$, $F = 20$, так что $40 - 60 + 20 = 0$).

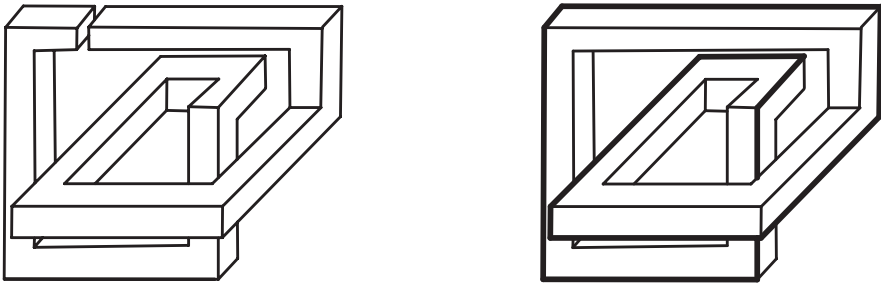


Рис. 15.7. Два многогранника сложной формы

Затем Штаудт привел красивое рассуждение, доказывающее, что для любого многогранника, удовлетворяющего этим условиям, должна выполняться формула Эйлера. Мы дадим краткий набросок данного доказательства.

Покрасим какую-нибудь вершину многогранника в красный цвет. Начав с этой вершины, покрасим одно из инцидентных ей ребер и другую его вершину в красный цвет (на рис. 15.8 этот процесс показан для куба, где жирными сплошными линиями выделены красные ребра). Затем выберем одну из двух красных вершин и покрасим инцидентное ей ребро и другую его вершину в красный цвет. Продолжим такое окрашивание ребер и вершин, соблюдая одно важное условие: не создавать красных циклов. Рано или поздно этот процесс завершится. Для любого многогранника, удовлетворяющего условиям Штаудта, это случится в точности тогда, когда все вершины будут покрашены в красный цвет. Поскольку во множестве красных ребер нет циклов, оно образует дерево и, как видели ранее (рис. 13.3 и относящийся к нему текст), красных ребер должно быть $V - 1$.

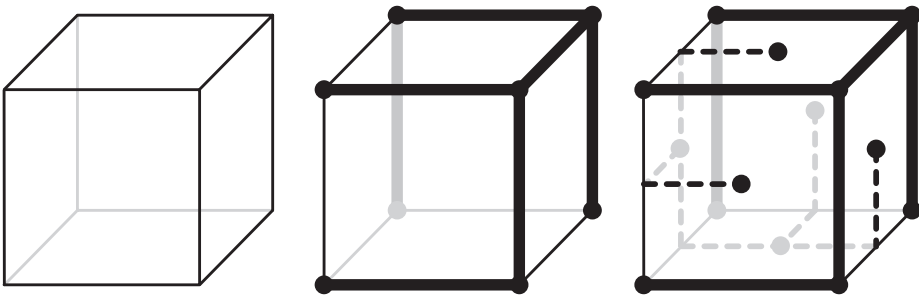


Рис. 15.8. Два дерева в доказательстве Штаудта

Теперь поместим внутрь каждой грани синюю вершину. Проведем синее ребро, соединяющее синюю вершину с соседней синей вершиной, если только они не разделены красным ребром (синие ребра показаны штриховыми линиями на рис. 15.8). И снова для многогранника, удовлетворяющего условиям Штаудта, получившийся синий граф будет деревом. В этом синем дереве F вершин, поэтому оно состоит из $F - 1$ ребер. Ключевое наблюдение заключается в том, что каждое ребро исходного многогранника либо красное, либо пересекается с синим ребром. Поэтому общее число ребер равно сумме числа красных и синих ребер:

$$E = (V - 1) + (F - 1),$$

что после изменения порядка членов дает $V - E + F = 2$.

Сделаем паузу – вернемся к трем исключениям Люилье (см. рис. 15.1) и убедимся, что они не удовлетворяют определению многогранника, данному Штаудтом. Первый многогранник Люилье имеет кольцевую грань. Поскольку невозможно пройти от наружных ребер кольца к внутренним, условие не выполнено. Заметим, что этот многогранник можно изменить, так что он будет отвечать определению Люилье. Для этого достаточно добавить искусственное ребро, соединяющее внутреннюю часть кольцевой грани с внешней (как на рис. 15.9 слева).

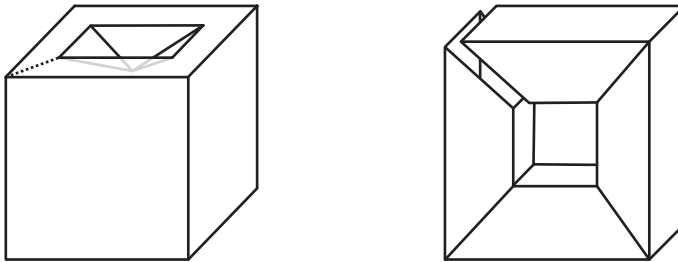


Рис. 15.9. Изменение кольцевой грани и разрезание тора

Второй многогранник имеет туннель, проходящий через центр. Он не удовлетворяет условию 2, потому что, как видно по рис. 15.9, можно сделать разрез, проходящий по циклу ребер, так что многогранник не распадется на две части. В 1879 году Р. Хоппе заметил: «Допустим, что многогранник сделан из материала, который легко режется, например из мягкой глины. Протащим нить через туннель, а потом сквозь глину. Многогранник не развалится»¹³. Напомним, что Люилье не дал точного определения туннеля. Хоппе воспользовался идеями из статьи Штаудта, чтобы исправить эту ситуацию. Он определил туннель в терминах количества разрезов, которые необходимо сделать, чтобы поверхность распалась на части. Мы вернемся к этой идее в главе 17.

Ну, и третье исключение Люилье тоже легко отмечается. Ведь в нем предполагается, что в многограннике имеется многогранная же полость, но это имеет смысл только для сплошных многогранников, тогда как Штаудт предполагал, что многогранники полые. Но даже если допустить сплошные многогранники, все равно условие 1 не выполняется, потому что не существует ребер, соединяющих внутренние вершины с внешними. Хотя исключения Гесселя удовлетворяют обоим условиям Штаудта, он, как и большинство математиков, не считал их многогранниками.

Интуитивно понятно, что многогранники, удовлетворяющие критериям Штаудта, – те, которые «похожи на сферу» и такие, что граница любой грани представляет собой один многоугольник. Многогранник не обязан быть выпуклым, но не может иметь туннелей. Если бы такой многогранник был сделан из резины, то, надув его, мы получили бы сферу.

Этот плодотворный диалог об эйлеровых и неэйлеровых многогранниках, состоявшийся в первой половине XIX века, подготовил сцену для рождения топологии. Эти идеи были развиты другими математиками, и кульминацией стало замечательное обобщение формулы Эйлера, полученное в конце XIX века Пуанкаре. Мы обсудим это развитие в главах 17, 22 и 23.

Глава 16

Резиновые листы, полые бублики и безумные бутылки

Некто Клейн, не любивший вина,
Раз придумал бутылку без дна.
Воскличал он: «К тому же
Что внутри – в ней снаружи!
Даже пробка совсем не нужна!»

– *Анонимный автор*

К середине XIX века математики гораздо лучше понимали, как формула Эйлера применяется к многогранникам. Именно в то время они начали задаваться вопросом, применима ли она к другим объектам. Что, если мы говорим не о многограннике с плоскими гранями, а об изогнутой поверхности, например сфере или торе? И как в этом случае должно выглядеть разбиение? Напомним, что в 1794 году Лежандр воспользовался разбиением сферы на геодезические многоугольники, а Кэли показал, что, когда формула Эйлера применяется к графам, ребра необязательно должны быть прямолинейными.

Эти дискуссии знаменуют переход от геометрии к топологии. В популярной литературе часто встречается выражение «геометрия на резиновом листе», когда нужно рассказать, что такое топология, людям, незнакомым с этим термином. Хотя математики-буквалисты будут возмущены таким чрезмерным упрощенчеством, это все же разумный способ описать различие между топологией и геометрией. В геометрии важно, что объекты изучения жесткие. Измерение длин и углов, доказательство конгруэнтности, вычисление площадей и объемов – все это требует точной и неподвижной геометрической структуры.

Выше мы видели, что в некоторых случаях жесткость и неизгибаемость геометрических фигур не нужны и, более того, только затемняют математическую сторону предмета. Изучая кёнигсбергские мосты, Эйлер обнаружил, что важна общая конфигурация, а не точные местоположения.

Это наблюдение привело к созданию теории графов, одному из первых воплощений топологии. Далее мы видели, что знакопеременная сумма $V - E + F$ зависит только от общей формы – топологии – объекта, а не от числа граней или их конфигурации. Мы заметили, что для любого сферического многогранника имеет место равенство $V - E + F = 2$, для многогранника с g «туннелями» – равенство $V - E + F = 2 - 2g$, а для любого связного планарного графа – равенство $V - E + F = 1$.

Поэтому нетрудно представить, что формула Эйлера может быть применима и к другим объектам, отличным от многогранников. Начнем с резинового многогранника, удовлетворяющего формуле $V - E + F = 2$. Можно ли изменить его форму, так чтобы было $V - E + F \neq 2$? Это нелегко. Если мы просто надуем его, как воздушный шарик, так что все грани и ребра перестанут быть прямыми, то знакопеременная сумма не изменится. Если мы сожжем его, перекрутим или вытянем, то соотношение между числом вершин, ребер и граней останется неизменным. И лишь если мы ножом прорежем воздушный шарик, то знакопеременная сумма изменится (появится по крайней мере одно новое ребро). В следующей главе мы более подробно обсудим, что значит, что две формы топологически «одинаковы», и выясним, как формула Эйлера применяется к различным топологическим формам.

Математический термин «топология» относится к 1847 году (до того он применялся только в ботанике). Впервые он появился на немецком в заголовке книги Листинга «Vorstudien zur Topologie»¹, хотя и до того уже десять лет использовался в переписке. На английском его впервые употребил Питер Гатри Тэйт (1831–1901) в надгробном слове Листингу в 1883 году. Он писал: «Термин *топология* был введен Листингом, чтобы отличить то, что может быть названо качественной геометрией, от обыкновенной геометрии, в которой рассматриваются главным образом количественные соотношения»². Термин «топология» прижился не сразу. Такие авторитетные математики, как Анри Пуанкаре и Освальд Веблен, продолжали пользоваться французским термином *analysis situs*. Великий тополог начала XX века Соломон Лефшец (1884–1972) не был в восторге от этого словосочетания. Он говорил, что *analysis situs* – «красивый, но неуклюжий термин»³.

Восхождение Лефшеца на вершину славы любопытно. Он родился в России в 1884 году в семье евреев, бывших подданными Османской империи, рос и учился во Франции, эмигрировал в Америку и стал работать инженером в Филадельфии. В двадцать шесть лет в результате тяжелой производственной травмы он потерял обе руки и решил строить карьеру в математике. За один год он написал докторскую диссертацию в университете Кларка и некоторое время преподавал в Небраске, а затем получил место в Канзасском университете в Лоуренсе. Затем, в возрасте сорока лет, после десяти лет важной работы, его приняли на работу в Принстонский университет. За свою долгую выдающуюся карьеру он получил многочисленные награды, включая Национальную научную медаль США.

Согласно Альберту Такеру (1905–1995), одному из учеников Лефшеца, именно Лефшец популяризировал употребление термина «топология». Свою оказавшую сильное влияние книгу, написанную по просьбе Американского математического общества, он назвал «Топология». Вот что пишет Такер:

Лефшец искал выразительное и в то же время, как он говорил, «сочное» название, поэтому решил позаимствовать слово *Topologie* из немецкого языка. Это было странно для Лефшеца, поскольку он учился во Франции, а Пуанкаре предпочитал термин *analysis situs*; но, раз остановившись на нем, он развернул кампанию за его всеобщее использование. Эта кампания быстро привела к успеху, как мне кажется, прежде всего из-за производных слов: тополог, топологический, топологизировать. От *analysis situs* их так просто не произвести⁴!

Мы начнем знакомство с топологией с рассмотрения *поверхностей*. Примерами поверхностей являются двумерная плоскость, сфера, тор, диск и цилиндр. Поверхность – это любой объект, который локально выглядит как плоскость. Если посадить муравья на большую поверхность, то он будет думать, что сидит на двумерной глади. Умный муравей мог бы обнаружить, что поверхность не плоская, предприняв ее исследование (подобно тому, что пытался сделать Колумб, когда отправился на запад на поиски Индии), но, оставаясь на месте, он никогда этого не узнает.

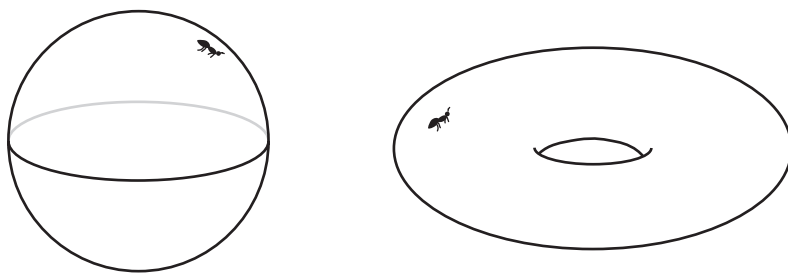


Рис. 16.1. Муравей на поверхности сферы и тора

Важно понимать различие между *внутренней* и *внешней* размерностью. Муравей, сидящий на поверхности, скажет вам, что она локально двумерная – внутренняя размерность поверхности равна двум. Но чтобы мы могли построить физическую копию этой поверхности, она должна где-то находиться, размерность этого объемлющего пространства называется внешней размерностью. Внутренняя размерность сферы и тора равна двум, но они должны находиться в трехмерном пространстве, поэтому внешняя размерность равна трем. Вскоре мы встретимся со странными поверхностями, которые нельзя построить в трехмерном пространстве. Их внешняя размерность равна 4. С топологической точки зрения наи-

более важна внутренняя размерность поверхности; именно поэтому мы говорим, что поверхности двумерны.

Поверхности характеризуются локальной простотой и глобальной сложностью. Иными словами, вблизи все они одинаковы. Все выглядят, как евклидова плоскость. Но глобально они могут существенно различаться. Они могут заворачиваться, иметь сквозные дыры, могут быть скрученными или завязанными в узел и т. д.

Сфера и тор – примеры *замкнутых поверхностей*. В них нет проколов, они не простираются в бесконечность и не имеют резких границ. Иногда мы хотим рассматривать незамкнутые поверхности. Диск и цилиндр – примеры *поверхностей с краем*. Поверхность с краем по-прежнему локально двумерная, но может иметь одну или более одномерных граничных кривых. Некоторые сторонники теории плоской Земли верят, что Земля имеет край. На такой планете незадачливый Колумб не добрался бы до Индии, а свалился бы через край в океан.

Для простоты мы будем использовать термин «поверхность», имея в виду *компактную* поверхность. Термин «компактная» означает, что поверхность ограничена и содержит все свои края. Иначе говоря, мы не рассматриваем неограниченные поверхности, такие как двумерная плоскость или цилиндрическая труба, уходящие в бесконечность в обоих направлениях. Говоря, что поверхность должна содержать все свои края, мы хотим исключить такие поверхности, как открытый единичный диск ($x^2 + y^2 < 1$). Открытым единичным диском называется множество всех точек, отстоящих от начала координат на расстояние, строго меньшее 1; это единичный диск ($x^2 + y^2 \leq 1$), из которого удалена граничная окружность. Хорошая аналогия – обтрепанные штаны после отрезания размахившихся краев, нам эта бахрома нужна.

В 1882 г. Феликс Клейн (1849–1925) придумал остроумный способ построения поверхностей⁵. Он начал с многоугольника (представьте, что он сделан из очень мягкой резины) и строил поверхность, попарно склеивая его стороны. Например, если взять квадрат, скатать его в трубочку и склеить две противоположные стороны, то получится цилиндр (рис. 16.2). Заметим, что если бы вместо скатывания квадрата в цилиндр мы деформировали фигуру на плоскости, пока противоположные стороны не сойдутся (для этого нужна очень мягкая резина!), то получилось бы *кольцо* в виде крепежной шайбы. Для тополога цилиндр и кольцо неразличимы.

Чтобы было понятно, какие стороны склеивать и в каком направлении, их обычно снабжают стрелками. Есть два разных способа склеить пару сторон: с перекручиванием и без. Чтобы обозначить нужное совмещение, мы и используем стрелки. Когда требуется склеить не одну пару сторон, а больше, используются кратные стрелки или стрелки разной формы, чтобы показать, какие стороны склеиваются. На рис. 16.3 мы склеиваем обе пары противоположных сторон квадрата. Для этого одна пара сторон

помечается одиночными стрелками, а другая – двойными. Сначала склеивается одна пара сторон и получается цилиндр. Затем, поскольку обе граничные окружности имеют совместимые ориентации, мы соединяем их и получаем тор.

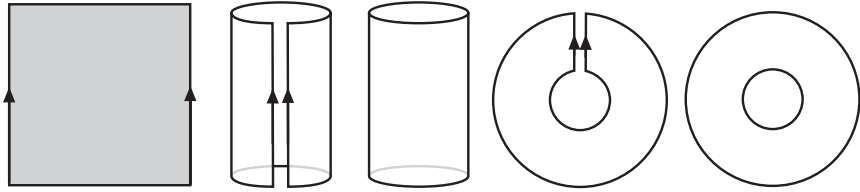


Рис. 16.2. Цилиндр или кольцо

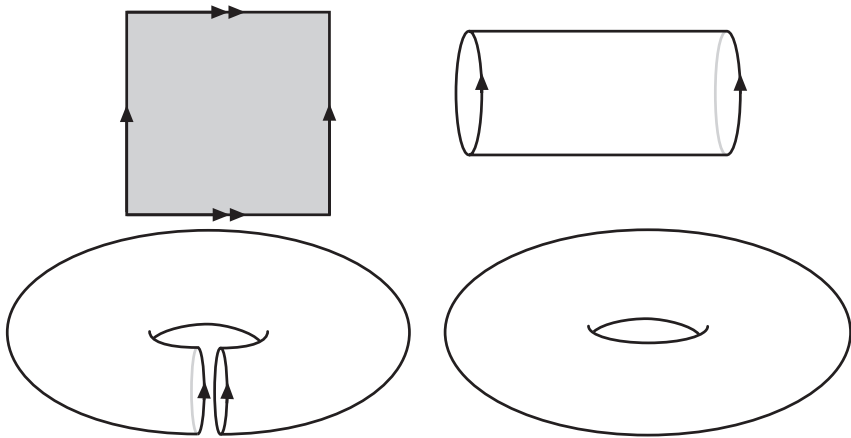


Рис. 16.3. Создание тора из квадрата

В некоторых старых аркадных играх, например *Asteroids*, использовалось такое тороидальное представление. Покидая прямоугольный экран с одной стороны, космический корабль неожиданно появлялся с другой (рис. 16.4). А если он вылетал вверх, то появлялся снизу. В других играх применялись иные топологические конфигурации. Например, игра *Ras-Man* разворачивалась на поверхности цилиндра.

Нет никакой нужды ограничиваться квадратами при построении поверхностей. На рис. 16.5 показан восьмиугольник с четырьмя парами противоположных сторон (они помечены одиночными и двойными стрелками, а также одиночными и двойными треугольниками). Чтобы представить, как выглядит получающаяся поверхность, полезно сделать диагональный разрез восьмиугольника (разрез помечен тремя стрелками, чтобы впоследствии склеить его края вместе). Деформируем оба пятиугольника

в квадраты с вырезом. Эти квадраты похожи на квадрат на рис. 16.3, поэтому после склеивания они образуют тор с отрезанной горбушкой. Наконец, склеиваем оба тора по границам отрезков и получаем тор с двумя дырками (или двойной тор).

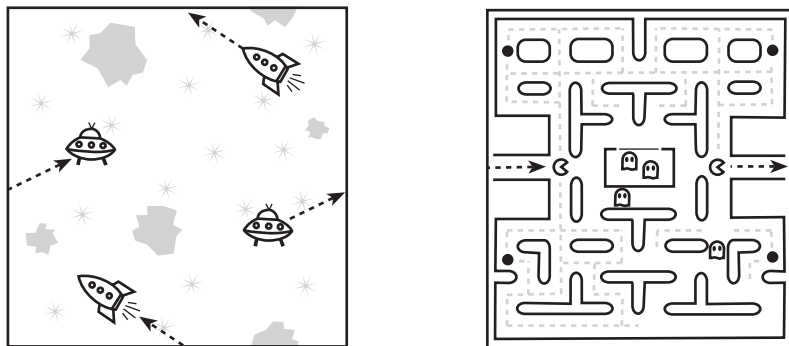


Рис. 16.4. Аркадные игры на торе и цилиндре

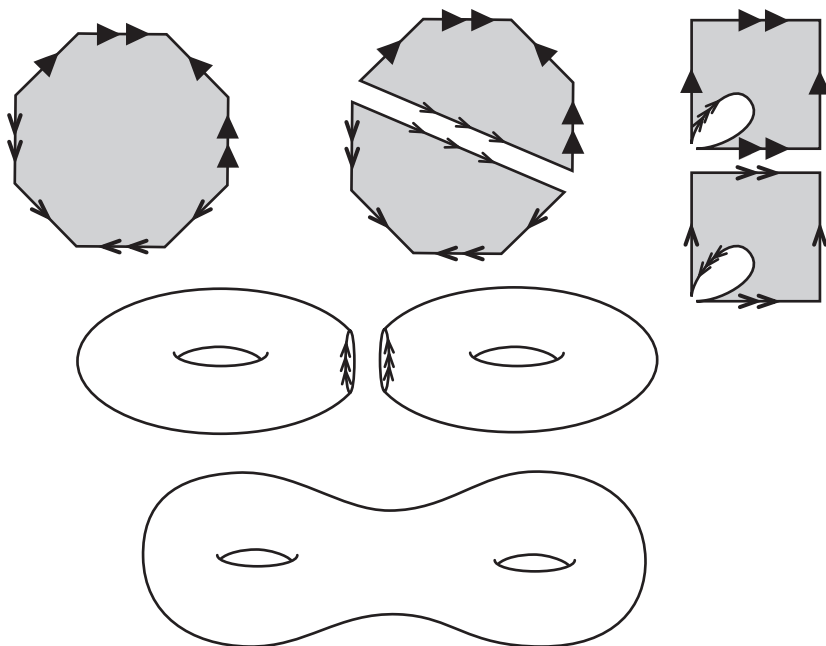


Рис. 16.5. Двойной тор

Клейн доказал, что любую поверхность можно представить в виде многоугольника с парами склеенных сторон, но может существовать много

представлений одной поверхности в виде многоугольников. По счастью, у каждой поверхности есть «красивое» многоугольное представление, и путем разрезания и склеивания любое многоугольное представление можно преобразовать в красивое⁶.

Во всех рассмотренных выше примерах стороны многоугольников склеивались без перекручивания. На рис. 16.6 показан квадрат, противоположные стороны которого склеены с перекручиванием. Поскольку квадрат сделан из резины, мы можем его вытянуть, скатать, как если бы собирались склеить цилиндр, но перед склеиванием повернуть один конец на пол-оборота. В результате получится хорошо известная *лента Мёбиуса*.

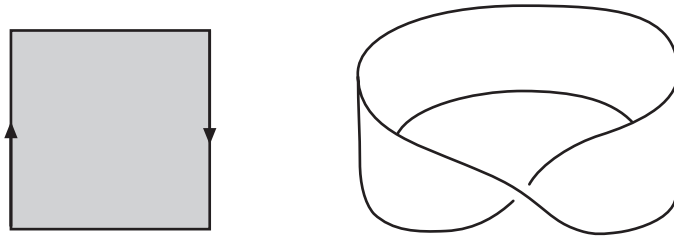


Рис. 16.6. Лента Мёбиуса

Хотя построить ленту Мёбиуса просто, она обладает многими удивительными свойствами. В отличие от цилиндра, у ленты Мёбиуса всего одна сторона. Муравей, ползущий вдоль средней линии ленты Мёбиуса, вернется в исходную точку, оставаясь все время на одной стороне. Эту мысль можно выразить и по-другому: цилиндр можно покрасить в синий цвет с одной стороны и в красный с другой, но лента Мёбиуса может быть только целиком красной или целиком синей. Кроме того, в отличие от цилиндра, у ленты Мёбиуса всего один край. Муравей будет видеть край слева и справа от себя, не понимая, что на самом деле это один и тот же край.

Лента Мёбиуса – топологический объект, обожаемый любителями математики. Его изображали многие скульпторы и художники. Пожалуй, самый знаменитый художественный образ принадлежит М. К. Эшеру (1898–1972), который в 1963 году выполнил на дереве гравюру с изображением (кого же еще!) муравьев, ползущих по ленте Мёбиуса (рис. 16.7). Она встречается и в литературе – обычно в научной фантастике, – например в коротком рассказе Артура Кларка «Стена мрака», написанном в 1949 году⁷. Она же лежит в основе удостоенного награды дизайна Гэри Андерсона, который на конкурсе ко Дню Земли в 1970 году создал символ вторичной переработки, ныне встречающийся повсеместно¹. Лента Мёбиуса применяется для соз-

¹ На самом деле в какой-то момент появился вариант символа Андерсона с тремя разорванными стрелками. Сейчас можно встретить оба варианта.

дания конвейерных лент и ленточных петель, чтобы они изнашивались равномерно.

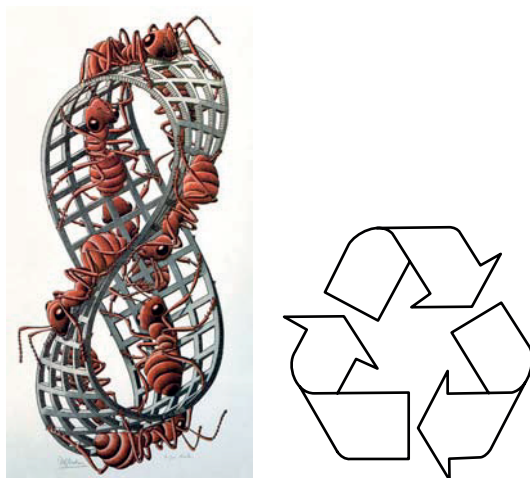


Рис. 16.7. Две знаменитые ленты Мёбиуса:
«Лента Мёбиуса II» Эшера (1963)
и символ вторичной переработки

Лента Мёбиуса даже лежит в основе фокуса с загадочным названием «афганские ленты», который можно проследить по крайней мере до 1882 года. Фокусник держит в руках три матерчатые петли – как он объясняет, выполняющие функции поясов для одежды. Беда в том, жалуется он, что ему нужны пояса для двух клоунов, полной дамы и сиамских близнецов. Он берет первую полоску, разрезает ее вдоль средней линии и получает пояса для обоих клоунов. Потом так же кромсает вторую полоску, но вместо двух петель получает одну удвоенной длины – пояс для полной дамы. Наконец, чтобы получить пояса для близнецов, он разрезает третью полоску и получает два сцепленных вместе пояса. Фокус, как видно на рис. 16.8, в том, что петли изначально перекручены (ноль раз, один раз и два раза соответственно). Для максимального эффекта ткань или бумага должны быть гибкими, а их ширина должна быть гораздо меньше длины, чтобы публика не заметила перекрутов. Стивен Барр предлагает следующую драматичную модификацию⁸. До начала представления нанесите горючую жидкость на среднюю линию скрученной петли. Выступая перед публикой, прикрепите край петли к стене и поднесите к ткани спичку. Вспышка пламени – и петля распадается на части нужной конфигурации.

Читателю стоит отложить книгу и попробовать эти и другие варианты разрезания (см. примеры в приложении А). Попробуйте перекрутить ленты более двух раз. Попробуйте разрезать ленту Мёбиуса вдоль линии, про-

ходящей на расстоянии $1/3$ от одного из «двух» краев. Лично мне больше всего нравится фокус, придуманный Стэнли Коллинзом⁹. Протащите ленту через обручальное кольцо и только потом перекрутите ее три раза и склейте. Если теперь разрезать ленту посередине, то образуется узел, и кольцо окажется внутри него!

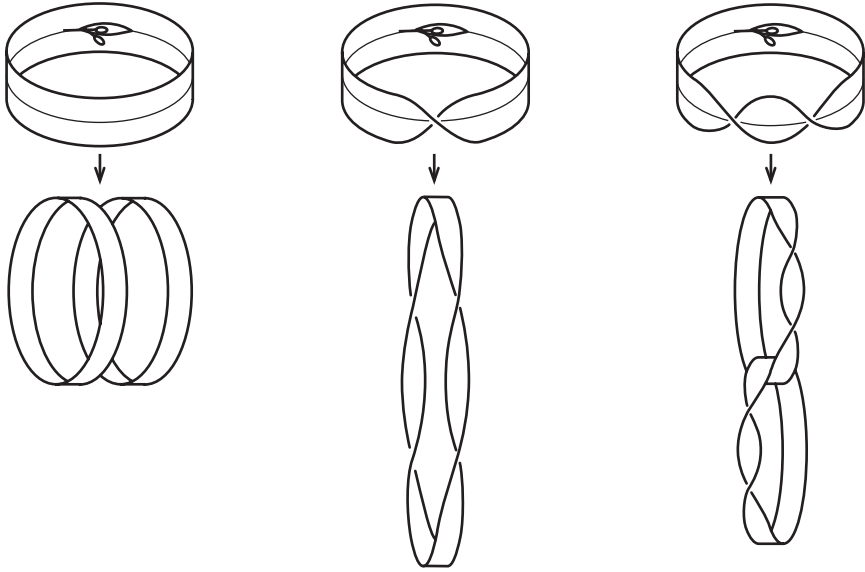


Рис. 16.8. Афганские ленты

Лента Мёбиуса названа в честь Мёбиуса, но почти в то же время ее открыл Листинг (именно Листинг первым обратил внимание на математику, лежащую в основе будущего фокуса с афганскими лентами). Листинг опубликовал свое описание ленты Мёбиуса в 1861 году¹⁰, через четыре года после Мёбиуса¹¹. Из переписки и замечаний следует, что первое упоминание принадлежит Листингу (июль 1858 года), который опередил Мёбиуса (сентябрь) на несколько месяцев.

Причина, по которой лента Мёбиуса не носит имя Листинга, заключается в том, что Мёбиус первым понял математический смысл свойства одно-сторонности. Сегодня мы называем такие поверхности *неориентируемыми*. Есть несколько способов описать это явление математически. Мёбиус показал, что ленту Мёбиуса невозможно разбить на треугольники, а затем на каждом из них выбрать ориентацию, согласованную с соседями (см. рис. 16.9).

Впоследствии Клейн определил ориентируемость по-другому. Поместим на поверхность небольшую окружность и выберем на ней ориентацию. Эта окружность не нарисована на одной стороне поверхности, а является ча-

стью поверхности, поэтому видна на обеих сторонах (на одной она будет ориентирована по часовой стрелке, а на другой – против часовой стрелки). Представим, что поверхность сделана из папиросной бумаги, а окружность нарисована фломастером, так что просвечивает с другой стороны. Клейн называл такую окружность *индикатрисой*. Если индикатрису можно переместить вдоль поверхности, так что она вернется в исходную точку с противоположной ориентацией, то поверхность неориентируемая. На рис. 16.10 показано, что лента Мёбиуса неориентируема, поскольку при перемещении вдоль средней линии индикатриса меняет ориентацию.

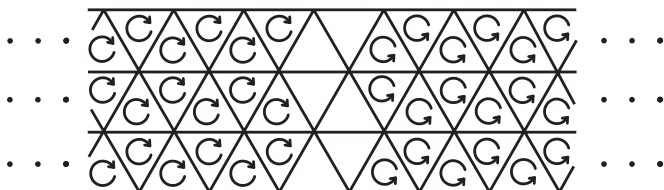


Рис. 16.9. Триангуляцию ленты Мёбиуса невозможно ориентировать

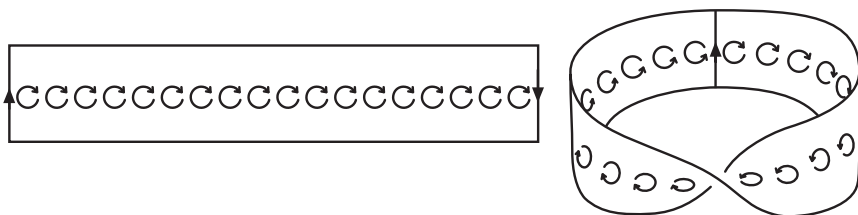


Рис. 16.10. Лента Мёбиуса неориентируема

Вальтер фон Дик (1856–1934), ученик Клейна, дал еще одно определение. Он поместил на поверхность подвижную систему координат (x, y) . Если можно переместить эту систему координат по поверхности, так что оси поменяются местами, то поверхность неориентируемая (одно из преимуществ подхода Дика в том, что он легко обобщается на многомерные топологические объекты).

Интересно отметить, что математики не используют свойство односторонности для определения неориентируемости. Хотя может показаться, что односторонность и неориентируемость эквивалентны, Клейн и фон Дик доказали, что в многомерных пространствах односторонность теряет всякий смысл, а неориентируемость – нет. Понятие *стороны* имеет смысл только для поверхностей в трехмерном пространстве. Говорить о внутренности или внешности поверхности – даже сферы – в 4-мерном пространстве бессмысленно.

Это и другие утверждения о многомерных пространствах, которые еще будут сделаны ниже, трудно воспринять. Требуются мысленные усилия, к которым мозг человека не приучен природой. Как писал математик Томас Банхофф, «все мы рабы предрассудков своей размерности»¹².

Чтобы проиллюстрировать трудное для понимания явление о том, что в 4-мерном пространстве поверхности не имеют сторон, мы понизим размерность и перейдем от поверхностей к кривым. На рис. 16.11 слева видно, что в любой точке кривой на плоскости векторы нормали могут указывать в двух направлениях (вектор называется *нормальным* к кривой, если он перпендикулярен касательной к ней). Таким образом, у плоской кривой есть стороны, а поскольку невозможно переместить вектор нормали вокруг кривой, так чтобы он вернулся в исходную точку, сменив направление, сторон две. Если речь идет о *простой замкнутой кривой*, т. е. замкнутой петле, не пересекающей саму себя, то эти направления называются *внутри* и *вовне* (на самом деле кажущееся таким очевидным утверждение, что у всякой простой замкнутой кривой есть внутренность и внешность, – это глубокий факт, известный под названием *теоремы Жордана*).

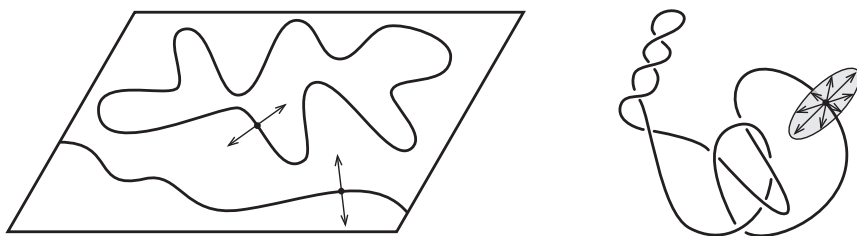


Рис. 16.11. Кривая на плоскости двусторонняя, но у кривой в трехмерном пространстве нет сторон

С другой стороны, для кривой в трехмерном пространстве нормальных направлений в каждой точке бесконечно много (как показывает круг нормальных векторов на рис. 16.11 справа). Поэтому понятие стороны в данном случае бессмысленно.

Аналогично в любой точке поверхности в трехмерном пространстве нормальных направлений два (нормальный вектор перпендикулярен плоскости, касательной к поверхности). Для неориентируемых поверхностей можно переместить нормальный вектор вокруг поверхности, так что он вернется в исходную точку, сменив направление на противоположное, поэтому поверхность односторонняя (см. рис. 16.12). Для ориентируемых поверхностей это невозможно, поэтому они двусторонние. Но для поверхности в 4-мерном пространстве нормальных направлений в любой точке бесконечно много, поэтому, как и для кривой в трехмерном пространстве, говорить о сторонах не имеет смысла.

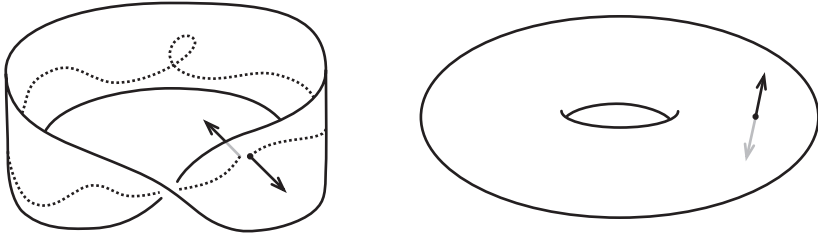


Рис. 16.12. В трехмерном пространстве лента Мёбиуса односторонняя, а тор двусторонний

Лента Мёбиуса – не единственная неориентируемая поверхность. В 1882 году Клейн открыл еще одну, вообще не имеющую края, теперь она называется *бутылкой Клейна*¹³. На рис. 16.13 показано, как получить ее путем склеивания сторон квадрата. Нужно склеить противоположные стороны вместе; левая и правая склеиваются с перекручиванием, а верхняя и нижняя без перекручивания. Для построения бутылки Клейна склеим две одинаково ориентированные стороны, получится цилиндр. Если теперь свернуть цилиндр наподобие тора, то разные концы будут иметь противоположные направления. Но вместо того чтобы сразу склеивать их, мы должны «протащить» цилиндр через собственную стенку и вытащить наружу, так чтобы окружности оказались одинаково ориентированными.

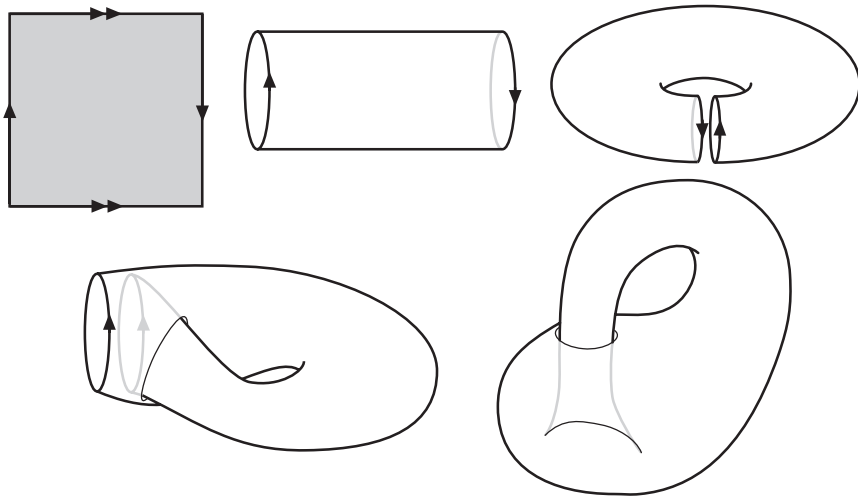


Рис. 16.13. Бутылка Клейна

Что значит «протащить»? Мы не имеем в виду буквальное действие. Бутылка Клейна – наш первый пример поверхности, которую нельзя по-

строить в трехмерном пространстве. Говоря, что бутылка проходит сквозь себя, мы имеем в виду обход в четвертом измерении. Чтобы проиллюстрировать эту малопонятную идею, снова понизим размерность. Пусть требуется провести на плоскости две непараллельные, но не пересекающиеся прямые. Очевидно, что это невозможно, но если бы было разрешено выйти за пределы двумерного листа бумаги и воспользоваться третьим измерением, то мы могли бы перед точкой пересечения перепрыгнуть через прямую (рис. 16.14). Таким образом, две прямые по существу плоские, но требуется чуть-чуть задействовать третье измерение. С помощью точно такого же приема мы можем построить и бутылку Клейна. Когда понадобится протащить горлышко сквозь стенку, мы совершим небольшой прыжок в четвертом измерении.



Рис. 16.14. Совершив обход с выходом в третье измерение, мы можем избежать пересечения прямых

Но вернемся к квадрату и создадим последнюю поверхность в этой главе. Представить ее наглядно труднее всего. Нужно склеить обе пары противоположных сторон, предварительно перекрутив каждую (рис. 16.15). Для начала деформируем квадратный лист резины, так чтобы он принял форму чаши. Будем внимательно следить за тем, какие участки границы с какими склеивать. Продолжим деформацию, так чтобы подлежащие склеиванию стороны оказались напротив друг друга и имели одинаковую ориентацию. Склеим одну пару сторон (на рис. 16.15 мы склеили стороны, помеченные двойными стрелками). Мы оказались в затруднительном положении – после такого склеивания оставшаяся пара сторон находится по разные стороны новой поверхности. Чтобы довершить склеивание, придется воспользоваться четвертым измерением, чтобы поверхность могла пройти сквозь себя. На рис. 16.15 приведено два разных представления этой странной неориентируемой поверхности, которая называется *проективной плоскостью*.

Впервые проективная плоскость возникла не в этом контексте – как объект, полученный склеиванием поверхностей. Как вытекает из самого названия, это был предмет изучения проективной геометрии – геометрической системы, в которой любые две прямые, даже параллельные, пересекаются в какой-то точке. Клейн и Людвиг Шлефли (1814–1895) первыми поняли, что проективная плоскость неориентируема.

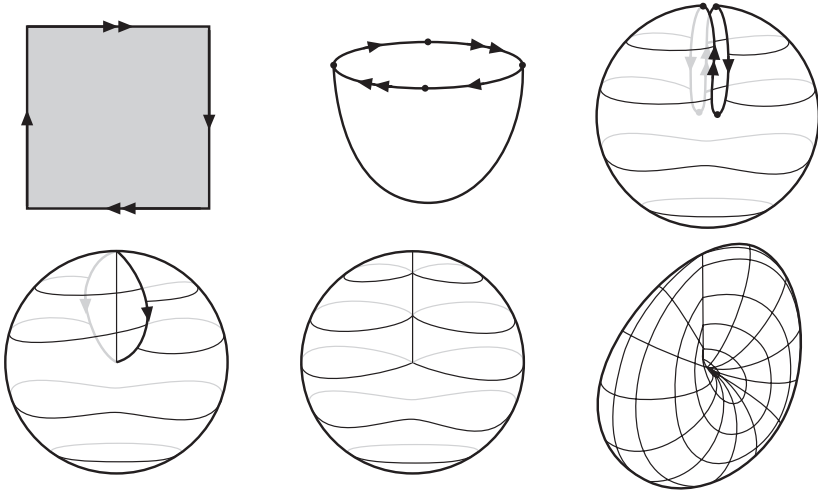


Рис. 16.15. Проективная плоскость

В приложении А показано, как склеить из бумаги цилиндр, тор, ленту Мёбиуса, бутылку Клейна и проективную плоскость.

Клейн предложил один метод создания сложных поверхностей из более простых – попарное склеивание сторон многоугольников. А сейчас мы представим другой способ. Начнем со сферы и будем приклеивать к ней цилиндрические ручки, чтобы из ориентируемых поверхностей и лент Мёбиуса делать неориентируемые поверхности.

Как видно по рис. 16.16, чтобы добавить к поверхности ручку, нужно вырезать из нее два диска и приклеить к краям дырок концы цилиндра. Сфера с одной ручкой – это тор. Для построения двойного тора нужно добавить еще одну ручку, а для построения тора с g дырками – добавить g ручек.

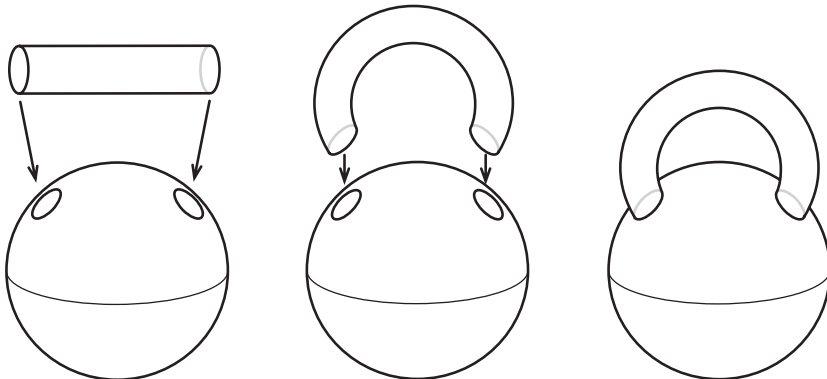


Рис. 16.16. Сфера с ручкой (тор)

Количество ручек на такой поверхности тесно связано с топологической величиной – *родом*. Родом ориентируемой поверхности (с краем или без) называется максимальное число замкнутых непересекающихся кривых, не разделяющих поверхность на несвязные части.

Для иллюстрации этого понятия рассмотрим сферу. Разрез по любой простой замкнутой кривой разделяет сферу на две части. Это еще одно применение теоремы Жордана – как и на плоскости, простая замкнутая кривая делит сферу на две области. Поэтому род сферы равен 0. С другой стороны, поверхность тора можно разрезать вдоль петли, так что она останется связной (рис. 16.17), но после первого разреза найти еще одну такую замкнутую кривую невозможно. Поэтому род тора равен 1.

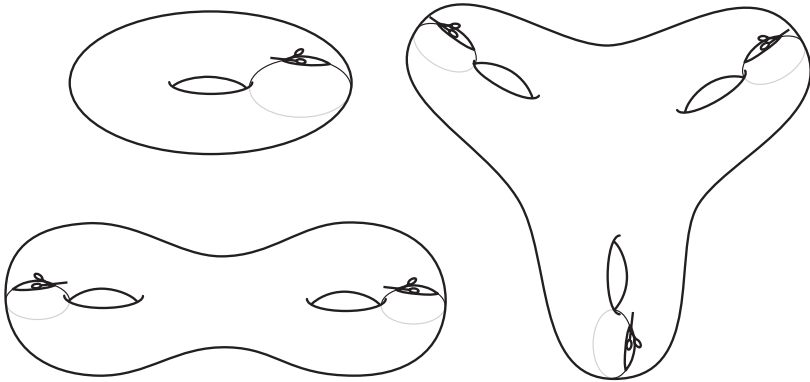


Рис. 16.17. Поверхности рода 1, 2 и 3

Род сферы с ручками просто равен числу ручек. Двойной тор имеет род 2, и в общем случае род тора с g дырками равен g . Понятие рода поверхности дает строгий способ определения числа туннелей Люилье. Можно было бы определить род и для неориентируемых поверхностей, и некоторые так и делают. Но поскольку род тесно связан с количеством дырок в торе, то обычно в неориентируемом случае он не используется.

Созданию ориентируемых поверхностей с помощью добавления ручек есть аналог в неориентируемом случае. Чтобы разобраться в этой процедуре, мы должны будем вернуться к ленте Мёбиуса. Одним из ее отличительных свойств является наличие единственного края, эквивалентного окружности. Обычно ленту Мёбиуса рисуют так, что эта окружность дважды обвивает скрученный цилиндр. Наша цель – деформировать ленту Мёбиуса, так чтобы ее край выглядел как обычная, а не дважды скрученная окружность. Очевидно, что для этого упражнения топологической йоги придется выйти в четвертое измерение.

На рис. 16.18 мы видим деформированную таким образом ленту Мёбиуса. Заметим, что эта фигура пересекает самое себя по целому отрезку

прямой. Самопересечение в верхней части этой ленты Мёбиуса с верхней горбушкой и с перекрещивающейся поверхностью внизу часто называют *зонтиком Уитни* в честь тополога Хасслера Уитни. Это странное представление ленты Мёбиуса называется *скрещенным колпаком*. Сходство с проективной плоскостью должно быть очевидно, потому что скрещенный колпак – это попросту проективная плоскость с вырезанным диском.

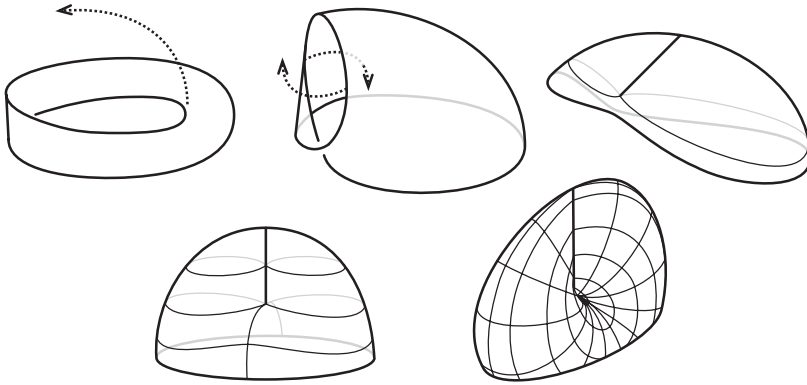


Рис. 16.18. Лента Мёбиуса – то же самое, что скрещенный колпак

Подобно тому, как ориентируемые поверхности создаются путем присоединения ручек, неориентируемые можно создавать путем присоединения лент Мёбиуса. Для этого вырежем из поверхности диск и приклеим кольцевой край ленты Мёбиуса к краю дырки. На рис. 16.19 видно, что наглядно представить это склеивание проще, если заменить обычную ленту Мёбиуса скрещенным колпаком. Мы создаем проективную плоскость, добавляя к сфере один скрещенный колпак. По-другому можно сказать, что проективная плоскость – это лента Мёбиуса с приклеенным к ее краю диском.

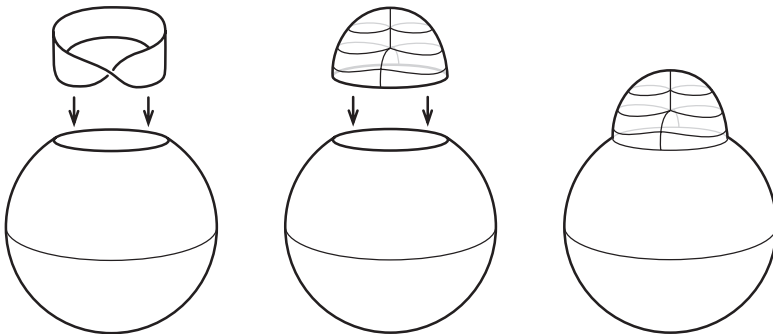


Рис. 16.19. Сфера со скрещенным колпаком (создание проективной плоскости)

Хотя представить это еще сложнее, сфера с двумя скрещенными колпаками есть не что иное, как бутылка Клейна. Эквивалентно, бутылку Клейна можно получить, склеив краями две ленты Мёбиуса. Приклеивание более двух скрещенных колпаков к сфере порождает еще более странные поверхности.

Теперь у нас есть два способа построения ориентируемых и неориентируемых поверхностей. В следующей главе мы рассмотрим, как к таким поверхностям применяется формула Эйлера. Мы также познакомимся с теоремой о классификации поверхностей, которая утверждает, что любую замкнутую поверхность можно получить добавлением к сфере ручек и скрещенных колпаков.

Глава 17

Разные или одинаковые?

Очень часто повторяют, что Геометрия – это искусство хороших рассуждений о плохо нарисованных фигурах; и все же эти фигуры, чтобы не вводить нас в заблуждение, должны удовлетворять некоторым свойствам; пропорции могут быть сильно искажены, но относительные положения различных частей нарушать не следует.

– Пуанкаре во введении к *Analysis Situs*¹

Один из самых часто задаваемых вопросов в математике: одинаковы ли два математических объекта X и Y ? В разных контекстах слово «одинаковые» может означать разные вещи. Часто одинаковые – то же, что равные, например выражение $5 \cdot 4 + 6 = 23$ и число 18 или многочлены $x^2 + 3x + 2$ и $(x + 2)(x + 1)$. В других случаях одинаковость и равенство – разные вещи. Для моряка, ориентирующегося по компасу, два угла одинаковы, если они отличаются на 360° (т. е. 30° – то же, что 390°). Геометр может сказать, что два треугольника одинаковы, если они конгруэнтны или, быть может, подобны.

В топологии критерии одинаковости слабее, чем в геометрии. Тут в игру вступает аналогия с резиновым листом. Интуитивно, если одну фигуру можно непрерывно деформировать в другую, то они одинаковы. Сгибание, растяжение, перекручивание и сминание не изменяют топологию фигуры. Например, окружность на рис. 17.1 одинакова с клубком справа от нее. С другой стороны, прокалывание фигуры, разрезание ее или приклеивание к себе самой, скорее всего, даст топологически отличную фигуру. Окружность – не то же самое, что две склеенные окружности, образующие восьмерку.

В первой половине XIX века математики приложили много усилий для классификации многогранников, удовлетворяющих формуле Эйлера, – так называемых эйлеровых многогранников. Мы пришли к расплывчатому пониманию того, что все многогранники, «похожие на сферу», являются эйлеровыми, а странные исключения Люилье и Гесселя таковыми не являются. Оказывается, что формула Эйлера применима к любому многограннику,

топологически эквивалентному сфере. Куб, любое платоново или архимедово тело и даже некоторые невыпуклые многогранники можно деформировать в сферическую поверхность (рис. 17.2). Неэйлеровы многогранники, например, образованные соединением двух многогранников вдоль ребра или имеющие форму тора, топологически не эквивалентны сфере.

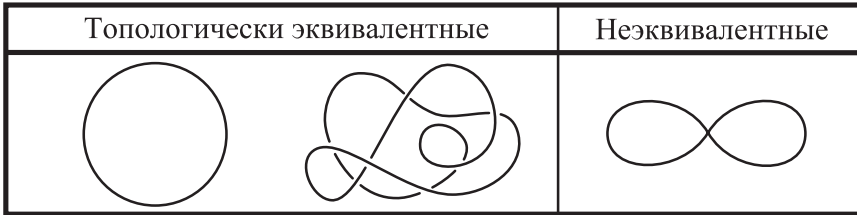


Рис. 17.1 Этот клубок топологически эквивалентен окружности, а восьмерка неэквивалентна

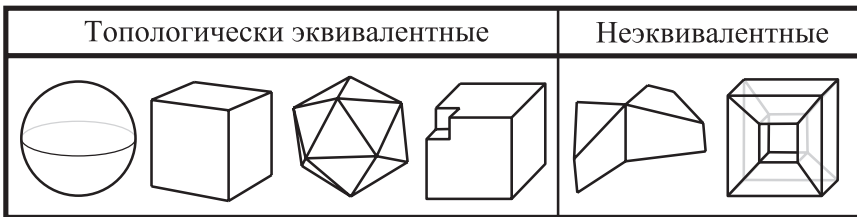


Рис. 17.2. Многогранники, топологически эквивалентные и неэквивалентные сфере

Может показаться, что изучение этих фигур интуитивно очевидно, но поразительно, насколько часто мы сталкиваемся с результатами, противоречащими интуиции. Например, на рис. 17.3 мы начали с двойного тора, подвешенного на веревке, проходящей через одну из его дырок. Путем топологических манипуляций (без разрезания или склеивания!) мы приходим к результату, который поначалу кажется невозможным, – двойному тору, протетому за обе дырки.

В главе 16 мы видели разницу между внешней и внутренней размерностями. Подобную терминологию можно было использовать и в этом контексте. Примеры, приведенные выше в этой главе, обладают тем, что можно было бы назвать внешней топологией, поскольку одну фигуру можно деформировать в другую в трехмерном пространстве. Математики называют две фигуры с одинаковой внешней топологией *изотопическими*. Изотопия – вроде бы подходящий выбор для определения топологической «одинаковости», но в действительности топологи хотят больше свободы. Нам нужно менее ограничительное определение эквивалентности.

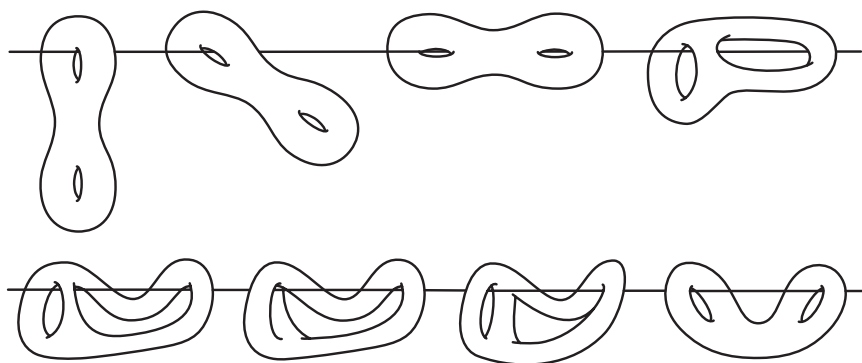


Рис. 17.3. Фокус с двойным тором на бельевой веревке

Чтобы две фигуры были топологически эквивалентными, они должны иметь одинаковую внутреннюю топологию. Если две поверхности эквивалентны, то каким бы умным ни был обитающий на поверхности муравей, он не сможет отличить одну от другой, не покидая поверхности. Можно найти две эквивалентные поверхности такие, что одну невозможно деформировать в другую. Таким образом, аналогия на основе резинового листа несовершенна.

Чтобы понять это новое определение, придется вернуться к разрезанию и склеиванию. Хотя обычно разрезание и склеивание действительно изменяют топологию поверхности, это верно не всегда. Есть важное исключение: разрезать фигуру, а затем склеить отдельные куски, так чтобы разрезы точно совпали. В этом случае топология не изменится. Если разрезать тор поперек, так чтобы получился цилиндр, затем завязать цилиндр в узел и снова склеить (как на рис. 17.4), то получившаяся фигура топологически по-прежнему эквивалентна тору. Заметим, что завязанный в узел тор нельзя получить из исходного путем деформаций в трехмерном пространстве – эти фигуры не изотопические. Внутренняя топология одинакова, но внешняя различается. С другой стороны, никаким способом невозможно разрезать, деформировать и снова склеить тор, так чтобы получился двойной тор. Достаточно умный муравей сможет доказать, что они топологически различны (и очень скоро мы увидим, как именно).

Точное определение топологической «одинаковости» выходит за рамки этой книги. По существу, два топологических объекта одинаковы, если существует взаимно однозначное соответствие между их точками, сохраняющее близость, – близким точкам одного объекта соответствуют близкие точки другого. Это понятие «одинаковости» было введено Мёбиусом, который называл соответствие «элементарной связью»². В настоящее время такое соответствие называют *гомеоморфизмом*. Таким образом, на языке топологов два объекта одинаковы, если они *гомеоморфны*.



Рис. 17.4. Фигуры, топологически эквивалентные и неэквивалентные тору

Рассмотрим три петли из фокуса с афганскими лентами в главе 16. Одна не перекручена вовсе, вторая перекручена один раз, а третья – два раза. Очевидно, что внешняя топология всех трех различна. Но, согласно нашему эвристическому правилу, третья фигура гомеоморфна неперекрученной цилиндрической ленте, поскольку если разрезать цилиндр и дважды перекрутить его, то края разрезов можно будет правильно совместить перед склеиванием (рис. 17.5). Будем называть третью фигуру скрученным цилиндром. Для ленты Мёбиуса это не так. Если разрезать цилиндр и перекрутить его один раз, то края разреза нельзя будет совместить правильно. Поэтому, несмотря на поверхностное сходство между лентой Мёбиуса и скрученным цилиндром, они негомеоморфны.

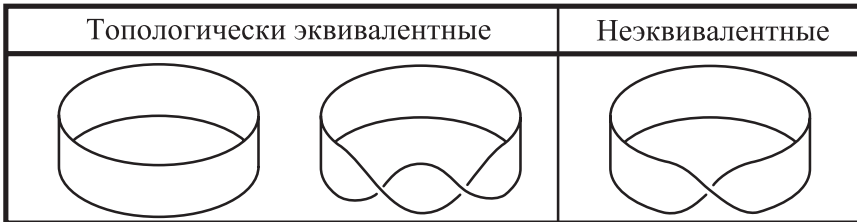


Рис. 17.5. Дважды перекрученная полоса гомеоморфна цилиндру, а перекрученная один раз – нет

Хотя интуиция подсказывает, что лента Мёбиуса негомеоморфна цилиндру (скрученному или нет), доказательства мы не дали. Да, это кажется маловероятным, но, быть может, существует хитрый способ разрезания, который перевел бы одну фигуру в другую. Фокус с двойным тором на веревке уже научил нас, что не всегда можно доверять внутреннему чутью, но в данном случае интуиция не подвела – фигуры негомеоморфны.

Топологическим инвариантом называется ассоциированное с поверхностью свойство или математическая сущность, которая зависит только от топологии поверхности. Топологический инвариант может быть числом,

например числом краев. Если две поверхности гомеоморфны, то число краев у них должно быть одинаково. На практике это утверждение полезнее в контрапозитивной форме: если у двух поверхностей разное число краев, то они не могут быть гомеоморфными. Поскольку край цилиндра состоит из двух компонент, а край ленты Мёбиуса – из одной, то они негомеоморфны.

Еще одним топологическим инвариантом является внутренняя размерность: она позволяет отличить сферу (двумерную поверхность) от окружности (одномерной). Мы продолжим обсуждение размерности в главе 22.

Топологическим инвариантом, а точнее *топологическим свойством*, является также ориентируемость. Две топологически одинаковые поверхности либо обе ориентируемые, либо обе неориентируемые. По-другому то же самое можно выразить, сказав, что если одна поверхность ориентируемая, а другая нет, то они не могут быть гомеоморфными. Нетрудно видеть, что цилиндр и скрученный цилиндр ориентируемы, а лента Мёбиуса – нет.

Согласно нашим правилам разрезания и склеивания, полоска бумаги, перекрученная четное число раз и затем склеенная, топологически эквивалентна цилиндру, а перекрученная нечетное число раз – ленте Мёбиуса. Полоски с четным числом перекрутов ориентируемы, и их край состоит из двух компонент, а полоски с нечетным числом перекрутов неориентируемы, а их край состоит из одной компоненты, так что они гомеоморфны друг другу. Заметим, кстати, что у каждой перекрученной полоски есть зеркальный близнец. Перекручивать полоску перед склеиванием можно по часовой стрелке и против часовой стрелки.

Ориентируемость, размерность и количество компонент края – три важных топологических инварианта. Еще одним топологическим инвариантом, пожалуй, самым важным из всех, является величина $V - E + F$. Пусть дана поверхность S , разбитая на V вершин, E ребер и F граней (конечно, нужно по-прежнему избегать кольцеобразных граней). Определим *эйлерову характеристику* S как число $V - E + F$. Обычно эту величину обозначают греческой буквой χ : $\chi(S) = V - E + F$.

Эйлерова характеристика
является топологическим инвариантом поверхности.

Говоря, что эйлерова характеристика – топологический инвариант, мы имеем в виду, что у каждой поверхности своя формула Эйлера. Например, на сфере на рис. 17.6 имеется 62 вершины, 132 ребра и 72 грани, поэтому ее эйлерова характеристика равна

$$\chi(\text{сфера}) = 62 - 132 + 72 = 2.$$

Как мы знаем, это верно для любого разбиения сферы или чего-то, гомеоморфного сфере.

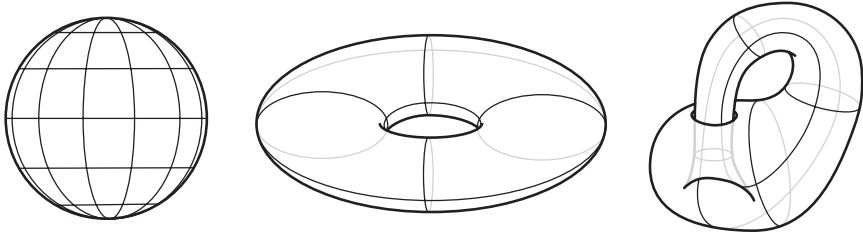


Рис. 17.6. Разбиения сферы, тора и бутылки Клейна

У тора на рис. 17.6 имеется 8 вершин, 16 ребер и 8 граней, поэтому его эйлерова характеристика равна

$$\chi(\text{тор}) = 8 - 16 + 8 = 0.$$

Аналогично у бутылки Клейна на рис. 17.6 8 вершин, 16 ребер и 8 граней, поэтому

$$\chi(\text{бутылка Клейна}) = 8 - 16 + 8 = 0.$$

Доказательство того, что эйлерова характеристика – топологический инвариант, проводится в несколько шагов. Сначала нужно показать, что любую поверхность можно разбить на конечное число вершин, ребер и граней. То есть не существует поверхностей настолько странных, что для них не найдется конечного разбиения (именно здесь используется предположение о компактности, обсуждавшееся в главе 6, – у евклидовой плоскости и открытого единичного диска нет конечного разбиения, но они и не рассматриваются). В случае многогранника разбиение уже задано – это просто его вершины, ребра и грани. Произвольная поверхность не имеет встроенного разбиения. Как ни странно, первое доказательство того, что любую поверхность можно разбить на вершины, ребра и грани, появилось только в 1924 году³.

Далее мы должны доказать, что эйлерова характеристика не зависит от выбора разбиения. Нетрудно видеть, что при добавлении вершин и ребер в разбиение величина $V - E + F$ не изменяется. Поэтому мы задаемся вопросом: если даны два разбиения P и P' , то можно ли добавить в них вершины и ребра, так что оба разбиения будут иметь одинаковое количество вершин, ребер, треугольных граней, квадратных граней, пятиугольных граней и т. д. и их относительное расположение будет одинаково? Эта проблема была поставлена довольно рано и получила название *Hauptvermutung* – «основная гипотеза комбинаторной топологии». Доказана она была поздно – только в 1943 году⁴, – и, как мы увидим в главе 23, в многомерных пространствах дело обстоит не так просто. Поскольку основная гипотеза верна для любой поверхности, эйлерова характеристика не зависит от выбора разбиения.

Наконец, мы должны показать, что две гомеоморфные поверхности имеют одинаковую эйлерову характеристику. Если поверхности S и S' го-

меоморфны и P – разбиение S , то, поскольку гомеоморфизм – взаимно однозначное соответствие между S и S' , мы можем воспользоваться им, чтобы перенести разбиение P на S' . Очевидно, что $\chi(S) = \chi(S')$. Таким образом, мы дали набросок полного доказательства нашей теоремы – что эйлерова характеристика является топологическим инвариантом.

Одна из самых трудных проблем при изучении формулы Эйлера для многогранников – понять влияние «туннелей» на величину $V - E + F$. Люилье и Гессель утверждали, что если многогранник имеет g туннелей, то $V - E + F = 2 - 2g$. В современной терминологии это означает, что эйлерова характеристика равна $2 - 2g$. Проблема в том, что они не определили понятие туннеля. Вместо туннелей мы теперь используем для описания этих топологических особенностей ручки (в смысле главы 16). Интересно, что они обращали внимание на дырки в телах, а мы – на ручки, ограничивающие эти дырки.

Рассмотрим, как на эйлерову характеристику влияет добавление ручки к сфере. Мы должны вырезать из сферы два диска, вместо которых можно будет прикрепить ручки. С равным успехом вместо дисков можно взять треугольные грани (рис. 17.7). Если в разбиении нет треугольных граней, разобьем какую-нибудь грань на треугольники. Мы знаем, что эйлерова характеристика сферы равна 2, а ручка является цилиндром, так что ее эйлерова характеристика равна 0. Поэтому до разрезания и склеивания мы имеем

$$V - E + F = \chi(\text{сфера}) + \chi(\text{ручка}) = 2 + 0 = 2.$$

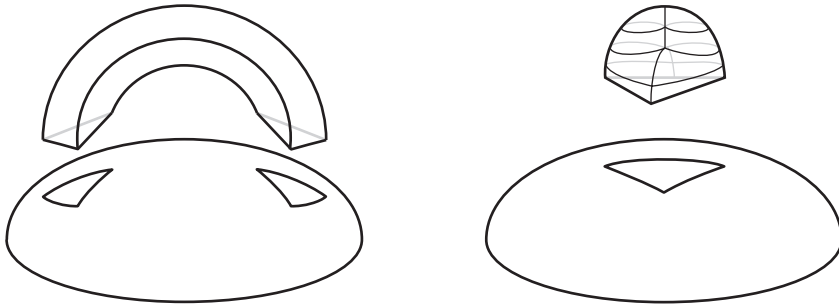


Рис. 17.7. Разбиения сферы, тора и бутылки Клейна

Вырезав два треугольника, мы теряем две грани. Приклеивая ручку к сфере, мы соединяем шесть пар ребер. Таким образом, двенадцать ребер превращаются в шесть. После разрезания и склеивания V и E уменьшаются на шесть, а F уменьшается на два, так что $V - E + F$ уменьшается на два. Следовательно,

$$V - E + F = \chi(\text{сфера}) + \chi(\text{ручка}) - 2 = 2 - 2 = 0.$$

Разумеется, мы знаем, что сфера с ручкой – это тор, так что результат не вызывает удивления.

Такое же рассуждение показывает, что при добавлении каждой новой ручки эйлерова характеристика уменьшается на 2. Поэтому мы доказали наблюдение Люилье:

$$\chi(\text{сфера с } g \text{ ручками}) = 2 - 2g.$$

Аналогично можно вычислить, как влияет добавление скрещенного колпака. Напомним, что $\chi(\text{скрещенный колпак}) = \chi(\text{лента Мёбиуса}) = 0$. Поскольку краем любого скрещенного колпака является одна окружность, мы должны удалить из сферы только одну грань перед добавлением колпака. Снова предположим, что эта грань треугольная. Рассуждаем так же, как и выше: при добавлении скрещенного колпака количество ребер и вершин уменьшается на 3, а количество граней – на 1. Поэтому величина $V - E + F$ уменьшается на 1. Следовательно, для сферы с одним скрещенным колпаком имеем

$$V - E + F = \chi(\text{сфера}) + \chi(\text{скрещенный колпак}) - 1 = 1.$$

Мы делаем вывод, что эйлерова характеристика проективной плоскости (сферы с одним скрещенным колпаком) равна 1. При добавлении s скрещенных колпаков получаем

$$\chi(\text{сфера с } s \text{ скрещенными колпаками}) = 2 - s.$$

Теперь мы знаем, как вычислить эйлерову характеристику любой поверхности, которую можно получить из сферы добавлением ручек и скрещенных колпаков. Остается важный вопрос: существуют ли поверхности, которые нельзя получить таким способом? Иначе говоря, можно ли описать все возможные поверхности в терминах ручек и скрещенных колпаков? На математическом жаргоне вопрос звучит так: можно ли *классифицировать* все поверхности?

В математике теоремы классификации обычно трудны или вообще невозможны. Неудивительно, что Эйлер так и не довел до конца свою классификацию многогранников. Но иногда классифицировать математические объекты удается. Ведь классифицировал же Теэтет все правильные многогранники, а Архимед – полуправильные многогранники.

Удивительно, что классифицировать поверхности (с краем и без края) можно. Каждая замкнутая поверхность гомеоморфна сфере с ручками или сфере со скрещенными колпаками. То есть каждая ориентируемая поверхность топологически эквивалентна тору с каким-то числом дырок, а каждая неориентируемая поверхность – сфере с одной или большим числом прикрепленных к ней лент Мёбиуса. На самом деле теорема даже сильнее. Если дана произвольная замкнутая поверхность, для которой известна эйлерова характеристика и ориентируема она или нет, то эту поверхность можно точно идентифицировать.

Теорема классификации поверхностей

Замкнутая поверхность однозначно определяется эйлеровой характеристикой и ориентируемостью. Ориентируемая поверхность гомеоморфна сфере с g ручками для некоторого $g \geq 0$. Неориентируемая поверхность гомеоморфна сфере с c скрещенными колпаками для некоторого $c > 0$.

Например, предположим, что S – ориентируемая замкнутая поверхность с эйлеровой характеристикой -6 . Поскольку S ориентируемая, мы знаем, что она гомеоморфна сфере рода g (сфере с g ручками), где $-6 = \chi(S) = 2 - 2g$. Следовательно, S гомеоморфна тору с 4 дырками. Аналогично, если T – неориентируемая замкнутая поверхность с эйлеровой характеристикой -4 , то она гомеоморфна сфере с c скрещенными колпаками, где $-4 = \chi(T) = 2 - c$. Иными словами, T гомеоморфна сфере с 6 скрещенными колпаками.

Похожая теорема классификации имеет место для поверхностей с краем. Любая поверхность с краем эквивалентна одной из этих стандартных поверхностей с одним или несколькими вырезанными дисками. Эйлерова характеристика, ориентируемость и число компонент края определяют поверхность однозначно. Единственной ориентируемой поверхностью с эйлеровой характеристикой 0 и двумя компонентами края является цилиндр, единственной неориентируемой поверхностью с эйлеровой характеристикой 0 и одной компонентой края – лента Мёбиуса и т. д. (см. табл. 17.1).

Таблица 7.1. Эйлерова характеристика, ориентируемость и число компонент края для различных поверхностей

Поверхность S	$\chi(S)$	Ориентируемая	Компонент края
Сфера	2	Да	0
Тор	0	Да	0
Тор с двумя дырками	-2	Да	0
Тор с g дырками	$2 - 2g$	Да	0
Диск	1	Да	1
Цилиндр/кольцо	0	Да	2
Бутылка Клейна	0	Нет	0
Проективная плоскость	1	Нет	0
Сфера с c скрещенными колпаками	$2 - c$	Нет	0
Лента Мёбиуса	0	Нет	1

В некотором смысле первым, кто начал процесс классификации (в 1850-х годах), был Бернхард Риман (1826–1866). Риман – один из самых знаменитых математиков XIX столетия. Он получил степень доктора в Гёттингенском университете под руководством Гаусса в самом конце карьеры последнего. В то время Гёттинген не был центром математики в Германии

(Гаусс читал там только вводные курсы), поэтому над диссертацией Риман работал в основном в Берлинском университете.



Рис. 17.8. Бернхард Риман

Его блестящие способности проявились очень рано. На Гаусса, который нечасто давал лестные характеристики, огромное впечатление произвела первая публичная лекция Римана, которую тот прочел в 1854 году. Вот как Фрейденталь описывал эту лекцию:

Одно из выдающихся событий в истории математики: юный робкий Риман читает престарелому легендарному Гауссу, который не переживет следующую весну, лекцию о следствиях идей, которые старик, должно быть, считал своими и которые втайне лелеял. В. Вебер вспоминает, как был ошеломлен Гаусс и с каким необычайным чувством он по пути домой хвалил глубину мыслей Римана⁵.

Большинство работ Римана относятся к комплексному анализу – изучению комплексных чисел и комплексных функций. Комплексное число имеет вид $a + bi$, где a и b – вещественные, а $i = \sqrt{-1}$. Именно стремление полностью понять природу комплексных функций лежало в основе большей части его работ – по теории функций, геометрии, дифференциальным уравнениям в частных производных и топологии. Некоторые работы были опубликованы посмертно, в т. ч. трактат по интегрированию, идеи которого теперь входят в любой вводный курс математического анализа. Печально, что жизнь этого оригинального мыслителя оборвалась из-за туберкулеза всего в сорок лет.

Поверхностями Риман заинтересовался в связи с комплексным анализом, а не с теорией многогранников. Поскольку комплексные числа имеют две степени свободы (a и b), множество комплексных чисел образует дву-

мерную плоскость – она выглядит как евклидова плоскость, только одна ось вещественная, а другая мнимая.

Риман изучал многозначные комплексные функции. Например, рассмотрим функцию $f(z) = \sqrt[4]{z}$. Чему равно значение $f(16)$? Это должно быть число w , обладающее тем свойством, что $w^4 = 16$. Нетрудно видеть, что в комплексной области таких чисел четыре: $2, -2, 2i, -2i$. Следовательно, одному входу соответствует четыре выхода. Интерпретировать это можно, сказав, что график функции имеет несколько уровней, или ветвей. Риман остроумно решил рассматривать такой граф как поверхность, которая теперь называется *римановой поверхностью*. У римановых поверхностей весьма интересная топология, но они всегда ориентируемые.

Именно отсюда берут начало исследования Римана по топологии. Он ввел понятие рода поверхности (и связанное с ним понятие *связности*, которое мы обсудим в главе 22). Он сгруппировал ориентируемые поверхности по роду и интуитивно понял, что две топологически эквивалентные поверхности должны иметь одинаковый род⁶. Несмотря на эту группировку похожих поверхностей, он не увидел обратного: что две поверхности одного рода топологически эквивалентны.

Первым, кто сформулировал и доказал теорему классификации для ориентируемых поверхностей, был Мёбиус. В распоряжении Мёбиуса был инструмент, которого не было у Римана. В 1863 году он развил идею элементарной связи (то, что мы теперь называем гомеоморфизмом). Поэтому он мог с некоторой точностью сказать, что такое «две поверхности одинаковы». Мёбиус показал, что любая ориентируемая поверхность топологически эквивалентна одной из нормальных форм, показанных на рис. 17.9: сфере, тору, двойному тору и т. д.⁷

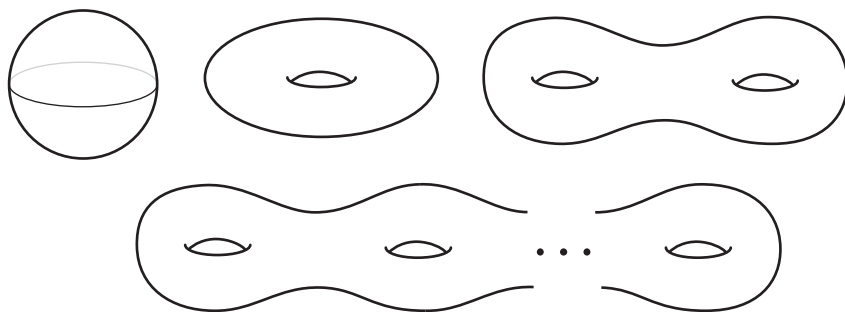


Рис. 17.9. Нормальные формы ориентируемых поверхностей по Мёбиусу

В 1866 году Камиль Жордан доказал, что любые две ориентируемые поверхности с краем гомеоморфны тогда и только тогда, когда имеют одинаковый род и одинаковое число компонент края⁸. Первую полную

формулировку и доказательство теоремы классификации, в т. ч. для неориентируемых поверхностей, дал Дик в 1888 году⁹. Однако это было еще до современных определений поверхности и гомеоморфизма. Первое по-настоящему строгое доказательство теоремы классификации дали Макс Ден (1878–1952) и Поул Хеегард (1871–1948) в 1907 году¹⁰.

Мы не будем доказывать теорему классификации, но есть целый ряд вполне доступных изложений. Некоторые сводятся к построению поверхности для получения сферы с ручками и скрещенными колпаками. Например, доказательство ZIP («zero irrelevancy proof») Джона Конвея начинается с кучи треугольников – рассыпанных кусочков пазла триангулированной поверхности. По мере того как каждый новый треугольник помещается на расширяющуюся поверхность, она остается сферой с ручками, скрещенными колпаками и краем¹¹. Другие доказательства построены ровно наоборот – начав с поверхности, мы вырезаем из нее цилиндры и ленты Мёбиуса (т. е. ручки и скрещенные колпаки) и на каждом шаге заполняем дырки дисками, пока не получится сфера.

На первый взгляд может показаться, что род ориентируемой поверхности определить легко – ведь это же просто сфера с ручками. Но не всегда поверхность выглядит как одна из нормальных форм Мёбиуса. Например, первая поверхность на рис. 17.10 – пример сферы с 4 ручками, она гомеоморфна тору с 4 дырками.

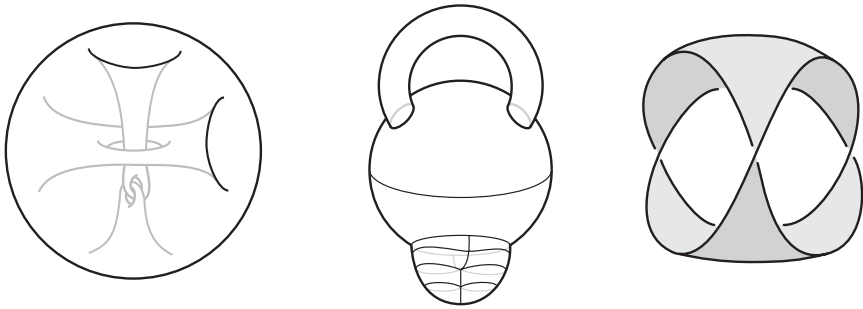


Рис. 17.10. Необычные поверхности

Теорема классификации говорит, что любая поверхность гомеоморфна сфере с ручками или сфере со скрещенными колпаками. Но ничего не говорит о комбинации того и другого. Например, вторая картинка на рис. 17.10 – сфера с одной ручкой и одним скрещенным колпаком. Как ее классифицировать? Согласно приведенным выше вычислениям, эйлерова характеристика сферы равна 2, добавление ручки увеличивает ее на 2, а добавление скрещенного колпака уменьшает на 1. Поэтому эйлерова характеристика этой поверхности равна -1 . Из-за наличия скрещенного колпака мы знаем, что поверхность неориентируемая. По теореме клас-

сификации, она гомеоморфна сфере с тремя скрещенными колпаками, которая называется *поверхностью Дика*¹².

Беглый взгляд на третью поверхность на рис. 17.10 показывает, что она двусторонняя (ориентируемая) и содержит только одну компоненту края. Интересно, что сам край образует так называемый трилистный узел. В следующей главе мы увидим, что любой узел можно получить как край ориентируемой поверхности с одной компонентой края. Построив разбиение этой поверхности и посчитав вершины, ребра и грани, мы найдем, что ее эйлерова характеристика равна -1 . По теореме классификации поверхностей с краем, эта поверхность гомеоморфна тору с вырезанным диском.

И напоследок вернемся к большому икосаэдру и большому додекаэдру – многогранникам Кеплера–Пуансо с треугольными и пятиугольными гранями (см. главу 15). Хотя с первого взгляда этого не скажешь, они являются ориентируемыми поверхностями (пересекающимися в трехмерном пространстве). Эйлерова характеристика большого икосаэдра равна 2 , поэтому он гомеоморфен сфере, а большого додекаэдра -6 , поэтому он гомеоморфен тору с 4 дырками.

Глава 18

Узловатая проблема

О время, здесь нужна твоя рука:

Мне не распутать этого клубка!

– Вильям Шекспир,
«Двенадцатая ночь»¹

Одним из самых ранних топологических исследований было изучение узлов. Все мы знакомы с узлами. Они привязывают лодку к берегу, не дают свалиться с ног ботинкам и безнадежно запутывают кабели и провода рядом с компьютерами. Но это, строго говоря, не математические узлы. У математического узла нет свободных концов; это топологическая окружность в трехмерном евклидовом пространстве. (Чтобы превратить электрический удлинитель в математический узел, просто воткните вилку на одном его конце в розетку на другом.)

На рис. 18.1 показаны проекции шести математических узлов: *тривиальный узел*, *трилистник*, *восьмерка*, *печать Соломона*, *пряничный человечек* (за неимением общепринятого названия) и *квадратный узел*.

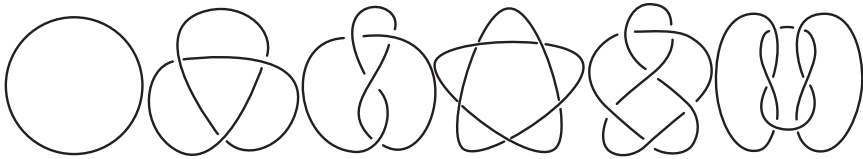


Рис. 18.1. Тривиальный узел, трилистник, восьмерка, печать Соломона, пряничный человечек и квадратный узел

В предыдущей главе мы подчеркивали, что топологов обычно интересуют внутренние, а не внешние свойства топологических объектов. Теория узлов – примечательное исключение. Узел интересен тем, как окружность располагается в пространстве, – своей внешней конфигурацией. Внутренне все узлы идентичны – каждый гомеоморфен окружности. Поэтому

при изучении узлов «одинаковый» не значит гомеоморфный. Два узла считаются одинаковыми, если один можно непрерывно деформировать в другой, т. е. если между ними существует изотопия. Первые три узла на рис. 18.2 изотопичны (все они эквивалентны тривиальному узлу). Изотопичны и последние два узла (оба эквивалентны трилистнику). Но, как мы увидим, тривиальный узел неизотопичен трилистнику.

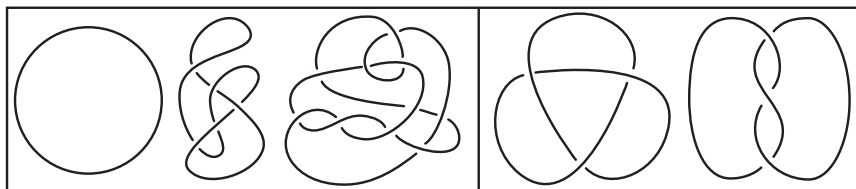


Рис. 18.2. Три проекции тривиального узла и две проекции трилистника

Главная цель теории узлов – их классификация. Как и для поверхностей, мы хотели бы найти признаки, позволяющие сказать, одинаковы два узла или различны. В идеале желательно, как и для поверхностей, составить исчерпывающий и не содержащий повторов список всех узлов. На данный момент полного списка еще не существует, но в этом направлении многое сделано. Скромная цель этой главы – разработать средства, с помощью которых можно было бы доказать, что все узлы на рис. 18.1 различны. Одно из таких средств требует классификации поверхностей и эйлеровой характеристики.

Изучение и использование узлов столь же старо, сколь само человечество. Для любого мыслимого применения изобретено великое множество морских узлов, петель, сращиваний и арканов. Во многих культурах узлы и их проекции – постоянные темы ювелирных украшений и художественных работ. Они также были важны в производстве тканей, ибо что такое кусок ткани, как не гигантский узел? Математическое изучение узлов – гораздо более молодая дисциплина; первое математическое исследование датируется XVIII веком. Топологическая значимость узлов была впервые осознана Александром-Теофилом Вандермондом (1735–1796) в 1771 году, всего через тридцать лет после выхода статьи Эйлера о кёнигсбергских мостах. Короткая статья Вандермонда «Remarques sur les problèmes de situation» (Замечания о проблемах положения) начинается словами:

Как бы ни была перекручена и запутана система нитей в пространстве, всегда можно получить выражение для вычисления ее размеров, однако на практике от этого выражения будет мало пользы. Ремесленника, плетущего кружево, сеть или еще какие-то узлы, интересуют не вопросы измерения, а вопросы положения; он видит то, каким способом нити переплетаются².

Несмотря на многообещающее начало, занялся он не узлами, а топологическим подходом к так называемой «задаче о ходе коня» в шахматах. И все же дал краткое описание того, как можно символически описать некоторые текстильные узоры.

Из его рисунков и заметок мы знаем, что Гаусс задумывался об узлах еще в 1794 году, но, увы, ничего не опубликовал на эту тему. В одной рукописной жемчужине, датированной 1833 годом, он привел двойной интеграл, который можно было бы использовать для вычисления *коэффициента зацепления* двух замкнутых кривых – топологической величины, показывающей, сколько раз кривые переплетаются друг с другом³.

А раз так, то, наверное, неудивительно, что Листинг, один из учеников Гаусса, действительно начал математически изучать узлы. Его вклад можно найти в монографии 1847 года «Топология»⁴, часто цитируемой сокровищнице топологических курьезов. Хотя Листинг не предложил классификацию всех узлов, его, очевидно, интересовали методы различения двух узлов. Например, он утверждал, что трилистник и его зеркальное изображение – не один и тот же узел. Но предпринятое им изучение узлов было проигнорировано точно так же, как изучение ленты Мёбиуса. В итоге возникновение теории узлов связывают не с Листингом, а с двумя шотландскими физиками, работавшими над новой теорией атома.

В 1867 году Уильям Томсон (1824–1907) сделал предположение, что атомы образованы вихрями, или узлами в эфире. Томсон, больше известный как лорд Кельвин, также ввел абсолютную температурную шкалу и участвовал в проектировании первого трансатлантического телеграфного кабеля (за эту работу он был посвящен в рыцари). Согласно Кельвину, каждому атому соответствовал свой узел или связанный набор узлов, а устойчивость атома объясняется устойчивостью узла при топологической деформации. Это остроумная, хотя и неправильная идея владела умами в течение двух десятилетий.

Модель атома Томсона побудила его приятеля Питера Гатри Тэйта заняться классификацией узлов. В 1877 году Тэйт начал составлять таблицу узлов – он полагал, что создает периодическую таблицу элементов. В конечном итоге этот взгляд на химию был развенчан, но Тэйт продолжил свое исследование. К 1900 году он и американский математик индийского происхождения Чарльз Ньютон Литтл (1858–1923) составили почти полный перечень узлов с десятью или меньшим числом пересечений (имеется в виду пересечение при изображении узла на плоскости – чуть ниже мы еще поговорим о терминологии).

Для классификации узлов Тэйт пользовался в основном своей превосходно развитой интуицией. В последующие годы математики придумали мириады изобретательных инструментов для строгой дифференциации узлов. Большая их часть – *инварианты узлов*. В главе 17 мы обсуждали топологические инварианты поверхностей. Для узлов инварианты играют

такую же роль. Инвариантом узла называется число или иная сущность, ассоциированная с узлом. Если инварианты двух узлов различны, то это должны быть разные узлы.

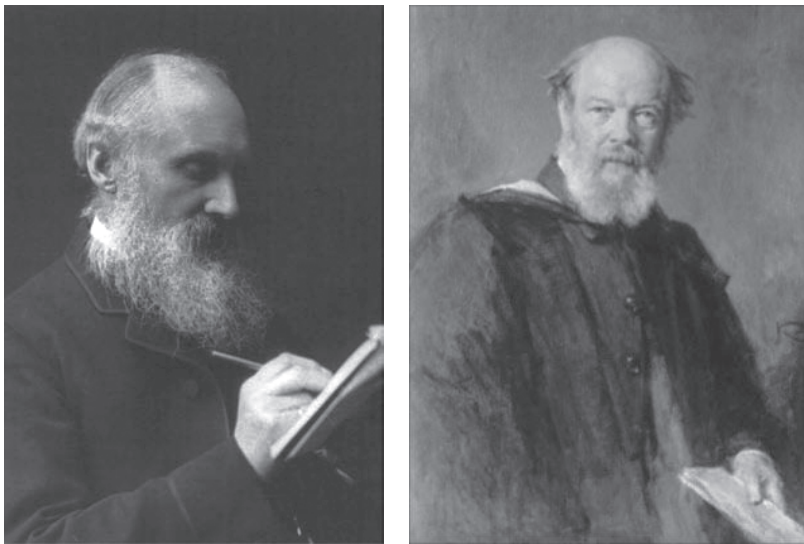


Рис. 18.3. Уильям Томсон (лорд Кельвин) и Питер Гатри Тэйт

Существует много инвариантов узлов, и некоторые описать очень легко. В этой главе мы познакомимся с несколькими инвариантами узлов, включая связанный с поверхностями и эйлеровой характеристикой.

Узел – это окружность, а окружность встречается в качестве края поверхностей. Удивительно, но можно найти поверхности с завязанным в узел краем. На рис. 18.4 мы видим, что тривиальный узел – это край диска (в этом нет ничего неожиданного), а трилистник – край трижды перекрученной ленты Мёбиуса. На рис. 17.10 мы видели еще один пример поверхности с краем в виде трилистника.

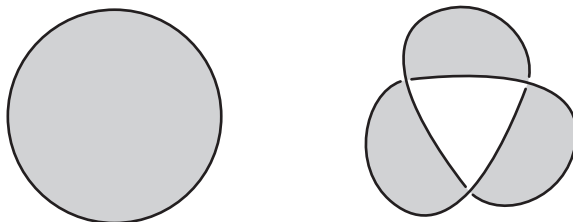


Рис. 18.4. Тривиальный узел – это граница диска, а трилистник – край трижды перекрученной ленты Мёбиуса

Замечательно не то, что можно найти поверхность с завязанным в узел краем, а то, что *любой* узел можно реализовать как край некоторой поверхности.

В качестве забавного эксперимента попробуйте создать поверхности с завязанными в узел краями из мыльных пузырей. Для этого изготовьте узел из жесткой проволоки (плечики для одежды подойдут для небольших узлов, хотя они слишком жесткие и недостаточно длинные для сложных узлов) и погрузите его в мыльный раствор. Проткните дырки, чтобы сформировать одну поверхность¹.

Трилистник на рис. 18.4 – край неориентируемой поверхности (напомним, что в трехмерном пространстве неориентируемая и односторонняя – синонимы). Подобной ситуации можно избежать – если дан произвольный узел, то можно построить ориентируемую поверхность, краем которой будет этот узел. Такая поверхность называется *поверхностью Зейферта* в честь Герберта Зейферта (1907–1996).



Рис. 18.5. Герберт Зейферт

Быть может, не менее удивительной, чем сама теорема, является простота построения таких поверхностей. Мы приведем элегантный алгоритм Зейферта, открытый им в 1934 году⁵.

Проиллюстрируем алгоритм на примере трилистника. Для начала выберем одну из двух возможных ориентаций узла, т. е. направление его обхода. Затем спроецируем узел на плоскость. Допустима почти любая

¹ Чтобы получались прочные пузыри, способные пролететь большое расстояние, рекомендуем взять 1 галлон (чуть меньше 4 литров) воды, 2/3 чашки пены для мытья посуды и 1 столовую ложку глицерина (его можно купить в любой аптеке). Для получения оптимальных результатов дайте раствору отстояться.

проекция. Мы хотим избежать «плохих» проекций, например когда три пряди пересекаются в одной точке или два участка веревки проецируются друг на друга и образуют множество, состоящее более чем из одной точки. Но в остальном проекция может быть сколь угодно сложной.

Затем воспользуемся этой проекцией, чтобы создать набор так называемых *окружностей Зейферта*. Начнем обходить узел, следуя выбранной ориентации. В каждой точке пересечения переходим на другую прядь, сохраняя направление обхода. Когда мы вернемся в исходную точку, получится окружность (см. рис. 18.6). Повторим процедуру для прядей, которые еще не обошли. Создадим диски, границами которых являются окружности Зейферта. В зависимости от проекции может оказаться, что одни окружности вложены в другие. В этом случае одни диски окажутся поверх других (как на рис. 18.6).

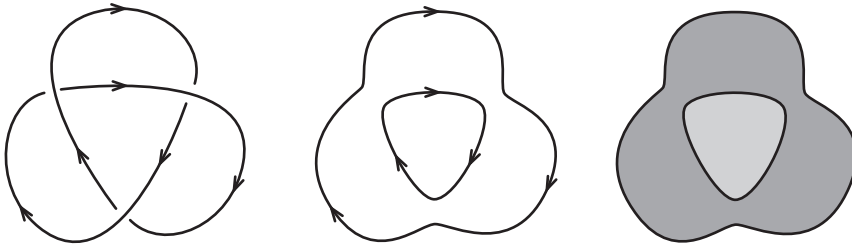


Рис. 18.5. Окружности Зейферта для трилистника и соответствующие диски

Теперь соединим диски вместе, прикрепив прямоугольные перекрученные ленты. Точнее, в каждом месте, где было пересечение, прикрепим ленту, перекрученную в направлении, определяемом исходным пересечением (см. рис. 18.7). Хотя сразу это и не очевидно, нетрудно доказать, что эта процедура всегда порождает ориентируемую поверхность с краем.

На рис. 18.8 показано, как завершается построение поверхности Зейферта для трилистника. А на рис. 18.9 весь процесс повторен для квадратного узла. Эта поверхность образована тремя дисками и шестью лентами.

Согласно теореме классификации, нам «известны» все возможные поверхности. Поверхность Зейферта – это ориентируемая поверхность с одной компонентой края. Поэтому она должна быть гомеоморфна сфере или тору с g дырками и вырезанным диском. Вот теперь мы в полной мере ощутили всю мощь теоремы классификации, поскольку поверхности Зейферта вовсе не выглядят как проколотые торы. Теоретически можно было бы приклеить диск к краю одной из поверхностей Зейферта и получить замкнутую поверхность, но для такого склеивания пришлось бы выйти в четвертое измерение.

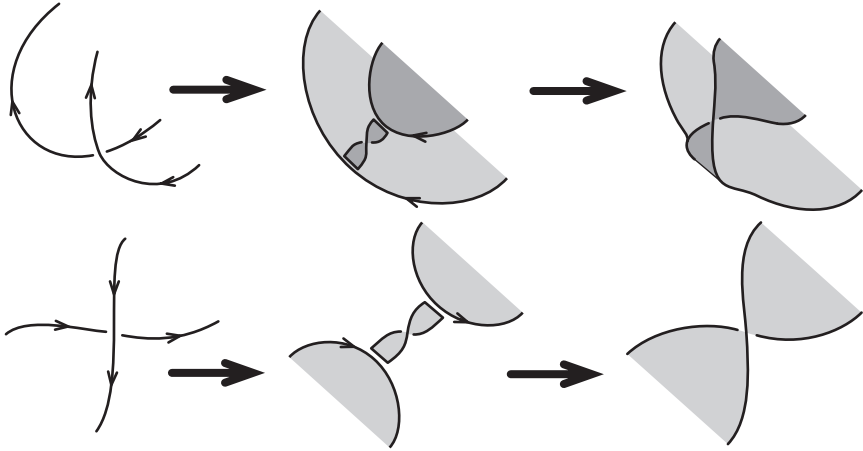


Рис. 18.7. Прикрепление перекрученной ленты

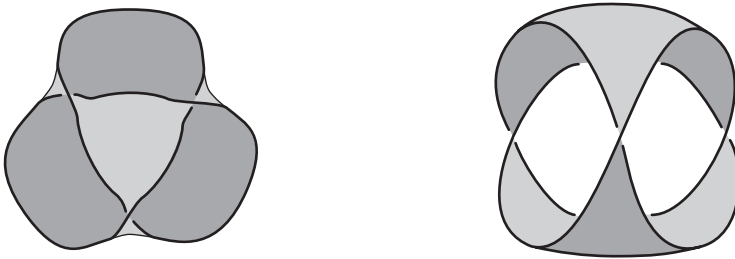


Рис. 18.8. Поверхность Зейферта для трилистника

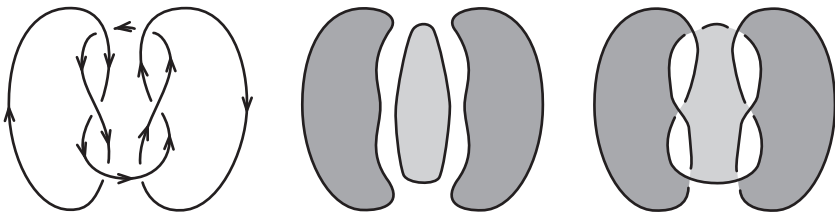


Рис. 18.9. Поверхность Зейферта для квадратного узла

Поскольку нам известно, что поверхность Зейферта ориентируемая и имеет один край, то для ее классификации нужно знать только эйлерову характеристику. Пусть S – поверхность Зейферта, построенная из d дисков и b лент. Так как эйлерова характеристика диска равна 1 (а значит, эйлерова характеристика d непересекающихся дисков равна d), достаточно понять, как влияет добавление ленты к поверхности. Предположим, что

мы прикрепляем оба конца ленты к поверхности с краем (необязательно связной). При этом добавляется одна грань, два ребра и ни одной вершины. В силу хорошо нам знакомой знакопеременной суммы, определяющей эйлерову характеристику, добавление ленты уменьшает эту величину на 1. Поэтому добавление b лент уменьшает ее на b .

Эйлерова характеристика поверхности Зейферта S , построенной из d дисков и b лент, равна $\chi(S) = d - b$.

Для построения поверхности Зейферта трилистника (рис. 18.8) понадобилось два диска и три ленты. Поэтому ее эйлерова характеристика равна -1 . Аналогично поверхность Зейферта квадратного узла состоит из трех дисков и шести лент, поэтому ее эйлерова характеристика равна -3 .

Если бы мы приклеили диск к краю поверхности Зейферта, то получили бы замкнутую поверхность рода g . Это действие добавляет грань, поэтому эйлерова характеристика такой замкнутой поверхности была бы на единицу больше характеристики поверхности Зейферта. Для поверхности Зейферта трилистника, показанной на рис. 18.8, эйлерова характеристика равна 0. Это должен быть тор – поверхность рода 1. Мы говорим, что эта поверхность Зейферта имеет род 1.

Ту же логику можно применить к любой поверхности Зейферта, состоящей из d дисков и b лент. Присоединив диск к краю, мы получим замкнутую ориентируемую поверхность S с эйлеровой характеристикой $\chi(S) = d - b + 1$. Поверхность S имеет род g , и $\chi(S) = 2 - 2g = d - b + 1$. Отсюда можно найти g .

Род поверхности Зейферта S , построенной из d дисков и b лент, равен $g = (1 - d + b)/2$.

Поверхность Зейферта квадратного узла имеет род $g = (1 - 3 + 6)/2 = 2$. Это тор с двумя дырками и вырезанным диском. На рис. 18.10 показаны поверхности Зейферта для печати Соломона, восьмерки и пряничного человечка. Поверхность Зейферта печати Соломона построена из двух дисков и пяти лент. Поэтому ее род равен $(1 - 2 + 5)/2 = 2$. Поверхность Зейферта восьмерки, состоящая из трех дисков и четырех лент, имеет род $(1 - 3 + 4)/2 = 1$. Поверхность Зейферта пряничного человечка, состоящая из трех дисков и шести лент, имеет род $(1 - 3 + 6)/2 = 2$.

Было бы хорошо, если бы род поверхности Зейферта был инвариантом узла. Проблема в том, что один и тот же узел может иметь несколько топологически различных поверхностей Зейферта (нужно только выбрать другую проекцию в самом начале процесса). Но необязательно отбрасывать эту идею полностью. Мы можем определить *род* узла как наименьший род

всех его возможных поверхностей Зейферта. Обозначим $g(K)$ так определенный род узла K .

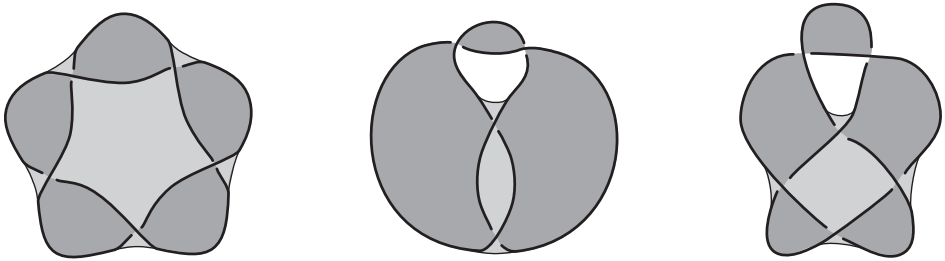


Рис. 18.10. Поверхности Зейферта печати Соломона, восьмерки и пряничного человечка

Тривиальный узел является краем диска, т. е. сферы с вырезанным диском, поэтому его род равен 0. Это единственный узел, ограничивающий диск, поэтому для любого нетривиального узла род будет положительным числом.

Это определение вызывает чувство некоторой неудовлетворенности. Хотя род – вполне корректный инвариант узла, на практике вычислить его нелегко. Мы построили поверхность Зейферта пряничного человечка и нашли, что ее род равен 2. Но верно ли, что это также род узла? Может, так, а может, и нет. Возможно, для этого узла существует другая поверхность Зейферта с родом 1. Не ясно, как доказать, что такой поверхности Зейферта нет в природе.

Но есть и хорошая новость – мы легко можем вычислить род широкого класса так называемых альтернирующих узлов. Проведите по проекции восьмерки на рис. 18.1 пальцем и следите за поведением в точках пересечения. Веревка проходит выше, ниже, выше, ниже, выше, ниже, выше и ниже – взаимное расположение в точках пересечения чередуется. Такая проекция называется альтернирующей. Проекция трилистника, печати Соломона и пряничного человечка также альтернирующие, а проекция квадратного узла – нет. Узел называется альтернирующим, если он имеет хотя бы одну альтернирующую проекцию. Данная проекция квадратного узла неальтернирующая, но это не значит, что сам узел не альтернирующий, потому что у него может существовать другая, *альтернирующая* проекция.

Все простейшие узлы альтернирующие. Любой узел с семью или меньшим числом пересечений альтернирующий, и лишь три узла с 8 пересечениями таковыми не являются (один из них показан на рис. 18.11). Однако с увеличением количества пересечений относительная доля альтернирующих узлов падает. Из 2404 простых узлов (что такое простой узел, мы

определим чуть ниже) с 12 или меньшим числом пересечений только 63 % альтернирующие. Из примерно 1,7 млн простых узлов с 16 или меньшим числом пересечений только 29 % альтернирующие⁶.

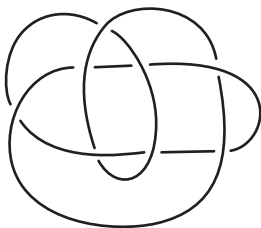


Рис. 18.11. Неальтернирующий узел с 8 пересечениями

Спасает нас теорема, доказанная в конце 1950-х годов Ричардом Г. Кроуэллом и Кунио Мурасуги⁷.

Гарантируется, что поверхность Зейферта S , построенная по альтернирующей проекции, имеет минимальный род.

Иными словами, поскольку трилистник, восьмерка, печать Соломона и пряничный человечек – альтернирующие узлы, можно с уверенностью сказать, что их род равен соответственно 1, 1, 2 и 2. Итак, ни один из этих четырех узлов не является тривиальным, а трилистник и восьмерка отличаются от печати Соломона и пряничного человечка. Сейчас читатель наверняка сможет доказать, что два узла, приведенных во введении (рис. 1.5), различны.

Теперь мы немного отвлечемся и определим род квадратного узла. Простые числа являются кирпичиками, из которых построены все положительные целые числа. Число $p > 1$ называется простым, если его единственными делителями являются оно само и 1, в противном случае число называется составным. Аналогично мы определим простые узлы – кирпичики, из которых состоят все узлы. Для этого нам понадобится способ «умножения» узлов.

Пусть даны узлы K и L , тогда их *произведение*, обозначаемое $K\#L$, строится следующим образом. Поместим проекции K и L рядом друг с другом (но так, чтобы они не пересекались). Разрежем внешние пряди обоих узлов и соединим все четыре конца, не создавая новых пересечений. На рис. 18.12 мы видим, что квадратный узел является произведением трилистника и его зеркального изображения (произведение двух трилистников называется бабушкиным узлом).

Узел M называется *простым*, если из того, что $M = K\#L$, следует, что K или L – тривиальный узел¹. Иными словами, узел простой, если его нельзя записать в виде произведения двух нетривиальных узлов. Нетривиальный узел, не являющийся простым, называется *составным*. Очевидно, что простота является инвариантом узла. Мы показали, что квадратный узел составной. Примем без доказательства, что трилистник, восьмерка, печать Соломона и пряничный человечек – простые узлы, поэтому ни один из них не может быть изотопичен квадратному узлу.

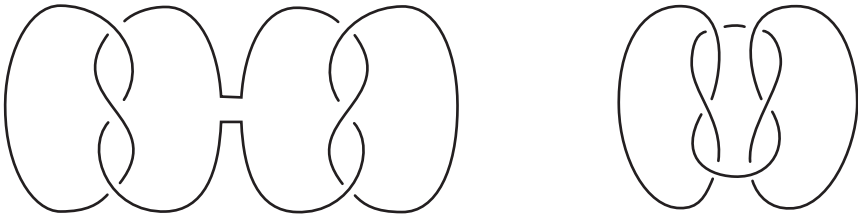


Рис. 18.12. Композиция трилистника и его зеркального изображения является квадратным узлом

Предположим, что нам известны рода узлов K и L . Легко ли определить род $K\#L$? Обозначим S_K и S_L поверхности Зейферта узлов K и L минимального рода. Используя те же самые проекции K и L , образуем $K\#L$ и соответствующую поверхность Зейферта $S_{K\#L}$. Легко видеть, что если S_K образована d_K дисками и b_K лентами, а S_L – d_L дисками и b_L лентами, то $S_{K\#L}$ образована $d_K + d_L - 1$ дисками и $b_K + b_L$ лентами. Поэтому род $S_{K\#L}$ равен

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}[1 - (d_K + d_L - 1) + (b_K + b_L)] &= \frac{1}{2}(1 - d_K + b_K) + \frac{1}{2}(1 - d_L + b_L) \\ &= g(K) + g(L). \end{aligned}$$

Проблема в том, что мы не знаем, является ли $S_{K\#L}$ поверхностью Зейферта минимального рода для узла $K\#L$. Поэтому мы можем только утверждать, что $g(K\#L) \leq g(K) + g(L)$. Мы опускаем доказательство, но на самом деле $S_{K\#L}$ действительно имеет минимальный род. Таким образом, род аддитивен.

Для любых двух узлов K и L имеет место равенство $g(K\#L) = g(K) + g(L)$.

Эта формула позволяет вычислить род квадратного узла:

$$g(\text{квадратный узел}) = g(\text{трилистник}) + g(\text{трилистник}) = 1 + 1 = 2.$$

¹ Тривиальный узел удовлетворяет этому определению простоты, но как 1 не считается простым числом, так и тривиальный узел не считается простым узлом.

У этой формулы есть интересное следствие: если K или L – нетривиальный узел, то $K\#L$ тоже нетривиален. Это следует из того, что если $g(K) \neq 0$ или $g(L) \neq 0$, то $g(K\#L) \neq 0$. Вот один из способов интерпретации этого утверждения: если шнурки завязаны узлом, то невозможно взять два свободных конца и завязать узел, так чтобы узел на шнурках развязался. Узлы не имеют «обратных узлов», которые их развязывали бы.

Стоит отметить, что если K и L – альтернирующие узлы, то $K\#L$ – тоже альтернирующий узел (сможете это доказать?). Поэтому у квадратного узла, для которого мы не показали альтернирующую проекцию, такая проекция все же существует.

Хотя род узла позволяет различить много узлов, этот инвариант не полон – из того, что два узла имеют одинаковый род, не следует, что это один и тот же узел. Например, у трилистника и восьмерки род одинаковый. Поэтому либо это один и тот же узел (что не так), либо нам нужен другой метод их различения. Аналогично печать Соломона, пряничный человечек и квадратный узел имеют одинаковый род.

Далее в этой главе мы введем еще два инварианта узлов, которые позволят различить остальные узлы. Это лишь малое подмножество известных инвариантов узлов.

Первый инвариант называется раскрашиваемостью. Для проверки на раскрашиваемость мы рисуем проекцию узла карандашами трех разных цветов. Узел является *раскрашиваемым*, если в каждой точке пересечения встречается только один или все три цвета. Кроме того, мы требуем, чтобы вся проекция не была одного цвета. Не очень трудно доказать, что раскрашиваемость является инвариантом узла, но это доказательство мы опустим. В частности, раскрашиваемость не зависит от выбора проекции.

На рис. 18.13 видно, что трилистник раскрашиваемый (мы использовали в качестве цветов черный, серый и «пунктирный»). Но после нескольких экспериментов оказывается, что восьмерка не раскрашивается. В примере на рис. 18.13 мы следовали правилам и раскрасили первые три пряди. А с верхней прядью вышла незадача. В зависимости от того, с какой стороны мы подходим, прядь оказывается разного цвета. Не существует цвета, позволившего бы раскрасить этот узел правильно. Поэтому трилистник и восьмерка – разные узлы.

Оставляем читателю доказательство того, что квадратный узел раскрашиваемый, а печать Соломона и пряничный человечек – нет. Таким образом, мы еще одним способом доказали, что квадратный узел отличен от печати Соломона и пряничного человечка.

С помощью простоты, рода и раскрашиваемости мы смогли различить все наши узлы, кроме печати Соломона и пряничного человечка. Оба узла простые, рода 2 и нераскрашиваемые. Чтобы доказать, что они все же различаются, нам нужен еще один инвариант: *число пересечений*.

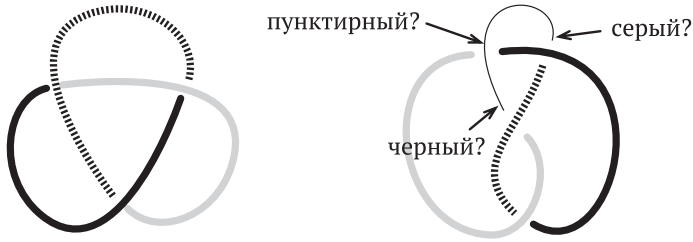


Рис. 18.13. Трилистник раскрашиваемый, а восьмерка – нет

Числом пересечений узла называется наименьшее число пересечений во всех его проекциях. Будем обозначать $c(K)$ число пересечений узла K . В обычной проекции тривиального узла пересечений нет, поэтому его число пересечений равно 0. Мы знаем, что трилистник и тривиальный узел различны, и имеется проекция трилистника с 3 пересечениями. Любой узел с 0, 1 или 2 пересечениями тривиален, поэтому число пересечений трилистника равно 3.

Узлы часто группируются по числу пересечений. Узлов с небольшим числом пересечений не очень много. Из табл. 18.1 видно, что трилистник – единственный узел с числом пересечений 3 (если не считать его и его зеркальное изображение за два), и существует всего семь простых узлов с шестью или меньшим числом пересечений. Но по мере увеличения числа пересечений количество различных узлов быстро возрастает⁸.

Таблица 18.1. Количество простых узлов с заданным числом пересечений

$c(K)$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Узлов	1	1	2	3	7	21	49	165	552	2176	9988	46972

Как и с родом, и по той же самой причине с числом пересечений работать трудно. Посчитать число пересечений в заданной проекции легко. Но нет гарантии, что не существует другой проекции с меньшим числом пересечений. Если имеется проекция узла K с n пересечениями, то мы можем только сказать, что $c(K) \leq n$. По счастью, как и род, число пересечений легко вычислить для альтернирующих узлов.

Сто лет назад Тэйт высказал гипотезу, что в редуцированной альтернирующей проекции узла число пересечений минимально. Здесь «редуцированная» означает, что перед подсчетом пересечений мы удаляем все несущественные пересечения типа показанного на рис. 18.14. Такое пересечение можно удалить, просто повернув часть узла на 180° . Если удалить все такие пересечения, предположил Тэйт, то оставшееся число пересечений будет минимально. Гипотеза Тэйта оставалась открытой много лет, но была независимо и одновременно доказана Луисом Кауфманом, Кунио Мурасуги и Морвенотом Тистлетвейтом в середине 1980-х годов⁹.

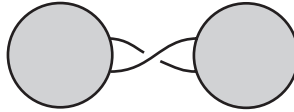


Рис. 18.14. Несущественное пересечение

В редуцированной альтернирующей проекции узла число пересечений минимально.

Эта теорема позволяет легко вычислить число пересечений для любого альтернирующего узла. Поскольку наши проекции трилистника, восьмерки, печати Соломона и пряничного человечка уже редуцированные и альтернирующие, найти их числа пересечений очень просто. Они равны соответственно 3, 4, 5 и 6. Так что один этот инвариант позволяет сделать вывод, что все эти узлы различаются, в т. ч. печать Соломона и пряничный человечек.

Разумно спросить, как число пересечений соотносится с произведением узлов. Есть ли красивая формула, связывающая $c(K)$, $c(L)$ и $c(K\#L)$? Если K и L альтернирующие, то $K\#L$ тоже альтернирующий. Более того, действуя аккуратно, мы сможем взять редуцированные альтернирующие проекции K и L и соединить их так, что результирующая проекция $K\#L$ тоже будет редуцированной альтернирующей (действовать нужно не так, как мы поступали для квадратного узла). Следовательно, в этом частном случае число пересечений аддитивно.

Если K и L – альтернирующие узлы, то $c(K\#L) = c(K) + c(L)$.

Например, $c(\text{квадратный узел}) = c(\text{трилистник}) + c(\text{трилистник}) = 3 + 3 = 6$.

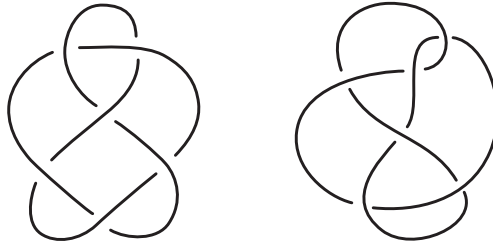
Аддитивно ли число пересечений для всех узлов, как род? Гипотеза о том, что это равенство имеет место для всех узлов, довольно стара. Но, как ни странно, до сих пор никто не смог ни доказать ее, ни предъявить контрпример!

В этой главе мы познакомились с некоторыми из многочисленных важных инвариантов узлов. Располагая этими инструментами, мы смогли различить шесть узлов, приведенных в начале этой главы. Наши находки сведены в табл. 18.2.

Эти инструменты позволили нам довольно далеко продвинуться по пути классификации. Но лишь до определенного предела. Две проекции на рис. 18.15, пряничный человечек и так называемый узел 6_3 , – разные узлы, но с помощью наших инвариантов различить их невозможно. Оба узла простые, с 6 пересечениями, альтернирующие, нераскрываемые, рода 2. Чтобы их различить, нужны дополнительные средства.

Таблица 18.2. Сводный перечень свойств узлов

Узел	Простой	Число пересечений	Род	Раскрашиваемый
Тривиальный узел	нет	0	0	да
Трилистник	да	3	1	да
Восьмерка	да	4	1	нет
Печать Соломона	да	5	2	нет
Пряничный человечек	да	6	2	нет
Квадратный узел	нет	6	2	да

Рис. 18.15. Одинаковы ли пряничный человечек и узел 6_3 ?

Кроме того, мы не представили никаких методов, позволяющих показать, что две проекции – на самом деле один и тот же узел. Мы посвятили эту главу демонстрации того, что проекции соответствуют разным узлам. Призываем читателя порыться в литературе и исследовать эту интересную область теории узлов.

Взаимообмен между математикой и наукой устроен неравноценно. Наивно думать, что они работают рука об руку. Ученые предлагают математикам задачи, а математики создают теории, которые, как они надеются, будут полезны ученым.

Потребности ученых часто подстегивают создание новых разделов математики, как вихревая модель атома Кельвина ускорила развитие теории узлов. Но математика не довольствуется ролью слуги науки. Даже когда математическая теория рождается из практического применения, она быстро начинает жить собственной жизнью и развивается, исходя из внутренней логики. Математики-теоретики – упрямые люди, которые в целом больше интересуются красотой, истинностью, элегантностью и величием, нежели практической применимостью.

Когда оказалось, что модель атома Кельвина неверна, ученые утратили интерес к узлам, но математики продолжили их изучение. Теория узлов зажила своей жизнью как область чистой математики. На протяжении большей части XX века ей интересовались только математики. Она и сейчас остается областью активных исследований с приложениями к другим разделам чистой математики, но не к науке.

Но даже самые абстрактные и теоретические разделы математики могут приносить пользу. Прикладная математика зачастую проистекает из совсем уж не прикладных разделов. Бывает – и не редко – что полезность теории не проявляется много лет. Никто не мог бы предсказать, что изучение простых чисел позволит шифровать информацию о кредитной карте, так что ее можно будет безопасно передавать через интернет. Математики XIX века не знали, что их работы по неевклидовой геометрии лягут в основу общей теории относительности Эйнштейна.

Ближе к концу века теория узлов снова нашла применение в естественных науках. Физики, биологи и химики обнаружили, что математическая теория узлов позволяет лучше понять их науку. Теперь она играет важную роль в таких разных предметах, как изучение ДНК и других больших молекул, линий магнитного поля, квантовой теории поля и статистической механики.

Математики работают на предприятии, которое изготавливает и продает инструменты. Иногда они принимают частные заказы от клиентов из мира науки, но большую часть времени проводят за изготовлением элегантных инструментов, для которых еще не появилось пользователей. Ученые заходят в лавку и шарят по полкам в надежде найти подходящий инструмент. В проход, посвященный теории узлов, ученые долго не заглядывали, зато теперь он кишит покупателями. В следующей главе мы увидим, как идеи топологии и эйлеровой характеристики создали еще один инструмент, который неожиданно оказался полезен ученым.

Глава 19

Как причесать ежа

Пусть грянет хаотичный шторм
и сотрясение платформ!
Я жажду форм.

– Роберт Фрост, «Pertinax»¹

Многие ученые используют математику как средство для предсказания поведения. Ученый может располагать уравнением или системой уравнений, описывающих взаимодействие величин в модели. И пользуется математикой, чтобы вывести из этих уравнений какие-то заключения.

Часто математические модели выражаются с помощью дифференциальных уравнений. Они описывают скорости изменения различных величин со временем. Например, эколог может составить систему дифференциальных уравнений для моделирования популяционной динамики кроликов и лис в заповеднике, обусловленной отношениями между хищником и добычей. Когда кроликов много, лисы наслаждаются изобилием пищи. За счет этого их число растет, а число кроликов падает. В конечном итоге запас пищи у лис иссякает, поэтому их популяция уменьшается. И теперь наступает черед процветать кроликам. Такое циклическое поведение показано на рис. 19.1.



Рис. 19.1. Модель хищник–добыча

Дифференциальные уравнения записываются в виде алгебраического соотношения между переменными и их производными. Говоря о *решении* дифференциального уравнения, мы имеем в виду, что при заданных начальных условиях можно предсказать будущее поведение системы. Иными словами, если мы знаем, сколько кроликов и лис имеется сегодня, то сможем предсказать, сколько их будет через год. Кривая на рис. 19.1 – график решения. Стрелками показано положительное направление времени. Кривая построена в *фазовом пространстве* – топологическом объекте, представляющем все возможные значения переменных. В данном случае фазовым пространством является первый квадрант плоскости (поскольку число кроликов и лис должно быть неотрицательно). В более экзотических примерах фазовое пространство может иметь топологически более сложную форму.

Иногда ученому недостаточно найти конкретное решение дифференциального уравнения. Часто более важны качественные выводы. Обладает ли система равновесным состоянием – популяциями, в которых для обоих видов частота смертей равна частоте рождений? Существуют ли начальные условия, при которых один или оба вида обречены на вымирание? А условия, ведущие к взрывному росту популяции? Будет ли поведение популяций носить циклический характер, или оно хаотично? Даже если мы в состоянии найти аналитическое решение дифференциального уравнения, ответить на такие важные «глобальные» вопросы не всегда легко.

Чтобы лучше понять, как устроены решения системы дифференциальных уравнений, необходим более наглядный, геометрический способ их представления. Есть два распространенных метода: порождение *потока* или *векторного поля* в фазовом пространстве. Поток, называемый также непрерывной динамической системой, ассоциирует с каждой точкой фазового пространства траекторию движения точки. Эта траектория попросту представляет собой кривую решения дифференциального уравнения. Несколько таких траекторий для модели хищник–добыча показаны на рис. 19.2. Видно, что для любой неравновесной пары начальных популяций их численности циклически увеличиваются и уменьшаются.

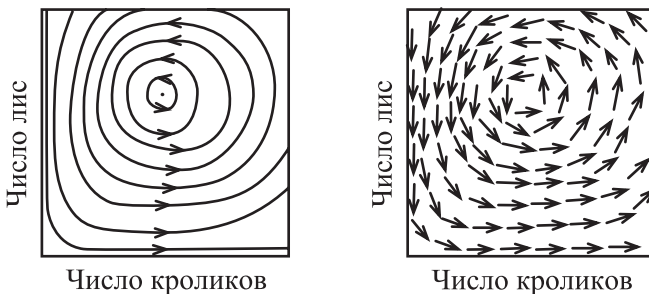


Рис. 19.2. Поток и векторное поле, ассоциированные с моделью хищник–добыча

Вместо того чтобы выражать дифференциальное уравнение алгебраически или в виде потока, мы можем описать его в терминах векторного поля. В отличие от *скалярных* величин, таких как температура, время, яркость или масса, которые можно описать одним значением, *векторные* величины имеют величину и направление. В физике вектором описывается скорость: вектор указывает направление движения, а его абсолютная величина (модуль) представляет быстроту перемещения объекта. Можно было бы привести и другие примеры, но пример скорости, наверное, самый интуитивно понятный. На самом деле если интерпретировать поток как движение частиц, то векторное поле состоит из векторов скоростей этих частиц в фазовом пространстве.

На рис. 19.2 мы видим единственную точку равновесия, в которой число лис и кроликов остается неизменным. Абсолютная величина вектора в точке равновесия равна нулю, поэтому говорят, что в этой точке векторное поле имеет ноль. А для потока это *неподвижная точка*, или *точка покоя*. Нули векторного поля часто играют огромную роль, потому что представляют точки равновесия системы.

Остаток этой главы мы посвятим исследованию векторных полей на поверхностях, а не порождающим их дифференциальным уравнениям. Наша основная цель – понять связь между нулями векторного поля и топологией поверхности.

Один из самых простых способов получить векторное поле на поверхности – поместить поверхность в трехмерное пространство и считать, что векторы «указывают в направлении подножья горы», и чем круче спуск, тем длиннее вектор. Это называется *градиентным векторным полем*. На рис. 19.3 показано градиентное векторное поле на сфере и торе. Чтобы представить себе поток, ассоциированный с векторным полем, вообразим, что поверхность покрыта патокой. Тогда траектории потока – это просто пути, по которым вязкий сироп сползает вниз по поверхности.

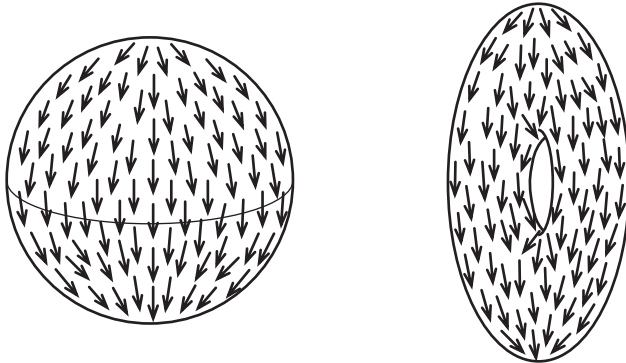


Рис. 19.3. Градиентные векторные поля на сфере и на торе

На рис. 19.3 видно, что градиентные векторные поля на сфере и на торе имеют нули – на сфере их два (один на северном полюсе, другой на южном), а на торе четыре (верхняя и нижняя точки тора и верхняя и нижняя точки дырки). Верно ли, что любое векторное поле на сфере имеет ноль? А на торе? Если мы сможем утвердительно ответить на этот вопрос для некоторой поверхности S , то получим очень сильный результат. Он означает, что если фазовым пространством системы является S , то у системы обязательно существует точка равновесия.

Частичный ответ на эти вопросы дает красивая теорема Пуанкаре–Хопфа. Она устанавливает неожиданную связь между нулями векторного поля и эйлеровой характеристикой. Чтобы понять, в чем ее суть, мы должны внимательнее познакомиться с нулями векторных полей.

Не все нули одинаковы. На рис. 19.4 мы видим пять различных нулей и соответствующие им неподвижные точки потока. Поведение в окрестности этих нулей сильно различается. *Источник* отталкивает все близлежащие точки, *сток* притягивает их, *седло* делает то и другое, точки вокруг *центра* обтекают неподвижную точку, а точки вокруг *диполя* утекают, а затем притекают обратно (похоже на линии магнитного поля вокруг стержневого магнита).

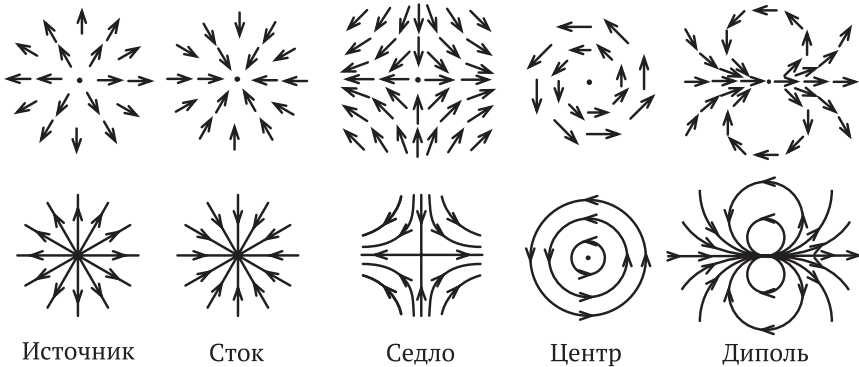


Рис. 19.4. Векторные поля в окрестности нуля и соответствующие им потоки

Источники, стоки и седла часто встречаются как нули градиентного потока. На рис. 19.5 мы видим источник в верхней точке перевернутой чаши, сток в нижней точке чаши, а седло в середине седлообразной поверхности. Заметим, что на рис. 19.3 градиентный поток на сфере имеет один источник и один сток, а градиентный поток на торе – один источник, один сток и два седла.

Интуиция подсказывает, что стоки, седла и источники чем-то различаются и должно существовать правило, описывающее количество нулей

каждого типа. Из примера градиентного потока мы видим, что на сфере может находиться векторное поле с двумя нулями, но трудно представить себе векторное поле на сфере с одним стоком и одним седлом. Ключевая идея, позволяющая различать нули, – *индекс*.

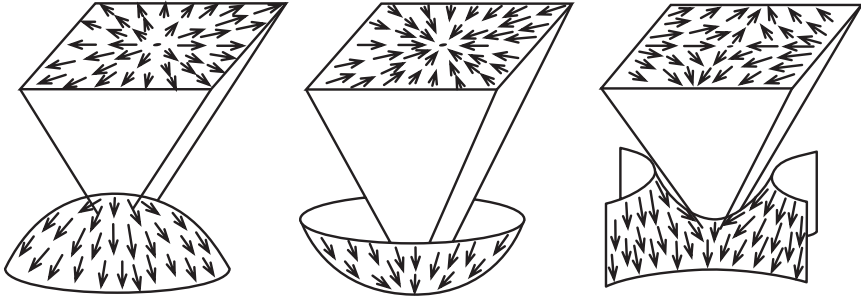


Рис. 19.5. Источник, сток и седло в градиентном векторном поле

Индекс нуля вычисляется следующим образом. Нарисуем вокруг нуля небольшую окружность, удовлетворяющую всего двум условиям: (1) она должна содержать только один ноль и (2) она должна быть краем диска (например, на торе такая окружность не может охватывать трубку или центральную дырку). Теперь поместим в каждую точку на окружности воображаемый циферблат. Стрелка циферблата должна указывать в том же направлении, что векторное поле. (Если бы векторное поле описывало магнитное поле, то в качестве циферблата можно было бы использовать компас.) Если мы будем перемещать циферблат вдоль окружности, то стрелка будет поворачиваться. Переместим циферблат на один оборот против часовой стрелки. Всякий раз, как стрелка один раз повернется против часовой стрелки, будем прибавлять к индексу единицу, а всякий раз, как она повернется по часовой стрелке, будем вычитать единицу. Индекс часто называют *числом вращения* векторного поля вокруг нуля.

Рассмотрим сток на рис. 19.6. Мы видим циферблат в восьми положениях на окружности. Когда циферблат совершает один оборот вокруг окружности против часовой стрелки, его стрелка один раз поворачивается против часовой стрелки. Поэтому индекс стока равен 1. Для седла стрелка совершает один оборот по часовой стрелке, когда циферблат один раз обходит ноль против часовой стрелки. Поэтому индекс седла равен -1 . Аналогично вычисляются индексы остальных нулей на рис. 19.4. Индекс источника и центра равен 1, а индекс диполя равен 2.

Теперь опишем второй способ вычисления индекса векторного поля. Он пригодится нам в дальнейшем. Поместим ноль во внутреннюю область многоугольной грани (она может иметь и закругленные ребра). Многоугольник должен удовлетворять нескольким условиям, а в остальном мо-

жет быть любым. Как и раньше, многоугольник следует выбирать так, чтобы в нем не было других нулей и чтобы он ограничивал диск. Кроме того, потребуем, чтобы любой вектор, начинающийся на ребре, указывал внутрь или наружу. Нам не нужны векторы, указывающие вдоль ребра. (Такой многоугольник всегда существует, хотя это и не очевидно.) На рис. 19.7 мы видим седло внутри квадрата и сток внутри шестиугольника, расположенные таким образом, что все векторы указывают внутрь или наружу.

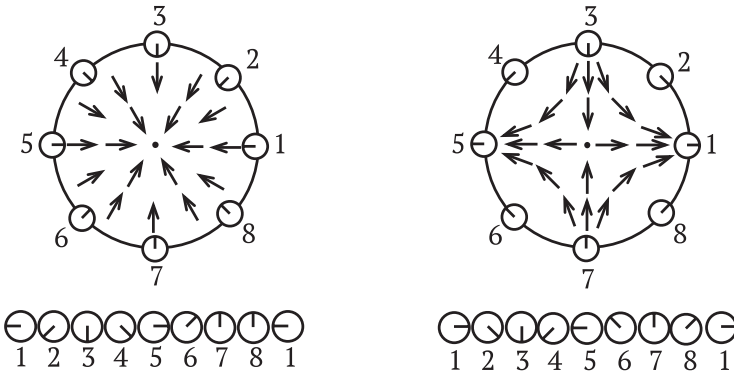


Рис. 19.6. Индекс стока равен 1, а индекс седла равен -1

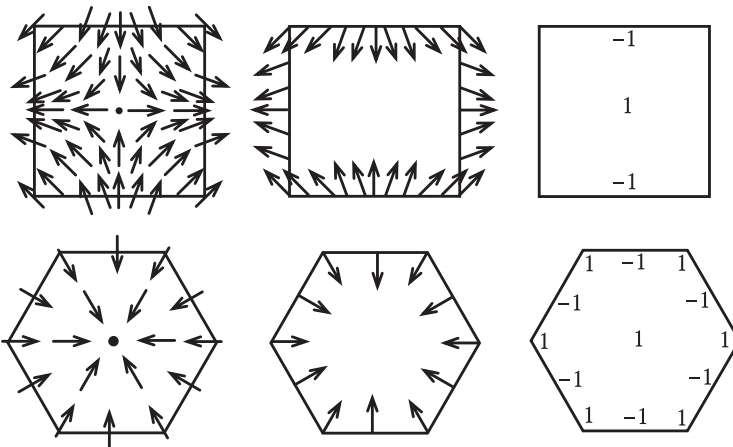


Рис. 19.7. Индекс седла равен $2(-1) + 1 = -1$,
а индекс стока $-6(-1) + 7(-1) = 1$

Теперь выделим ребра и вершины, в которых векторное поле указывает внутрь. На каждом таком ребре поставим -1 , а в каждой вершине 1 . Наконец, поставим 1 в середину многоугольника. Оказывается, что сумма

всех этих чисел равна индексу нуля. Мы видим, что это верно для седла и стока на рис. 19.7.

Вот теперь, наконец, мы можем сформулировать теорему Пуанкаре–Хопфа. Она дает топологический способ определить, есть ли ноль у векторного поля (или, что эквивалентно, есть ли неподвижная точка у потока). Кроме того, она проясняет вопрос об относительном числе нулей каждого типа на конкретной поверхности.

Теорема Пуанкаре–Хопфа

Для любого векторного поля на замкнутой поверхности S с конечным числом нулей сумма индексов всех нулей равна эйлеровой характеристике поверхности $\chi(S)$.

Прежде чем доказывать эту теорему, приведем несколько примеров. На рис. 19.8 показано три разных векторных поля на сфере. Первое, градиентное векторное поле, имеет сток и источник (оба с индексом 1), второе – два центра (оба с индексом 1), а третье – один диполь (с индексом 2). Во всех трех случаях сумма индексов равна 2 – эйлеровой характеристике сферы.

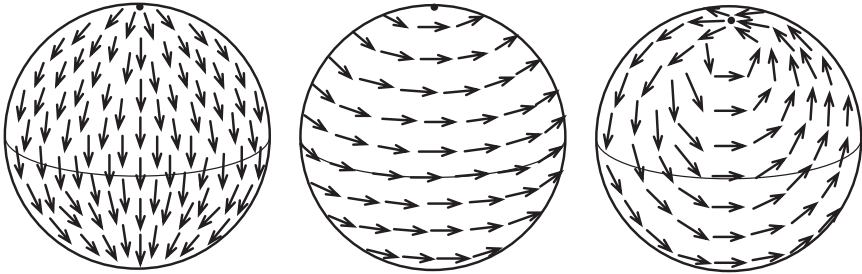


Рис. 19.8. Три векторных поля на сфере

Выше мы видели, что градиентное векторное поле на торе (рис. 19.3) имеет четыре нуля – один источник, два седла и один сток. Сумма их индексов равна $1 + 2(-1) + 1 = 0$, т. е. эйлеровой характеристике тора.

В качестве дополнительного бонуса градиентные векторные поля позволяют вычислять эйлерову характеристику поверхностей, не рисуя вершин, ребер и граней. На рис. 19.9 мы видим сферу, согнутую в виде U-образного тела. Градиентное векторное поле имеет два источника, одно седло и один сток, поэтому сумма индексов равна $2(1) + 1(-1) + 1(1) = 2$. Двойной тор имеет один источник, четыре седла и один сток, поэтому $\chi(\text{двойной тор}) = 1 + 4(-1) + 1 = -2$. На бутылке Клейна один источник, два седла и один сток, поэтому $\chi(\text{бутылка Клейна}) = 1 + 2(-1) + 1 = 0$. Подведем итог:

Если нули градиентного векторного поля на поверхности S включают только источники, седла и стоки, то
 $\chi(S) = \text{число источников} - \text{число седел} + \text{число стоков}$.

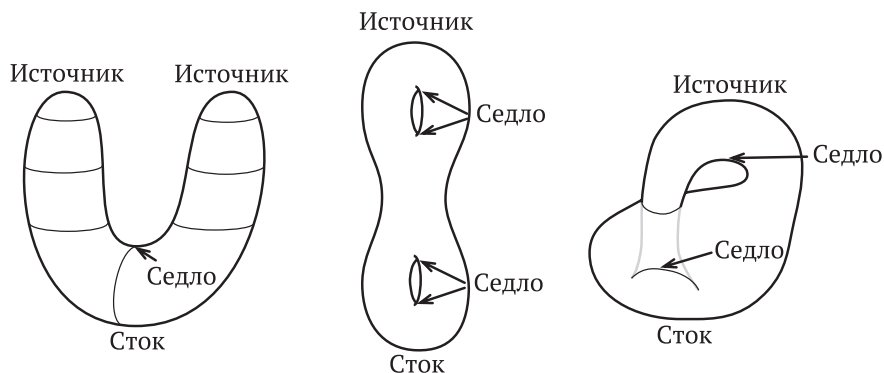


Рис. 19.9. Эйлеровы характеристики сферы, двойного тора и бутылки Клейна соответственно равны 2, -2 и 0

Теорема Пуанкаре–Хопфа утверждает, что если число нулей векторного поля на поверхности конечно, то сумма их индексов равна эйлеровой характеристике. Отсюда следует, что если у векторного поля нет нулей, то эйлерова характеристика поверхности должна быть равна нулю. Поэтому любое векторное поле на поверхности с ненулевой эйлеровой характеристикой обязано иметь по крайней мере один ноль! Эйлерова характеристика сферы равна 2, следовательно, любое векторное поле на сфере должно иметь ноль. Эта знаменитая теорема, которую первым доказал Л. Э. Дж. Брауэр (1881–1966), известный друзьям как «Бертус», в 1911 году², имеет хорошо запоминающееся название – *теорема о причёсывании ежа*. Так она называется, потому что если рассматривать свернувшегося в клубок ежа (или теннисный мяч) как сферу с векторным полем, то невозможно причёсать его так, чтобы ни одна иголлка не торчала.

Теорема о причёсывании ежа

Любое векторное поле на сфере имеет хотя бы один ноль.

Из этой теоремы следует утверждение, упомянутое во введении: в любой момент времени на Земле существует точка, в которой не дует ветер. Если рассматривать Землю как сферу, то направления ветров на поверхности образуют векторное поле. По теореме о причёсывании ежа, существует точка, где это поле обращается в ноль. В примере на рис. 19.10 точка

безветрия находится в центре циклона близ берегов Южной Америки. (На самом деле, поскольку индекс этого нуля равен 1, на другой стороне Земли должна быть еще хотя бы одна точка, в которой нет ветра!)



Рис. 19.10. Векторы направления ветра на поверхности Земли

Поскольку эйлерова характеристика тора равна нулю, теорема Пуанкаре–Хопфа не гарантирует, что любое векторное поле на нем имеет ноль. И действительно, на рис. 19.11 приведен пример не обращающегося в ноль векторного поля на торе.

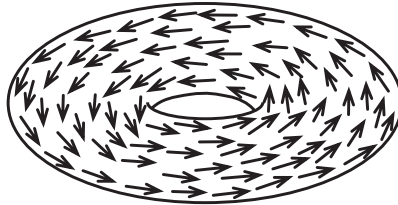


Рис. 19.11. Векторное поле без нулей на торе

Теорема о причесывании ежа – пример «теоремы существования». Таких в математике много. Они одновременно очень мощные и мучительно неточные. С одной стороны, при очень простом наборе предположений (векторное поле на сфере) мы можем уверенно говорить о существовании некоторого объекта (нулевого вектора). С другой стороны, часто бывает так, что ни формулировка, ни способ доказательства теоремы существования никак не помогают найти этот объект. Мы знаем, что где-то на другой стороне земного шара (см. рис. 19.10) есть точка безветрия, но она может быть где угодно, и, более того, таких точек может быть одна или много. Это

все равно, что искать засунутого куда-то плюшевого мишку, когда ребенку пора спать, – мы точно знаем, что он где-то дома, но где – под кроватью, в шкафу или в микроволновке? Хотя для нахождения таких объектов нужны дополнительные методы, часто одного лишь знания о его существовании достаточно для конкретной цели.

Теорема Пуанкаре–Хопфа названа в честь двух математиков, внесших наибольший вклад в ее доказательство, хотя были и другие.

Анри Пуанкаре родился во Франции, в городе Нанси в 1854 году в respectable состоятельной семье (его двоюродный брат Раймон Пуанкаре позже станет президентом Французской республики).



Рис. 19.12. Анри Пуанкаре

Математический талант Пуанкаре проявился очень рано, а один из учителей называл его «монстром математики»³. Первые математические открытия он сделал, когда ему еще не было и тридцати лет, а в Академию наук был избран в возрасте тридцати трех лет. Он был типичным математическим гением: неуклюжий, близорукий, рассеянный. Но обладал выдающимся интеллектом и способностью удерживать в мозгу и мысленно жонглировать многочисленными абстрактными понятиями.

Пуанкаре всеми признан как виднейший математик своего времени. Он был настоящим универсалом. Подобно Эйлеру и Гауссу, Пуанкаре был специалистом почти во всех областях математики, чистой и прикладной. Он жадно проглатывал литературу и был в курсе всех последних результатов. Как и Эйлер (но не Гаусс), Пуанкаре много печатался. Из-под его пера вышло почти пятьсот статей, а также много книг и материалов к лекциям. Он внес важный и не теряющий значения с годами вклад в такие разные области, как теория функций, алгебраическая геометрия, теория чисел, дифференциальные уравнения – обыкновенные и в частных про-

изводных, небесная механика, динамические системы и, конечно, топология. Он также опубликовал много статей по теоретической физике. Для Пуанкаре было характерно неистощимое любопытство, которое вело его от одного предмета к другому. Бывало, что он набрасывался на новую область математики, оставлял в ней неизгладимый след, а затем переходил к следующей. Один современник назвал его «завоевателем, но не колонистом».

Удивительно, что он не только умел делать первоклассную математику, но и писать на уровне, доступном неспециалистам. Он автор многочисленных ярких и увлекательных публикаций о науке и математике для широкой аудитории. Его тексты переведены на многие языки, их читают во всем мире.

Интересы Пуанкаре охватывали всю математику, но на протяжении всей карьеры он снова и снова возвращался к изучению дифференциальных уравнений. Его успехи в этой области поражают воображение. По словам математика Жана Дьедонне (1906–1992), «самым выдающимся плодом творчества Пуанкаре стала ... качественная теория дифференциальных уравнений. Это один из немногих примеров математической теории, которая внезапно возникла из ниоткуда и почти сразу достигла совершенства в руках своего создателя»⁴. Показательным примером стало его открытие формулы индекса.

Свой первый вклад Пуанкаре сделал в 1881 году. В этой работе он взял дифференциальное уравнение и построил векторное поле на сфере. Он определил индекс нуля и доказал, что сумма индексов всех нулей равна 2⁵. Конечно, это не простое совпадение, поскольку 2 совпадает с эйлеровой характеристикой сферы. Пуанкаре явно сформулировал это наблюдение в 1885 году, доказав, что сумма индексов нулей векторного поля на поверхности равна ее эйлеровой характеристике⁶. В следующем году он определил индекс нуля векторного поля в n -мерном пространстве и представил набросок идеи n -мерной теоремы об индексе. Трудность развития этой программы заключалась в том, что топологического аппарата еще не существовало (его, как мы увидим в главе 23, Пуанкаре создал позднее).

В 1911 году Брауэр обобщил теорему Пуанкаре об индексе на n -мерную сферу S^n . Мы знакомы с S^1 , единичной окружностью на плоскости ($x^2 + y^2 = 1$), и S^2 , единичной сферой в трехмерном пространстве ($x^2 + y^2 + z^2 = 1$). Вообще, S^n – это множество точек, удаленных на расстояние 1 от начала координат в $(n + 1)$ -мерном пространстве ($x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1$). Брауэр доказал, что для любого векторного поля на S^n сумма индексов нулей равна 0, если n нечетно, и 2, если n четно⁷. В главах 22 и 23 мы обсудим эйлерову характеристику в многомерных пространствах. И узнаем, что $\chi(S^n) = 0$, когда n нечетно, и $\chi(S^n) = 2$, когда n четно.

Следующим из основных соавторов был Хайнц Хопф (1894–1971). Хопф родился в немецком городе Бреслау (ныне Вроцлав в Польше). Его труды по топологии оказали значительное влияние на математику XX века. Один ученик Хопфа писал: «Хопф с безошибочным инстинктом выбирал

глубокие проблемы и давал им возможность созреть. А затем представлял целостное решение, демонстрирующее новые мысли и методы»⁸.



Рис. 19.13. Хайнц Хопф

В своих мемуарах Хопф отмечает, что поворотным моментом в его математической карьере стал двухнедельный период в 1917 году – отпуск с военной службы во время Первой мировой войны. Он сидел на занятиях в университете Бреслау во время изложения топологической теоремы Брауэра. После службы на Западном фронте, где он был дважды ранен и получил Железный крест, он возобновил изучение математики в университете Бреслау. Его математическая карьера заводила его в несколько немецких университетов, Принстонский университет и, наконец, в Швейцарскую высшую техническую школу (ETH) в Цюрихе.

Через два года после его приезда в Швейцарию к власти в Германии пришла нацистская партия. Хотя он воспитывался в протестантской вере, его отец был евреем. Соломон Лефшец и другие принстонские ученые убеждали Хопфа вернуться, но они с женой отказались покидать Швейцарию, а старались помогать беженцам из Германии. В конце концов, немецкое правительство пригрозило лишить его гражданства в случае невозвращения. С неохотой он отказался от немецкого гражданства и принял швейцарское. После войны Хопф остался в Швейцарии и усердно работал над восстановлением математики в Германии.

Из многочисленных важных вкладов Хопфа в топологию одним из первых стала топология векторных полей. Начиная с 1925 года он опубликовал серию статей, обобщающих теорему Пуанкаре об индексе⁹. Мы сформулировали теорему Пуанкаре–Хопфа для поверхностей, но Хопф доказал, что она применима и к многомерным обобщениям поверхностей – многообразиям (мы еще поговорим о многообразиях в главе 22).

Хотя теорема Пуанкаре–Хопфа обычно формулируется для замкнутых поверхностей, математики открыли различные ее обобщения. Существует очень общий вариант для поверхностей с краем¹⁰, но мы сформулируем следующую более простую версию.

Теорема Пуанкаре–Хопфа для поверхностей с краем

Пусть на поверхности с краем S определено векторное поле с конечным числом нулей. Если векторное поле направлено внутрь на каждой компоненте края (или наружу на каждой компоненте края), то сумма индексов всех нулей равна эйлеровой характеристике поверхности $\chi(S)$.

Теорема о причёсывании ежа неприменима к нашим головам, потому что волосистая часть головы человека топологически не является сферой – это диск. И действительно, в «зачесанных назад» причёсках и «конских хвостах» волосы не торчат. Но у человека, подстриженного «ежиком», волосы часто растут в направлении от центра головы – вниз на затылке, к ушам по бокам и в сторону лица спереди. Поскольку это «волосяное» векторное поле направлено наружу вдоль края, то сумма индексов нулей должна быть равна $\chi(\text{диск}) = 1$. Поэтому в каком-то месте головы должен быть вихор. У маленькой дочки автора (на голове у которой пока еще растёт пушок) есть зачатки трех вихров, двух спиралей, закрученных наружу (все с индексом 1) и седло между ними (с индексом 0).

Теперь мы наметим доказательство теоремы Пуанкаре–Хопфа для поверхностей без края (его нетрудно модифицировать для поверхностей с краем). Доказательство основано на идее Уильяма Тёрстона (1946–2012)¹¹.

Начнем с тщательно выбранного разбиения поверхности. Сначала поместим каждый ноль векторного поля внутрь многоугольной грани, не содержащей других нулей. Эти грани могут иметь произвольную форму, с любым числом сторон, при условии что ни один вектор, начинающийся на ребре, не направлен параллельно ребру. То есть всякий вектор на границе должен указывать внутрь или наружу.

Сейчас мы имеем грани, охватывающие все нули векторного поля. Завершим разбиение, триангулировав оставшуюся часть поверхности. Это можно сделать как угодно, но, как и раньше, мы требуем, чтобы все векторы, начинающиеся на границах треугольников, были направлены внутрь или наружу, но не вдоль ребра (см. рис. 19.14).

Теперь поместим 1 в каждую вершину, -1 на каждое ребро и 1 – в центр каждой грани. Просуммировав эти числа по всей поверхности, мы получим $V - E + F$, или $\chi(S)$. Точнее, поскольку каждое ребро является общей границей двух граней, а векторное поле направлено внутрь одной из этих граней, будем располагать относящуюся к ребру -1 внутри той грани, в направлении которой указывает вектор. Аналогично каждая вершина распо-

ложена в точке схождения нескольких граней, но есть одна, внутрь которой указывает вектор. Поставим 1 именно в этой грани (см. рис. 19.14).

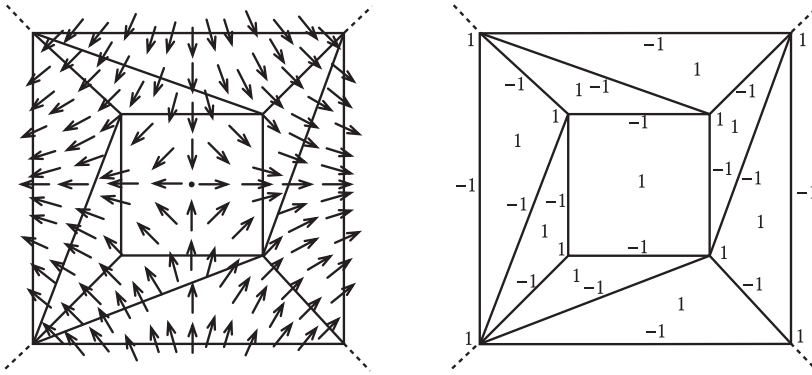


Рис. 19.14. Разбиение поверхности на грани, содержащие не более одного нуля, и соответствующая пометка вершин, ребер и граней

Сначала рассмотрим треугольные грани, не содержащие нулей векторного поля. Как показано на рис. 19.15, возможно всего два случая. Первый – когда векторы направлены внутрь на одном ребре и ни в одной вершине. Второй – когда векторы направлены внутрь на двух ребрах и на вершине между ними. В обоих случаях сумма 1 и -1 равна нулю. Поэтому эти треугольные грани не дают никакого вклада в эйлерову характеристику.

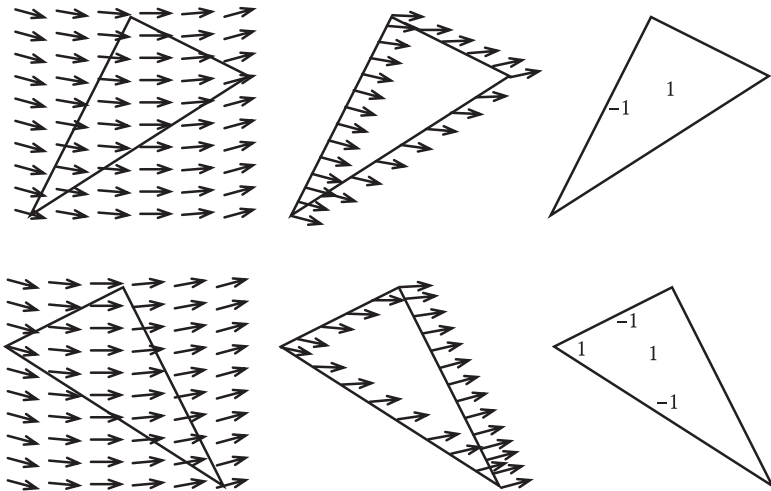


Рис. 19.15. Треугольники, не содержащие нулей, не дают никакого вклада в эйлерову характеристику

С другой стороны, вспомним, что для граней, содержащих нули, эту технику можно использовать для вычисления индекса. Таким образом, каждая грань, содержащая ноль, вносит в сумму вклад, равный индексу этого нуля. По теореме Пуанкаре–Хопфа, сумма всех 1 и -1 равна, с одной стороны, эйлеровой характеристике, а с другой – сумме индексов нулей.

Как уже было сказано, теорема Пуанкаре–Хопфа говорит о векторных полях, но поскольку векторные поля можно использовать для построения потоков, то ее можно интерпретировать так же, как теорему о неподвижной точке непрерывной динамической системы. В заключение этой главы мы упомянем еще одну знаменитую теорему о неподвижной точке.

Поток на поверхности – это математический способ описать непрерывное движение частиц. Теперь мы рассмотрим родственную, но совершенно иную ситуацию. Предположим, что вместо того чтобы течь, каждая точка на поверхности S перепрыгивает в новое положение. Математически это движение можно описать с помощью непрерывной функции f с областью определения S и областью значений S (говоря «непрерывная», мы просто имеем в виду, что близкие точки переходят в близкие). Первоначально точка имеет координату x , а затем перемещается в новую точку с координатой $f(x)$. Как и в случае потоков, нас особенно интересуют точки, которые остаются на месте. Точка y на поверхности S называется *неподвижной точкой* f , если $f(y) = y$ (см. рис. 19.16).



Рис. 19.16. Точка y является неподвижной точкой f , а x – нет

Пожалуй, самой знаменитой из всех теорем о неподвижной точке является *теорема Брауэра*. Она применима к непрерывной функции из n -мерного шара в него же. N -мерным шаром B^n называется множество всех точек n -мерного пространства, удаленных от начала координат на расстояние, не большее единицы. Иначе говоря, это множество точек, удовлетворяющих неравенству $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n+1}^2 \leq 1$, или попросту – множество точек внутри и на поверхности $(n - 1)$ -мерной сферы S^{n-1} . Свой результат Брауэр доказал для B^3 1909 году¹², а для B^n ($n > 3$) в 1912 году¹³.

Теорема Брауэра о неподвижной точке

Любая непрерывная функция из B^n в себя должна иметь неподвижную точку.

Интерпретировать эту замечательную теорему можно, например, следующим образом. Рассмотрим случай $n = 2$. B^2 – это диск на плоскости, т. е.

область, ограниченная единичной окружностью S^1 . Представим, что это столовая тарелка. Накроем ее листом бумаги, по размеру не меньшим тарелки, а затемотрежем свисающие части. Теперь возьмем бумагу, сомнем ее в комок (но не рвать!) и снова положим на тарелку. Теорема Брауэра утверждает, что на бумаге найдется точка, расположенная в точности против того места на тарелке, где была раньше. Такое же рассуждение показывает, что если проектировщик одноэтажного гипермаркета поместит его карту в любом месте на полу, то он сможет поставить на карте крестик, означающий «вы находитесь здесь».

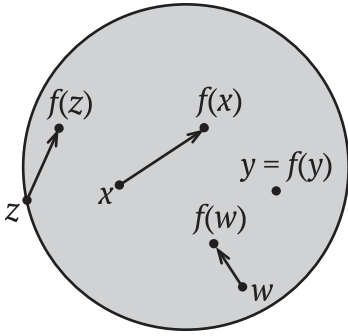


Рис. 19.17. Векторное поле для функции из B^2 в себя

Доказательство этой теоремы легко следует из теоремы Пуанкаре–Хопфа (ее варианта для поверхностей с краем). Мы будем рассматривать случай $n = 2$, но для больших n доказательство точно такое же. Начнем с функции f из B^2 в себя. Определим на B^2 векторное поле следующим образом: каждой точке x , принадлежащей B^2 , сопоставим вектор, начинающийся в x и заканчивающийся в $f(x)$ (см. рис. 19.17). B^2 – поверхность с краем, и все векторы, начинающиеся в точках края, направлены внутрь, поэтому условия теоремы Пуанкаре–Хопфа выполнены. Поскольку $\chi(B^2) = 1 \neq 0$, векторное поле должно иметь

хотя бы один ноль. Но нулевой вектор соответствует точке y , для которой $f(y) = y$. Иными словами, f должна иметь хотя бы одну неподвижную точку.

На самом деле теорема Брауэра применима к любому телу, гомеоморфному B^n . Кофе в чашке гомеоморфно B^3 . Как следует размешайте кофе в чашке (но не проливайте ни капли!) и подождите, пока оно снова успокоится. Тогда, по теореме Брауэра о неподвижной точке, найдется молекула кофе, находящаяся точно в том же месте, что и в самом начале.

В этой главе мы видели, что топология объекта, определяемая одной лишь характеристикой Эйлера, может влечь за собой глобальное поведение, которое, казалось бы, не имеет никакого отношения к глобальной топологии, – существование неподвижных точек у потоков и функций. В следующих двух главах мы увидим, что топология фигуры может определять также некоторые ее глобальные геометрические свойства.

Глава 20

Когда топология управляет геометрией

...нам осталось
Найти причину этого эффекта,
Или, верней, дефекта, потому что
Дефектный сей эффект небеспричинен.
Вот что осталось, и таков остаток.

– Вильям Шекспир, «Гамлет»¹

На протяжении большей части этой книги мы держались в стороне от жестких рамок геометрии и имели дело с куда более подвижной топологической средой. В этой и следующей главах мы вернемся к геометрии. Мы будем изучать многоугольники, многогранники, кривые и поверхности, сделанные не из резины, а из прочнейшей стали. Однако на эти геометрические объекты все равно можно взглянуть с топологической точки зрения – многоугольники и кривые гомеоморфны окружности, а многогранники и поверхности гомеоморфны сфере или тору с g дырками.

Мы представим целый ряд теорем, демонстрирующих удивительную связь между топологией и геометрией этих фигур. Мы увидим, что эйлерова характеристика позволяет предсказывать некоторые их геометрические свойства. Нашей конечной целью станут три теоремы. В этой главе мы познакомимся с формулой Декарта для многогранников и теоремой об угловом избытке для поверхностей, а в следующей рассмотрим теорему Гаусса–Бонне для поверхностей. Они показывают, что некоторые геометрические свойства (связанные с углами и кривизной) полностью определяются топологией (которая описывается эйлеровой характеристикой). Таким образом, мы увидим, как топология может управлять геометрией.

Но прежде чем переходить к этим теоремам для многогранников и поверхностей, познакомимся с аналогичными результатами в одномерном случае. Одномерными аналогами многогранника и поверхности являются многоугольник и простая замкнутая кривая соответственно. Первую теорему проходят на уроках геометрии в средней школе (см. рис. 20.1).

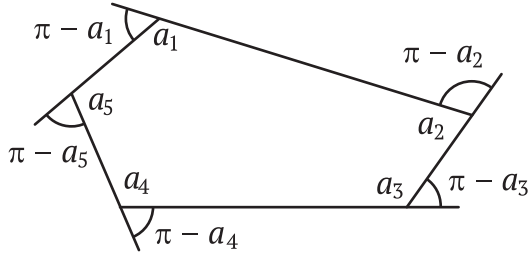


Рис. 20.1. Внешние углы многоугольника

Теорема о сумме внешних углов

Сумма внешних углов многоугольника равна 2π .

Дьёрдь Пойя (1887–1985) нашел следующее короткое и элегантное доказательство теоремы о сумме внешних углов для выпуклых многоугольников². В каждом угле проведем два выступающих наружу отрезка, перпендикулярных сходящимся в этом угле сторонам (рис. 20.2). Построим на этих отрезках сектор единичной окружности при каждой вершине. Заметим, что угол этого сектора в точности равен внешнему углу. Это так, потому что сумма двух прямых углов равна π , поэтому внутренний угол и угол сектора в сумме также должны давать π . Поскольку стороны каждой пары соседних секторов параллельны, из этих секторов можно собрать полный круг. Поэтому сумма внешних углов равна 2π . Мы опустим доказательство для невыпуклых многоугольников, но оно вытекает из того факта, что любой невыпуклый многоугольник можно разложить на выпуклые.

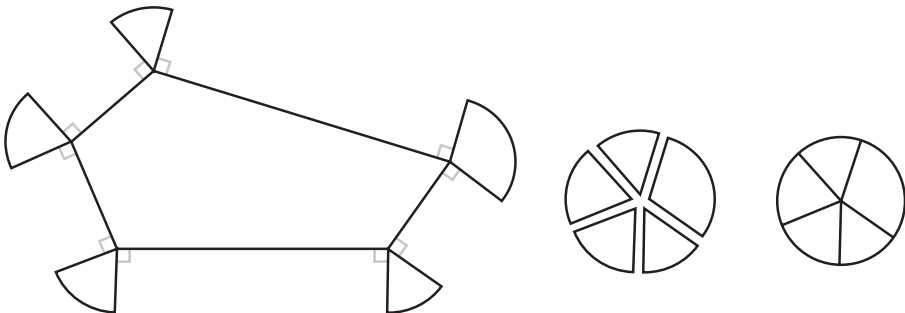


Рис. 20.2. Сумма внешних углов многоугольника равна 2π

В некотором смысле теорема о сумме внешних углов ничуть не удивительна. Автомобиль, движущийся по дороге в форме многоугольника, будет поворачивать в каждом угле, а величина каждого поворота равна

внешнему углу. Чтобы вернуться в исходную точку, автомобиль должен совершить полный оборот на 360° .

Типичному взрослому человеку придется напрячься, чтобы вспомнить формулу корней квадратного уравнения или теорему Пифагора, но есть один математический результат, который сможет отбарабанить практически любой взрослый: сумма внутренних углов треугольников равна 180° (или, как говорят, π радиан). Это простое следствие теоремы о сумме внешних углов. Если a, b, c – внутренние углы треугольника, то $\pi - a, \pi - b$ и $\pi - c$ – его внешние углы. По теореме о сумме внешних углов, $(\pi - a) + (\pi - b) + (\pi - c) = 2\pi$. После перегруппировки членов получаем $a + b + c = \pi$.

Для многоугольников с большим числом сторон сумма внутренних углов больше 180° и зависит от числа сторон. Если a_1, \dots, a_n – внутренние углы многоугольника, то по теореме о сумме внешних углов:

$$2\pi = (\pi - a_1) + (\pi - a_2) + \dots + (\pi - a_n).$$

После перегруппировки членов получаем следующую полезную теорему.

Теорема о сумме внутренних углов

Сумма внутренних углов n -многоугольника равна $(n - 2)\pi$.

Чтобы упростить переход к формуле Декарта для многогранников, полезно будет взглянуть на внешние углы многоугольников немного по-другому. Будем считать, что вершины многоугольника – это «дефектные» прямые. Тогда можно спросить, насколько ломаная линия отличается от прямой в каждой вершине. Если внутренний угол равен a , то ломаная отличается от прямой на $\pi - a$ – величину внешнего угла. Встав на такую точку зрения, будем называть $\pi - a$ *угловым недостатком*, или *угловым дефектом*, вершины. Поэтому теорему о сумме внешних углов можно переформулировать следующим образом.

Теорема о сумме внешних углов (другая формулировка)

Полный угловой недостаток любого многоугольника равен 2π .

Существует аналог теоремы о сумме внешних углов для гладкого случая. Снова рассмотрим аналогию с автомобилем. Автогонки Гран-при проходят по кольцевой извилистой трассе. Болид, участвующий в гонке «Формула-1», поворачивает то влево, то вправо, но, вернувшись к стартовой черте, делает один полный оборот против часовой стрелки. Иными словами, повороты влево и вправо взаимно уничтожаются, и остается полный оборот на 360° .

Теперь рассмотрим простую замкнутую гладкую кривую на плоскости (трассу автогонки, см. рис. 20.3). Выберем на кривой ориентацию и рас-

положим вдоль нее касательные векторы, указывающие в этом направлении (свет фар автомобиля). Нас интересует поведение этих касательных векторов при прохождении всей кривой один раз. Если кривая является окружностью, то после одного полного оборота против часовой стрелки векторы тоже совершат один полный оборот против часовой стрелки – на угол 2π . Полезно представить себе касательный вектор как стрелку циферблата. Когда циферблат огибает окружность, стрелка совершает ровно один оборот против часовой стрелки. Если кривая более сложная, то при перемещении циферблата по кривой стрелка может двигаться как вперед, так и назад, но в конце концов совершит ровно один оборот по циферблату.

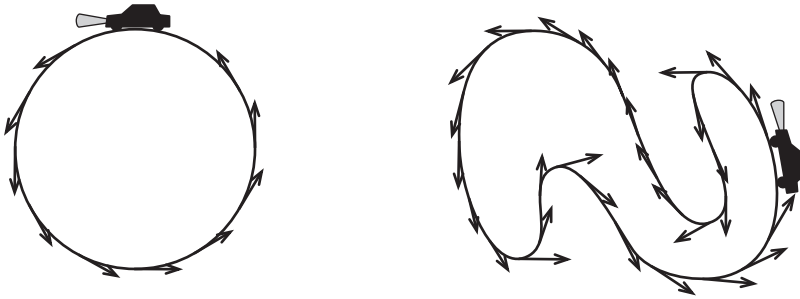


Рис. 20.3. Касательный вектор к простой замкнутой кривой совершает оборот на 2π

Это наблюдение может показаться очевидным (и так оно и считалось долгое время), но доказать его трудно. В 1935 году Хопф доказал теорему³, которая сейчас известна под названием *теоремы о вращающихся касательных*.

Теорема о вращающихся касательных

Касательный вектор к простой замкнутой гладкой кривой на плоскости поворачивается на угол 2π .

Нетрудно заметить связь между теоремой о сумме внешних углов и теоремой о вращающихся касательных. На самом деле можно сформулировать комбинированную теорему, в которой кривая является гладкой всюду, кроме конечного числа крутых поворотов. Автомобиль, движущийся по извилистой дороге, который иногда вынужден делать крутые повороты, к моменту возврата в исходную точку совершит полный оборот на 360° .

Возвращаясь к исходному утверждению, мы можем спросить, как эти теоремы связывают две математические дисциплины. Они показывают, что топология в некотором смысле управляет геометрией. Тополог не мо-

жет различить многоугольники и простые замкнутые гладкие кривые. Все они в его глазах являются окружностями. Тополог ничего не говорит об углах, прямолинейности, касательных векторах и т. д. Для геометра все многоугольники и все простые замкнутые гладкие кривые различаются, он описывает объекты в терминах вершин, кривизны и других характеристик. Теорема о сумме внешних углов и теорема о вращающихся касательных говорят, что гомеоморфность окружности полностью определяет одно геометрическое свойство – полный угловой недостаток фигуры. Как бы она ни изгибалась, ее полный угловой недостаток равен 2π .

Теперь мы рассмотрим, как обобщить эти две теоремы и получить формулу Декарта для многогранников и теорему об угловом избытке для поверхностей.

Возьмите квадратный лист бумаги, ножницы и клейкую ленту. Разделите бумагу на четыре квадранта и отрежьте один из них (этот кусочек пригодится в дальнейшем). Затем склейте обе стороны, по которым разрезали, – получится уголок прямоугольной коробки (рис. 20.4).

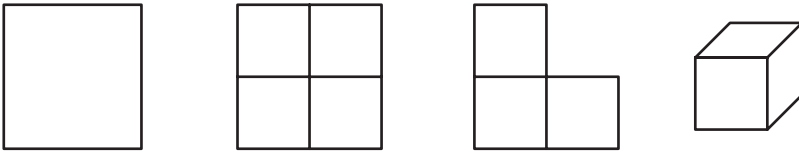


Рис. 20.4. В вершине куба полный угол равен $3\pi/2$

Мы определили угловой недостаток в вершине многоугольника как величину, на которую ломаная отличается от прямой линии. Аналогично определим угловой недостаток телесного угла как величину, которой ему недостает, чтобы стать плоскостью. В нашем примере четыре прямых угла (2π) сходятся в центре листа бумаги, и один из них отрезан (осталось $3\pi/2$). Поэтому угловой недостаток в вершине куба равен $2\pi - 3\pi/2 = \pi/2$.

Возьмите еще один квадратный лист бумаги. Как и раньше, разделите его на квадранты. Сделайте один разрез от края к центру (рис. 20.5). Возьмите отрезанный ранее квадратик и приклейте две его стороны к краям разреза сложенного листа бумаги. В результате оказывается, что углов слишком много. Мы получили конфигурацию, напоминающую кирпичную стену, из которой вынут один кирпич. Полный угол при центральной вершине равен $5\pi/2$, т. е. на $\pi/2$ больше, чем плоский угол. В этом случае говорят, что имеется угловой недостаток $-\pi/2$, или *угловой избыток* $\pi/2$.

У многогранника много вершин, и в каждой из них свой угловой недостаток (или угловой избыток). Для получения *полного углового недостатка* многогранника нужно сложить угловые недостатки во всех вершинах.

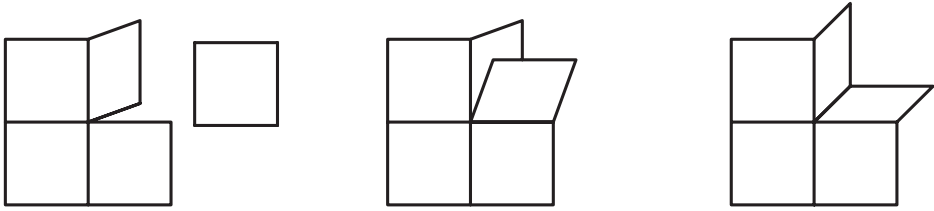


Рис. 20.5. В этой вершине полный угол равен $5\pi/2$

Рассмотрим несколько примеров. В каждой из восьми вершин куба угловой недостаток равен $\pi/2$, поэтому полный угловой недостаток равен 4π . Четырьмя гранями тетраэдра являются равносторонние треугольники. Поскольку в каждой вершине сходятся три равносторонних треугольника, угловой недостаток в ней равен $2\pi - 3(\pi/3) = \pi$. Всего вершин четыре, поэтому полный угловой недостаток равен 4π . Наконец, рассмотрим невыпуклый многогранник на рис. 20.6: большой куб, из которого вырезан маленький угловой кубик (представьте себе кубик Рубика с вытасненным угловым элементом). В вершинах с метками от 1 до 10 угловой недостаток равен $\pi/2$. Вершина 11 «обращена не в ту сторону», но угловой недостаток в ней тоже равен $\pi/2$. В оставшихся вершинах (12, 13 и 14) имеет место угловой избыток $\pi/2$. Таким образом, полный угловой недостаток равен $11(\pi/2) + 3(-\pi/2) = 4\pi$.

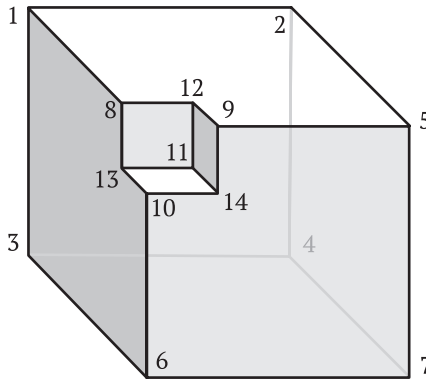


Рис. 20.6. В этом невыпуклом многограннике полный угловой недостаток по-прежнему равен 4π

Теперь можно говорить о закономерности и высказать гипотезу о том, что полный угловой недостаток любого многогранника равен 4π . Это впервые заметил Декарт в неопубликованных записках «Об элементах геометрических тел», которые мы обсуждали в главе 9. В третьем предложении этих записок читаем:

Как в плоской фигуре [многоугольнике] все внешние углы, взятые вместе, равны четырем прямым углам $[2\pi]$, так и в геометрическом теле [многограннике] все внешние телесные углы [угловые недостатки], взятые вместе, равны восьми прямым углам $[4\pi]^4$.

Как указал Декарт, параллели с теоремой о сумме внешних углов очевидны. Как сумма угловых недостатков многоугольника равна 2π , так и сумма угловых недостатков многогранника равна 4π .

Слегка отличающийся вариант этой теоремы был заново открыт Эйлером и включен в его статьи о формуле для многогранников⁵. Эйлер доказал, что сумма всех плоских углов многогранника, имеющего V вершин, равна $2\pi(V - 2)$. Если формула Декарта обобщает теорему о сумме внешних углов многоугольника, то формула Эйлера – теорему о сумме внутренних углов. Легко видеть, что результаты Эйлера и Декарта эквивалентны. Полный угловой недостаток равен просто $2\pi V$ минус сумма всех плоских углов, или $2\pi V - 2\pi(V - 2) = 4\pi$.

Разумеется, Эйлер и Декарт рассматривали только выпуклые многогранники. Но оказывается, что после небольшой модификации теорема применима ко всем многогранникам, даже топологически не являющимся сферами. Полный угловой недостаток – это топологический инвариант, имеющий простую связь с эйлеровой характеристикой многогранника.

Формула Декарта

Полный угловой недостаток любого многогранника P равен $2\pi\chi(P)$.

Куб, тетраэдр и куб с вырезанным уголком топологически эквивалентны сфере, поэтому их эйлерова характеристика равна 2, а значит, полный угловой недостаток равен $2\pi\chi(P) = 2\pi \cdot 2 = 4\pi$. В качестве тела, отличного от сферы, рассмотрим многогранный тор, показанный на рис. 20.7. В нем шестнадцать вершин, в восьми из них угловой недостаток равен $\pi/2$, а в остальных восьми имеется угловой избыток $\pi/2$ (угловой недостаток $-\pi/2$). Поэтому полный угловой недостаток равен нулю – эйлеровой характеристике тора. Предлагаем читателю проверить формулу Декарта для бумажного многогранника из приложения А.

Докажем формулу Декарта. Пусть P – многогранник с V вершинами, E ребрами и F гранями, а T – полный угловой недостаток P . Мы должны показать, что $T = 2\pi\chi(P) = 2\pi V - 2\pi E + 2\pi F$.

Выберем любую грань многогранника. Предположим, что ее плоские углы равны a_1, \dots, a_n . По теореме о сумме внутренних углов:

$$a_1 + \dots + a_n = (n - 2)\pi.$$

После перегруппировки членов получаем:

$$(a_1 + \dots + a_n) - n\pi + 2\pi = 0.$$

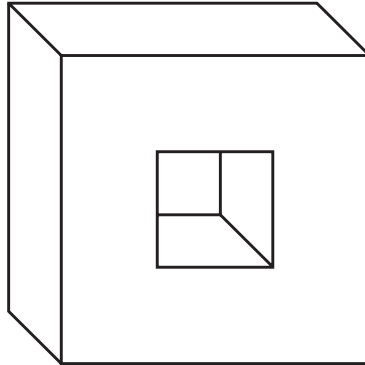


Рис. 20.7. Полный угловой недостаток тора равен нулю

Это равенство можно наглядно представить следующим образом. Если написать $-\pi$ на каждом ребре грани, величину угла в каждой вершине и 2π в середине грани (см. рис. 20.8), то сумма этих величин будет равна 0.

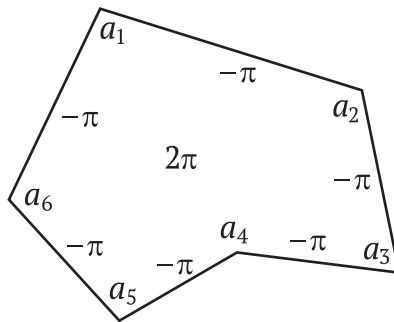


Рис. 20.8. Для n -угольника $(a_1 + \dots + a_n) - n\pi + 2\pi = 0$

Проделаем то же самое для всех граней P и просуммируем. Каждая грань вносит в сумму 2π , а каждое ребро -2π (по $-\pi$ с каждой стороны). Поэтому

$$S - 2\pi E + 2\pi F = 0,$$

где S – сумма всех внутренних углов P . Теперь прибавим T , полный угловой недостаток, к обеим частям равенства:

$$(T + S) - 2\pi E + 2\pi F = T.$$

Поскольку T – полный угловой недостаток, то, прибавив T , мы прибавили ровно столько, что сумма углов при каждой вершине снова стала равна 2π . Иными словами, $T + S$ равно $2\pi V$. Стало быть, $T = 2\pi V - 2\pi E + 2\pi F = 2\pi\chi(P)$.

Формула Декарта – красивая иллюстрация связи между топологией и геометрией. Поскольку полный угловой недостаток выражается через

эйлерову характеристику, мы видим, что топология многогранника полностью определяет один из аспектов его глобальной геометрии.

В качестве приложения этой теоремы предлагаем читателю найти новое доказательство того, что платоновых тел всего пять.

В этой книге мы, как правило, предполагали, что ребра, разбивающие поверхность на грани, – топологические сущности. Ребра можно произвольно изгибать и создавать грани самой причудливой формы. В этой главе мы рассматриваем гораздо менее разнузданную дисциплину – геометрию. В идеале хотелось бы, чтобы грани были многоугольниками с прямолинейными ребрами. На искривленной поверхности ребра не могут быть прямыми, поэтому взамен мы требуем, чтобы они были *геодезическими кривыми*.

В главе 10 мы ввели понятие геодезической на сфере. Это была дуга большой окружности. Оказывается, что геодезическую кривую можно определить на любой жесткой поверхности. Она характеризуется минимальной длиной – кратчайший путь между двумя точками на поверхности проходит по геодезической. Хорошо известное выражение «кратчайшее расстояние между двумя точками измеряется по прямой» следовало бы заменить на «кратчайшее расстояние между двумя точками измеряется по геодезической». В оставшейся части этой главы мы будем предполагать, что ребрами на поверхностях являются геодезические кривые, так что грани являются *геодезическими многоугольниками*.

Работа с геодезическими многоугольниками имеет то преимущество, что мы можем измерять углы в вершинах. Ребра кривые, но если рассматривать углы под микроскопом (фигурально выражаясь), то они будут казаться прямыми, поэтому их можно измерять.

Для треугольников на плоскости сумма углов равна 180° , но на типичной поверхности это правило не действует. Напомним, что Хэрриот и Жирар доказали, что сумма внутренних углов геодезического треугольника на сфере больше 180° (глава 10). Существуют другие поверхности, например седловидные, для которых сумма внутренних углов геодезического треугольника меньше 180° (см. рис. 20.9).

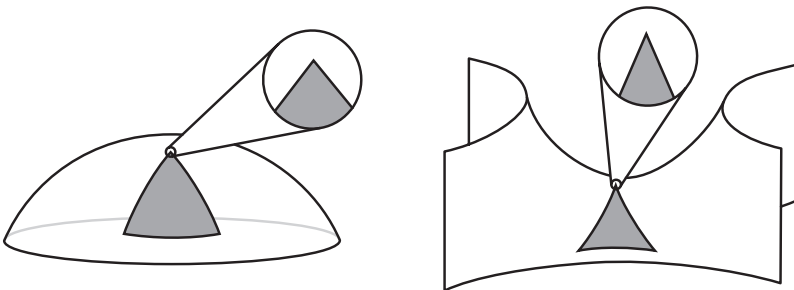


Рис. 20.9. Треугольник с угловым избытком (слева) и с угловым недостатком (справа)

Поэтому можно говорить об угловом избытке или угловом недостатке геодезического треугольника – величине, на которую сумма внутренних углов отличается от суммы углов плоского треугольника. *Угловым избытком* геодезического треугольника с внутренними углами a, b, c называется величина $(a + b + c) - \pi$. Если $(a + b + c) - \pi$ отрицательно, то у треугольника имеет место *угловой недостаток*.

Аналогично можно определить угловой избыток или недостаток геодезического n -угольника. Как мы знаем, сумма внутренних углов плоского n -угольника равна $(n - 2)\pi$. Поэтому угловой избыток n -угольника с внутренними углами a_1, a_2, \dots, a_n равен $(a_1 + a_2 + \dots + a_n) - (n - 2)\pi$.

Важно не путать угловой избыток и недостаток для многогранников и для поверхностей. У многогранника угловой избыток или недостаток испытывают вершины, а у поверхности – грани. Одинаковые названия могут ввести в заблуждение, но, как мы увидим ниже, на самом деле они тесно связаны.

Возьмите комок пластилина и вылепите октаэдр. Каждая его грань – равносторонний треугольник, поэтому угловой недостаток в каждой вершине равен $2\pi - 4(\pi/3) = 2\pi/3$. Поскольку всего вершин шесть, полный угловой недостаток равен $6(2\pi/3) = 4\pi$, что согласуется с формулой Декарта. Покрасьте все ребра маркером. Затем положите многогранник на стол и раскатайте его, так чтобы он принял сферическую форму (рис. 20.10). Грани, когда-то бывшие треугольниками, стали искривленными поверхностями. Если деформация выполнена аккуратно, то прямые ребра превратятся в геодезические отрезки, а грани – в геодезические треугольники.

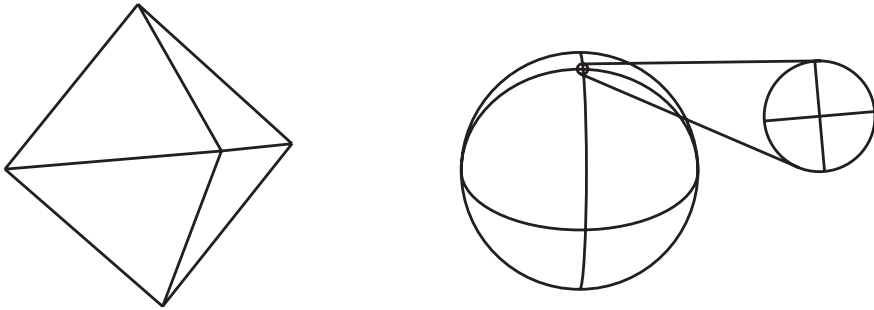


Рис. 20.10. Октаэдр, раскатанный в шар

После раскатывания октаэдра в шар ни в какой вершине не наблюдается углового недостатка. Все вершины разгладились, так что сумма углов при каждой вершине равна 2π . Куда же делся угловой недостаток?

Легко видеть, что в ходе этого процесса величины внутренних углов треугольника изменились. Углы при каждой вершине, которые раньше были равны 60° , теперь стали прямыми. Каждый треугольник на пластилиновом

шаре имеет три прямых угла, так что сумма внутренних углов равна $3\pi/2$. Для треугольных граней имеет место угловой избыток. Угловой недостаток в вершинах октаэдра распределится по граням шара и стал угловым избытком треугольников. Аналогично для любого разбиения поверхности на геодезические треугольники в вершинах нет ни углового недостатка, ни углового избытка, зато он есть в гранях.

Если поверхность разбита на грани, геодезические ребра и вершины, то *полным угловым избытком* называется сумма угловых избытков всех граней. Как полный угловой недостаток многогранника связан с его эйлеровой характеристикой (формула Декарта), так полный угловой избыток поверхности связан с ее эйлеровой характеристикой. Мы имеем следующий аналог формулы Декарта для поверхностей.

Теорема об угловом избытке для поверхностей

Полный угловой избыток поверхности S равен $2\pi\chi(S)$.

Доказательство этой теоремы наверняка покажется вам знакомым. Пусть поверхность S разбита на вершины, геодезические ребра и грани. Поставим в центр каждой грани 2π , рядом с каждым ребром $-\pi$, а в каждую вершину величину угла (см. рис. 20.11). Просуммировав эти величины для одной n -угольной грани с внутренними углами a_1, a_2, \dots, a_n , получим угловой избыток этой грани:

$$2\pi - n\pi + (a_1 + a_2 + \dots + a_n) = (a_1 + a_2 + \dots + a_n) - (n - 2)\pi.$$

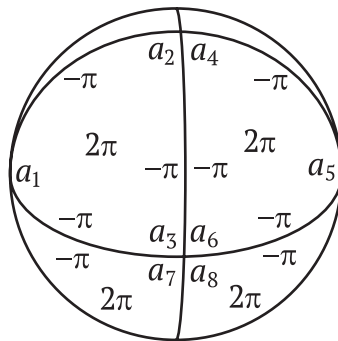


Рис. 20.11. Разметка поверхности:
 2π на каждой грани, $-\pi$ на каждом ребре
 и величины углов в каждой вершине

Следовательно, сумма этих величин по всей поверхности дает полный угловой избыток поверхности.

С другой стороны, каждая грань приносит 2π , каждое ребро – -2π , а каждая вершина – 2π . Сумма эти значений равна $2\pi F - 2\pi E + 2\pi V = 2\pi\chi(S)$, и требуемый результат доказан.

Формула Декарта и теорема об угловом избытке – красивые теоремы, показывающие, что топология в некотором смысле управляет геометрией. В следующей главе мы рассмотрим еще один пример. Мы увидим, что полная кривизна поверхности зависит от ее топологии, а та тесно связана с эйлеровой характеристикой.

Глава 21

Топология искривленных поверхностей

Если бы другие размышляли над математическими истинами так глубоко и постоянно, как это делаю я, они пришли бы к моим открытиям.

– Карл Фридрих Гаусс¹

Один из самых фундаментальных вопросов в геометрии плоских кривых – кривизна. *Кривизна* в точке x – это число k , измеряющее «крутизну» поворота в этой точке, т. е. скорость изменения направления касательного вектора. Пусть в точке x построен нормальный вектор \vec{n} к кривой; если кривая изгибается в направлении \vec{n} , то $k > 0$, если в направлении, противоположном \vec{n} , то $k < 0$, в противном случае $k = 0$ (см. рис. 21.1). Чем круче изгибается кривая, тем больше (по абсолютной величине k).

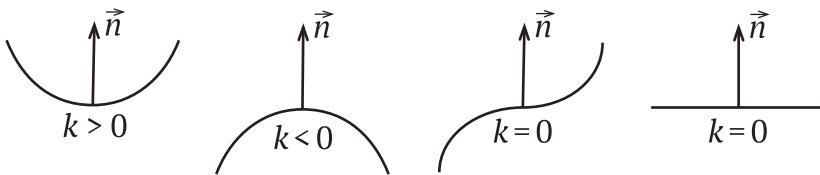


Рис. 21.1. Кривые с $k > 0$, $k < 0$, $k = 0$ и $k = 0$ (слева направо)

По теореме Жордана, у простой замкнутой кривой на плоскости есть внутренность и внешность. Поэтому можно выбрать нормальные векторы во всех точках кривой, так что все они будут указывать внутрь. После этого мы сможем вычислить кривизну в каждой точке кривой. Обычно кривизна изменяется от точки к точке (см. рис. 21.2). Просуммировав кривизну по всем точкам кривой, мы получим *полную кривизну*. Детали этого вычисления выходят за рамки книги, но любой студент, изучавший математический анализ, сразу поймет, что, коль скоро кривизна изменяется непре-

ривно, сумма, о которой идет речь, – не что иное, как интеграл кривизны. Имеет место следующая теорема¹.

Теорема о полной кривизне кривой

Полная кривизна любой простой замкнутой гладкой плоской кривой равна 2π .

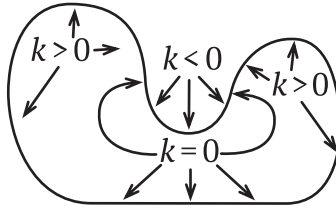


Рис. 21.2. Кривая с областями положительной, отрицательной и нулевой кривизны; нормальные векторы указывают внутрь

Иными словами, полная кривизна всех простых замкнутых гладких кривых одинакова! Если бросить на стол веревочную петлю, так чтобы она не пересекала самое себя, то области отрицательной и положительной кривизны компенсируют друг друга, так что полная кривизна будет равна 2π . То есть факт гомеоморфности окружности однозначно определяет полную кривизну. Снова мы видим, как топология управляет геометрией.

Мы не станем доказывать эту теорему, но она тесно связана с теоремой о вращающихся касательных из предыдущей главы. И снова студент, знакомый с математическим анализом, заметит, что, поскольку мы суммируем скорость изменения вращающихся касательных, полная кривизна просто равна полному изменению угла касательного вектора, т. е. 2π .

Можно рассматривать эту теорему как еще одно обобщение теоремы о сумме внешних углов многоугольника. Вдоль сторон многоугольника кривизна равна нулю, а вся его кривизна сосредоточена в вершинах и принимает вид внешних углов. Полная кривизна равна 2π .

Теперь перейдем от кривых к поверхностям. Поскольку мы изучаем геометрические свойства поверхностей, то должны считать их жесткими, а не сделанными из резины, как в топологии. Будем также предполагать, что поверхности гладкие, не имеют резких складок и углов.

Как и для кривых на плоскости, мы исследуем кривизну поверхностей в трехмерном пространстве. Снова выберем вектор \vec{n} , нормальный к поверхности в точке x . Затем рассмотрим плоскость, проходящую через x

¹ Математик сказал бы, что $\int_C k ds = 2\pi$, где C – простая замкнутая гладкая кривая.

и параллельную \vec{n} . Пересечением этой плоскости с поверхностью является некоторая кривая, кривизну которой можно вычислить. Обычно кривизна кривых для разных плоскостей различается. Наименьшее и наибольшее значения k_1 и k_2 называются *главными кривизнами* поверхности в точке x (см. рис. 21.3). В 1760 году Эйлер доказал, что главным кривизнам соответствуют перпендикулярные плоскости².

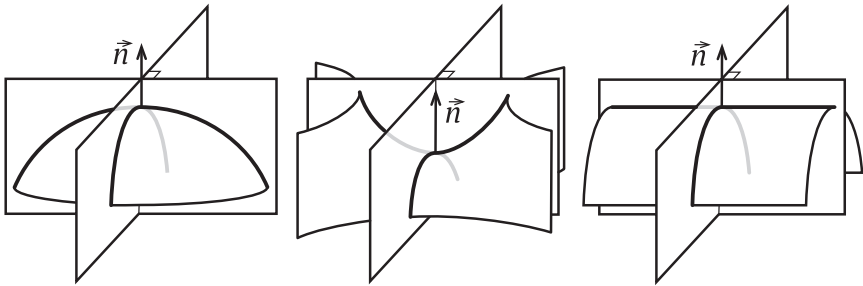


Рис. 21.3. Поверхности, для которых $k_1, k_2 < 0$ (слева), $k_1 > 0, k_2 < 0$ (в центре) и $k_1 = 0, k_2 > 0$ (справа)

Именно таким способом геометры измеряли кривизну поверхностей, пока Гаусс не внес простую, но критически важную модификацию. Он перемножил главные кривизны и получил единственное значение кривизны, которое теперь называется *гауссовой кривизной*: $k = k_1 k_2$. Эта, на первый взгляд, тривиальная операция, которая дает величину, содержащую меньше информации, чем две главные кривизны по отдельности, помогла математикам лучше понять природу кривизны поверхностей.

Как ни странно, большинство великих математиков в детстве не были вундеркиндами; их гений созрел постепенно и проявлялся на более поздних этапах жизни. Но математические способности Гаусса были очевидны уже в юном возрасте. Он родился в 1777 году в немецком герцогстве Брауншвейг. В три года Гаусс поразил своего отца Герхарда, указав ошибку в арифметических вычислениях в бухгалтерских книгах. Позже Гаусс по субботам сживал на высоком стуле и помогал отцу.

В молодости Гаусс любил рассказывать, как в семилетнем возрасте он шокировал тупого и заносчивого школьного учителя. Учитель дал классу задание: вычислить сумму арифметической прогрессии (пусть это будет³ $1 + 2 + 3 + \dots + 100$). Гаусс почти сразу написал на своей грифельной доске число 5050, положил ее на стол скептически настроенного учителя и заявил «ligget se» (вот она). Вместо того чтобы выполнять утомительное суммирование, Гаусс заметил, что если сложить первое число с последним, второе с предпоследним и т. д., то каждая сумма будет равна 101 ($1 + 100, 2 + 99, 3 + 98, \dots$). Поскольку таких пар пятьдесят, то сумма должна быть равна $50 \cdot 101 = 5050$.



Рис. 21.4. Карл Фридрих Гаусс

Этот случай в классе положил начало цепочке событий, которая в 1791 году привлекла к Гауссу внимание герцога брауншвейгского Карла Вильгельма Фердинанда. Герцог был очарован четырнадцатилетним юношей и пообещал оплатить его обучение. Щедрый герцог заплатил за обучение Гаусса в колледже Каролинум и в Гёттингенском университете, а затем продолжал выплачивать ему жалованье до самой своей смерти от рук наполеоновской армии в 1807 году.

Предчувствие не обмануло герцога. Свой первый важный результат, доказательство закона взаимности квадратичных вычетов, он получил, когда ему было девятнадцать лет. Эта теорема, которую он называл *theorema aureum* (золотая теорема), ускользнула от внимания и Эйлера, и Лагранжа.

В качестве своей личной печати Гаусс выбрал дерево с несколькими плодами и словами *pauca sed matura* (немного, но зрелые). Этот девиз действительно сопровождал Гаусса на протяжении всей карьеры. В отличие от плодовитого Эйлера, Гаусс не спешил публиковать свои работы. Он никогда не отдавал в печать тривиальных результатов, настаивая на том, что каждая публикация должна быть шедевром. Он говорил: «Вы знаете, что я пишу медленно. Это в основном потому, что я не бываю удовлетворен, пока не выскажу как можно больше в немногих словах, а писать быстро отнимает гораздо больше времени, чем писать со всеми деталями»⁴. Гаусс оставил свой след во многих науках: астрономии, геодезии, теории поверхностей, конформных отображениях, математической физике, теории чисел, теории вероятностей, топологии, дифференциальной геометрии и комплексном анализе.

Из-за стремления к совершенству Гаусс не опубликовал много блестящих результатов. Его математический дневник (*Notizenjournal*), обнаруженный через сорок три года после смерти, – кладезь математических идей. Если бы Гаусс опубликовал только часть этих результатов и ничего больше, то и тогда его запомнили бы как влиятельного математика. Печально сознавать, что математики годами трудились, только чтобы заново открыть идеи, уже известные Гауссу. Интересно, как далеко продвинулась бы математика XIX века, если бы Гаусс с большей охотой обнаруживал свои результаты.

После смерти герцога Гаусс был вынужден занять пост директора Гёттингенской обсерватории. Значительную часть последних двадцати лет жизни он потратил на занятия астрономией в обсерватории. Он дожил до 78 лет и мирно упокоился 23 февраля 1855 года.

Применяя подход Гаусса к измерению кривизны одной величиной $k = k_1 k_2$, мы можем сказать, что кривизна в точке положительна, отрицательна или равна нулю. Возвращаясь к рис. 21.3, мы видим, что если обе кривые, как края миски, загибаются в сторону нормального вектора (или в направлении от него), то знаки k_1 и k_2 одинаковы, и мы имеем положительную кривизну. С другой стороны, если, подобно седлу, одна кривая загибается в направлении нормального вектора, а другая – в направлении от него, то знаки k_1 и k_2 противоположны, и кривизна отрицательна. Если одна или обе главные кривизны равны нулю, как в случае цилиндра или плоскости, то кривизна нулевая.

Важно подчеркнуть, что кривизна измеряется в одной точке. На типичной поверхности имеются области положительной, отрицательной и нулевой кривизны. Например, тор на рис. 21.5 имеет положительную кривизну в области, наиболее удаленной от центра, отрицательную – в области, ближайшей к центру, и нулевую – на границе этих областей. Существуют поверхности постоянной кривизны. Сфера (не топологическая, а настоящая) имеет постоянную положительную кривизну, а плоскость и цилиндр – нулевую кривизну. Самый известный пример поверхности постоянной отрицательной кривизны – поверхность в форме слуховой трубки, называемая *псевдосферой*, – не потому, что она похожа на сферу, а потому, что имеет постоянную кривизну.

Гауссова кривизна, площадь и угловой избыток тесно связаны между собой, и именно эту связь мы должны понять. Мы уже видели, что кривизна и угловой избыток связаны. На рис. 20.9 показан геодезический треугольник на сфере – с угловым избытком и на седле – с угловым недостатком. Чем менее искривлена поверхность, тем больше она напоминает плоскость и тем больше треугольник на поверхности похож на плоский треугольник. При положительной кривизне имеет место угловой избыток, а при отрицательной – угловой недостаток.

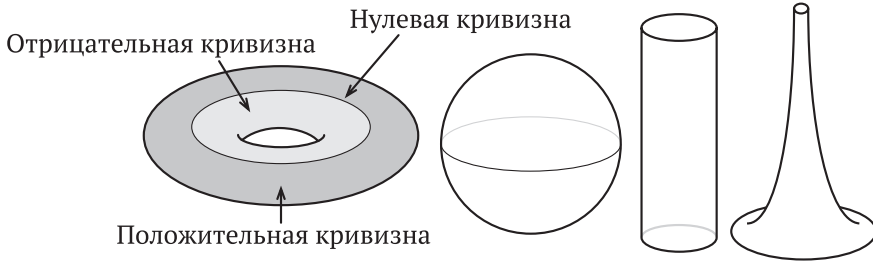


Рис. 21.5. Поверхность (тор) переменной кривизны: положительной, отрицательной и нулевой. У других поверхностей постоянная положительная кривизна (сфера), нулевая кривизна (цилиндр) и постоянная отрицательная кривизна (псевдосфера)

Также должно быть понятно, что размер имеет значение. На очень маленькие треугольники кривизна поверхности почти не влияет (представьте себе два равносторонних треугольника на земле, один с длиной стороны 1000 км, а другой – 1 см). Если увеличивать масштаб поверхности, то она будет казаться все более и более плоской. Чем меньше треугольник, тем ближе его угловой избыток к нулю.

Приведем еще одну иллюстрацию связи между кривизной и площадью. Возьмем участок поверхности с положительной кривизной, например кусочек луковичной шелухи или капустного листа. Попытавшись ровно разложить его на столе, мы обнаружим, что в середине слишком много материала. К сожалению, внешний край луковичной шелухи порвется, если попытаться ее разгладить. Именно поэтому на обычной (меркаторской) проекции Земли кажется, будто Гренландия размером с континентальную часть США, хотя на самом деле на территории нижних сорока восьми штатов легко уместилась бы три таких острова, как Гренландия. Для поверхностей отрицательной кривизны мы сталкиваемся с прямо противоположной проблемой. Если бы мы отрезали кусочек седловидной поверхности, то при попытке расправить его на столе оказалось бы слишком много материала по краям. Внутренняя часть диска пошла бы морщинами.

Изучив связь между кривизной, площадью и угловым избытком, мы сможем получить другое определение гауссовой кривизны. Рассмотрим геодезический треугольник Δ , содержащий точку x , с внутренними углами a, b, c . Угловой избыток этого треугольника, $E(\Delta) = a + b + c - \pi$, является хорошей мерой кривизны в точке x . Проблема в том, что, как мы уже отметили, при уменьшении треугольника величина $E(\Delta)$ стремится к нулю. Поэтому нужно масштабировать угловой избыток на площадь. Вместо того чтобы работать с $E(\Delta)$, мы будем использовать величину $E(\Delta)/A(\Delta)$, где $A(\Delta)$ – площадь треугольника Δ . Оказывается, что если уменьшать Δ , устремив его к x , то величина $E(\Delta)/A(\Delta)$ будет стремиться к гауссовой кривизне в точке x .

В такой формулировке гауссову кривизну особенно легко вычислить для поверхностей постоянной кривизны. Поскольку кривизна постоянна, то она равна просто $E(\Delta)/A(\Delta)$, где Δ – произвольный геодезический треугольник (необязательно сжимать треугольник в точку). Например, пусть Δ – октант сферы радиуса r . В таком треугольнике три прямых угла, поэтому угловой избыток равен $E(\Delta) = 3(\pi/2) - \pi = \pi/2$, а площадь $A(\Delta) = (1/8)4\pi r^2 = \pi r^2/2$. Следовательно, в каждой точке сферы гауссова кривизна равна $(\pi/2)/(\pi r^2/2) = 1/r^2$, и, значит, при увеличении радиуса сферы ее кривизна уменьшается. Кривизну бильярдного шара увидеть легко, но о кривизне Земли этого не скажешь.

Из такого определения гауссовой кривизны можно сделать еще один вывод. Рассмотрим лист бумаги, лежащий на столе. Очевидно, что его гауссова кривизна равна нулю. Если свернуть его в цилиндр, то геометрия изменится, но гауссова кривизна по-прежнему будет равна нулю. Как ни старайся, превратить лист бумаги в сферу положительной кривизны или седло отрицательной кривизны не получится. При любой деформации листа бумаги его кривизна останется нулевой. На техническом жаргоне эту мысль можно выразить, сказав, что мы можем изменять *внешнюю кривизну* листа, но никогда не сумеем изменить его *внутреннюю кривизну*.

Две главные кривизны k_1 и k_2 измеряют внешнюю кривизну поверхности – они зависят от того, как поверхность располагается в трехмерном пространстве. Для плоского листа бумаги $k_1 = k_2 = 0$, но для цилиндра одна из этих величин ненулевая. Главные кривизны являются внешними, потому что обитатели поверхности никогда не смогли бы вычислить их, производя вычисления только на поверхности. Они должны выйти за пределы поверхности и посмотреть, как она расположена в окружающем пространстве. Поскольку гауссова кривизна является произведением главных кривизн, $k = k_1 k_2$, она также служит мерой внешней кривизны.

Однако величины площадей и углов – внутренние свойства поверхности, поскольку могут быть измерены живущими на ней существами. Для вычисления этих величин не нужно фиксировать положение поверхности в пространстве. Площадь и углы треугольника, нарисованного на листе бумаги, не изменятся, когда мы свернем его в цилиндр. Следовательно, поскольку гауссову кривизну можно определить в терминах этих величин, она фактически является мерой внутренней кривизны поверхности!

Именно Гаусс первым открыл, что произведение двух внешних главных кривизн дает меру внутренней кривизны поверхности. Он оценил красоту своего открытия, поэтому назвал его *theorema egregium*, или «замечательная теорема».

Поскольку гауссова кривизна – внутреннее свойство поверхности, для ее измерения не требуется, чтобы объект был жестко закреплен в пространстве. Однако это и не топологическая мера. Если бы лист бумаги был топологической поверхностью (сделанной из резины), то можно было бы

как угодно изменить его кривизну и сильно исказить нарисованный на нем треугольник.

В 1827 году Гаусс доказал важную теорему, в которой развивалась связь между кривизной, площадью и угловым избытком⁵. Точно так же, как мы вычислили полную кривизну простой замкнутой кривой, Гаусс хотел вычислить полную кривизну области на поверхности. Для поверхности постоянной кривизны все просто. Если гауссова кривизна равна k , то полная кривизна области R равна $k \cdot A(R)$, где $A(R)$ – площадь R . Если область является геодезическим треугольником Δ , то полная кривизна равна $k \cdot A(\Delta) = [E(\Delta)/A(\Delta)]A(\Delta) = E(\Delta)$, угловому избытку треугольника.

Замечательная теорема Гаусса утверждает, что это верно и для геодезических треугольников на поверхностях непостоянной кривизны¹.

Локальная теорема Гаусса–Бонне

Полная кривизна геодезического треугольника на поверхности равна угловому избытку этого треугольника.

Иными словами, эта теорема говорит, что полная кривизна геодезического треугольника Δ равна $a + b + c - \pi$, где a, b, c – внутренние углы Δ .

Вторым человеком, имя которого фигурирует в названии этой теоремы, является французский геометр Пьер Оссиан Бонне (1819–1892). В 1848 году Бонне обобщил теорему Гаусса, доказав ее вариант для областей, стороны которых не являются геодезическими; этот вариант мы здесь приводить не будем⁶. Таким образом, Гаусс мог вычислить полную кривизну любого геодезического треугольника, а Бонне – полную кривизну любой замкнутой области на поверхности.

Удивительно, что ни Гаусс, ни Бонне не задались, казалось бы, естественным вопросом: какова полная кривизна всей поверхности? Они даже не поинтересовались полной кривизной сферы. Полную кривизну поверхности можно вычислить без всякого труда, объединив локальную теорему Гаусса–Бонне с теоремой об угловом избытке (по техническим причинам необходимо потребовать, чтобы поверхности были ориентируемыми).

Разобьем поверхность на геодезические треугольники. По локальной теореме Гаусса–Бонне, полная кривизна каждого треугольника равна его угловому избытку. Поэтому полная кривизна поверхности S равна полному угловому избытку поверхности, который, как мы знаем, составляет $2\pi\chi(S)$. Этот результат теперь называется глобальной теоремой Гаусса–Боннеⁱⁱ.

ⁱ Локальная теорема Гаусса–Бонне утверждает, что $\int_{\Delta} k dA = a + b + c - \pi$, где a, b, c – внутренние углы геодезического треугольника Δ .

ⁱⁱ Глобальная теорема Гаусса–Бонне утверждает, что полная кривизна поверхности S равна $\int_S k dA = 2\pi\chi(S)$.

Глобальная теорема Гаусса–Бонне

Полная кривизна ориентируемой поверхности равна $2\pi\chi(S)$.

Грубо говоря, глобальная теорема Гаусса–Бонне утверждает, что, растягивая и сжимаемая поверхность, мы можем изменить ее локальную кривизну, но полная кривизна не изменится. Все новые области положительной кривизны будут компенсированы новыми областями отрицательной кривизны. Роль играет только топология поверхности.

Может показаться странным, что локальная кривизна бильярдного шара отличается от локальной кривизны Земли, ведь форма-то у них одинакова, а различны только размеры. Глобальная теорема Гаусса–Бонне разрешает эти сомнения. Хотя кривизна Земли гораздо меньше кривизны бильярдного шара, ее площадь гораздо больше. А полная кривизна того и другого одинакова. Прибавление большого числа маленьких величин – то же самое, что прибавление одной большой.

Объединив теорему Гаусса–Бонне с теоремой классификации (глава 17) для ориентируемых поверхностей, мы придем к интересным выводам. Например, сфера – единственная замкнутая поверхность с положительной эйлеровой характеристикой. Поэтому любая поверхность положительной полной кривизны должна быть гомеоморфна сфере. Аналогично, если полная кривизна замкнутой поверхности равна нулю, то она должна быть гомеоморфна тору. У любой другой замкнутой ориентируемой поверхности (рода g , где $g > 1$) полная кривизна должна быть отрицательна.

Хотя и Гаусс, и Бонне прошли мимо этого глобального варианта теоремы, Вильгельм Бляшке (1885–1962) решил назвать его в их честь в учебнике, который написал в 1921 году⁷. Именно в этой книге появилось доказательство глобальной теоремы, в котором используется локальная теорема. А первое доказательство глобальной теоремы Гаусса–Бонне датируется 1888 годом, когда Дик доказал ее совершенно другим способом⁸. И снова мы видим, как неожиданно иногда дают имена теоремам.

В этой и предыдущей главах мы видели красивые и неожиданные связи между топологией и геометрией. Мало того что эйлерова характеристика является топологическим инвариантом, она еще и служит соединительным звеном между двумя совсем разными дисциплинами. Это еще одна причина, по которой формула Эйлера является фундаментальным явлением в математике. В следующих двух главах мы увидим, как эйлерова характеристика обобщается на многомерные объекты.

Глава 22

Путешествие в n измерениях

Лиза: Где мой папа?

Профессор Фринк: Даже самому недалекому человеку, имеющему научную степень по гиперболической топологии, должно быть очевидно, что Гомер Симпсон забрел в третье измерение... [рисует на доске]. Вот обыкновенный квадрат –

Шериф Виггам: Эй, притормози, яйцеголовый!

Профессор Фринк: – но допустим, что мы продолжили квадрат за пределы двух измерений нашей Вселенной вдоль гипотетической оси z [все затаили дыхание]. Тогда получится трехмерный объект, именуемый «кубом», или «фринкаэдром» в честь его первооткрывателя.

– Симпсоны, «Хэллоуинские эпизоды, VI»

До сих пор все наши топологические объекты были кривыми или поверхностями – локально одномерными или двумерными объектами, расположенными в 2-, 3- или 4-мерном пространстве. Поверхности были топологическим обобщением многогранника, а формула Эйлера для многогранников была элегантно обобщена на эйлерову характеристику поверхностей. Теперь естественно спросить, что можно сказать о многомерных топологических фигурах. Что это такое и существует ли для них понятие эйлеровой характеристики?

В главе 23 мы увидим, что Пуанкаре определил эйлерову характеристику в многомерных топологических пространствах и доказал, что это топологический инвариант. Но прежде чем обсуждать результаты Пуанкаре, следует поговорить о понятии размерности и некоторых ранних попытках обобщить эйлерову характеристику.

Все мы знакомы с 0-, 1-, 2- и 3-мерным пространством. В трехмерном пространстве мы живем. Деревья, дома, люди, собаки – все это трехмерные объекты. В трехмерном пространстве встречаются двумерные объекты, например классная доска, лист бумаги или телеэкран. Струна, гимнастическое бревно, телефонный шнур – одномерные объекты. Точка в конце предложения нульмерна.

Принято ассоциировать размерность с геометрическими фигурами: точками, прямыми и плоскостями. Но, как мы видели в предыдущих главах, нам необходимо определение размерности, не столь жесткое, как в геометрии. Перспективнее говорить о размерности в терминах степеней свободы: размерность – это число независимых направлений, в которых может перемещаться объект.

Рассмотрим стаю птиц на рис. 22.1. У каждой птицы имеются ограничения на перемещение – у них разное число степеней свободы. Птица, сидящая на телеграфном столбе, вообще никуда не может лететь. Она находится в нульмерном пространстве. Птица на проводе может двигаться вбок. У нее одна степень свободы, т. е. она обитает в 1-мерном пространстве. Птица, находящаяся на земле, живет в 2-мерном пространстве, а летящая птица – в 3-мерном. Заметим, что ни слова не было сказано о прямых и плоскостях, только о степенях свободы. Провисший провод, безусловно, не является прямой линией, а на земле есть ухабы и колдобины.

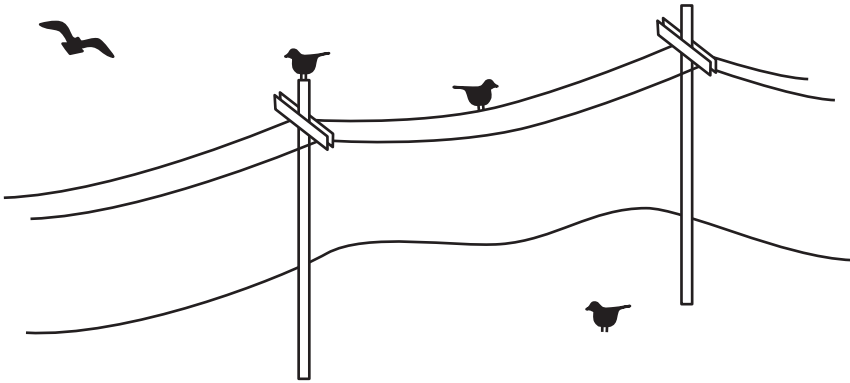


Рис. 22.1. Птицы в 0-, 1-, 2- и 3-мерном пространстве

Поскольку мы живем в 3-мерном мире, нам легко воспринять идею размерности 0, 1, 2 и 3. Четыре и более измерений выходят за пределы нашего чувственного опыта. Изучая скрещенные колпаки, бутылку Клейна и проективную плоскость, мы осознали необходимость четвертого измерения. И хотя вообразить переход в четвертое измерение нелегко, представить сами эти 4-мерные поверхности не составляет особого труда, ведь они по большей части трехмерные. Топологические объекты, которые требуют большего, чем короткий «объезд» через четвертое измерение, – совсем другая история.

Часто доводится слышать, что четвертое измерение – это время. Такая точка зрения была введена в обиход Жозефом-Луи Лагранжем примерно в 1788 году¹. Время – величина, с которой мы все знакомы, и она могла бы помочь воспринять 4-мерное пространство. Но тут есть один подвох.

Нельзя игнорировать «стрелу времени». У трех знакомых нам физических измерений нет направления. Частицы могут двигаться взад-вперед по прямой, не нарушая законов физики. Однако та же самая частица не может двигаться назад во времени. По сравнению с тремя другими измерениями у времени определенно есть принципиальное отличие. В общем случае мы не хотим, чтобы наше четвертое измерение обладало таким ограничительным свойством.

На практике многомерные пространства возникают естественно. Для расчета движения космического челнока нужно шесть измерений – три для определения положения в пространстве и три для скорости. Чтобы задать положения и скорости Солнца, Земли и Луны, нужно восемнадцать измерений. Экономисты при построении финансовой модели, экологи при изучении популяций и физики в квантовой теории оперируют очень большим количеством переменных (каждая из которых является измерением). С математической точки зрения, измерений может быть сколько угодно.

Каким бы ни был источник многомерного пространства, в нашем обсуждении предполагается, что все измерения физические, не отличающиеся от привычных трех измерений. Мы не утверждаем, что *существует* больше трех физических измерений. Может, да, а может, и нет (физики, занимающиеся теорией струн, считают, что измерений по меньшей мере десять). С точки зрения математики, это несущественно.

n -мерное евклидово пространство обозначается \mathbb{R}^n . \mathbb{R}^1 – множество вещественных чисел – та самая числовая прямая, которую мы изучали в школе. Каждую точку на прямой можно представить одним значением x . \mathbb{R}^2 – бесконечная плоскость. На ней определены координатные оси x и y , с помощью которых можно представить любую точку упорядоченной парой (x, y) . Трехмерное евклидово пространство обозначается \mathbb{R}^3 , каждая точка в нем представляется упорядоченной тройкой (x, y, z) . Чисто математически обобщить эти понятия на n -мерное евклидово пространство тривиально. Каждую точку в \mathbb{R}^n можно единственным способом описать упорядоченным кортежем длины n – (x_1, x_2, \dots, x_n) . Мы можем работать с такими многомерными пространствами вне зависимости от того, существуют они физически или нет.

Мы много времени посвятили изучению поверхностей. При описании поверхностей мы считали, что они локально двумерные. Муравей, обитающий на поверхности, имеет две степени свободы. Ту же идею можно обобщить на многомерные пространства. *n -мерным многообразием* называется топологический объект, который локально выглядит как n -мерное евклидово пространство. У обитателей такого многообразия имеется n степеней свободы. Как и поверхности, многообразия характеризуются локальной простотой и глобальной сложностью. Они могут иметь дырки и другие нетривиальные топологические особенности. Но вне зависимости от глобальных характеристик вблизи все n -мерные многообразия похожи на \mathbb{R}^n .

Подобно поверхностям, n -мерные многообразия могут быть ориентируемыми и неориентируемыми. Самый простой способ проверки на ориентируемость дает критерий Дика (глава 16). Пусть имеется два одинаковых набора осей координат на неориентируемом n -мерном многообразии. Тогда можно переместить один набор осей вдоль многообразия таким образом, что когда он вернется в исходную точку, все оси не удастся совместить. Например, в случае 3-мерного многообразия, если совместить оси x и y , оси z будут направлены в разные стороны (см. рис. 22.2).

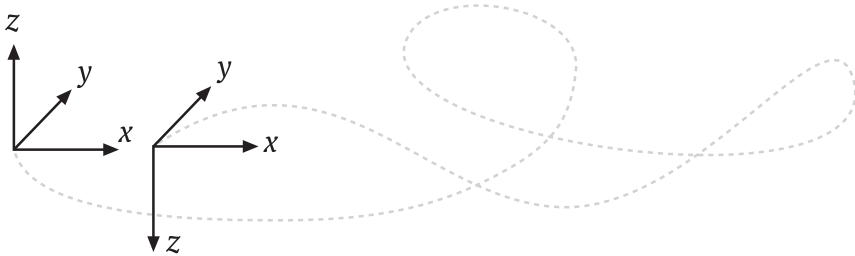


Рис. 22.2. Оси координат на неориентируемом 3-мерном многообразии

Многообразия любой размерности могут иметь края, и край n -мерного многообразия является многообразием на единицу меньшей размерности. Край 1-мерного многообразия – 0-мерное многообразие (две точки), край 2-мерного многообразия (поверхности) – 1-мерное многообразие (одна или несколько окружностей), а край 3-мерного многообразия (тела) – поверхность. Например, краем сплошного тора является обычный (полый) тор. Краем сплошного шара является сфера, и вообще n -мерный шар B^n является n -мерным многообразием, а его краем – $(n - 1)$ -мерная сфера S^{n-1} (определения S^n и B^n см. в главе 19.)

История многообразий восходит к Риману и его изучению многозначных комплексных функций и ассоциированных с ними римановых поверхностей. Но только на рубеже XX столетия Пуанкаре показал, что многообразие – важный объект исследования и предложил несколько способов его описания. Пожалуй, простейший из них – выразить многообразие в виде подмножества \mathbb{R}^n с помощью одного или нескольких уравнений. Например, уравнение $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ определяет сферу, а $(3 - \sqrt{x^2 + y^2})^2 + z^2 = 1$ – тор. Оба многообразия находятся в \mathbb{R}^3 .

Иногда Пуанкаре представлял многообразие n -мерным многогранником, который называл *симплициальным комплексом*. В симплициальном комплексе обобщением вершины, ребра и грани является *симплекс*. Можно предполагать, что все симплексы – это треугольники или многомерные аналоги треугольников. На рис. 22.3 показано, что k -симплекс – это k -мерная фигура, определяемая $k + 1$ точками. 0-симплекс – это точка,

1-симплекс – отрезок прямой, 2-симплекс – треугольник, 3-симплекс – треугольная пирамида и т. д. Предполагается, что два соседних симплицеальных комплекса граничат по симплексу меньшей размерности. (Заметим, что как многогранники Гесселя [глава 15] не были поверхностями, так не каждый симплицеальный комплекс является многообразием.)

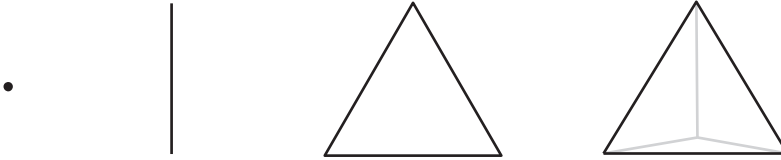


Рис. 22.3. 0-, 1-, 2- и 3-симплексы

Пуанкаре предложил еще один способ описания многообразий – обобщение построения поверхностей Клейном. Как Клейн строил поверхности, склеивая стороны многоугольников, так Пуанкаре создавал n -мерные многообразия, склеивая грани n -мерных многогранников. Чтобы получить тор, нужно склеить противоположные грани квадрата без перекручивания. Аналогично, чтобы построить 3-мерный тор, нужно попарно склеить противоположные грани куба без перекручивания (см. рис. 22.4). 3-мерный тор – пример замкнутого ориентируемого 3-мерного многообразия.

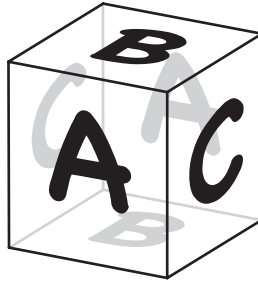


Рис. 22.4. После склеивания соответственных граней получается тор

В абстрактном определении многообразия не говорится, где это многообразие «живет». Мы смогли определить бутылку Клейна и понять ее свойства, не зная, что она не может существовать в \mathbb{R}^3 . Спрашивается: если дано n -мерное многообразие общего вида, всегда ли можно поместить его в евклидово пространство \mathbb{R}^m , так чтобы избежать самопересечений? Если да, то насколько большим должно быть m ? Хасслер Уитни доказал, что любое n -мерное многообразие можно разместить в некотором евклидо-

вом пространстве размерности не больше $2n$. Этот результат называется *теоремой Уитни о вложении*.

В главе 17 мы рассматривали теорему классификации для поверхностей. Каждая поверхность является либо сферой с ручками, либо сферой со скрещенными колпаками. Имеет смысл задаться вопросом, можно ли классифицировать n -мерные многообразия для $n > 2$. Оказывается, что это очень трудная задача. В главе 17 мы утверждали, что размерность n -мерного многообразия – топологический инвариант, т. е. 5-мерное многообразие не может быть гомеоморфно 7-мерному. Даже этот результат обосновать было нелегко. Только в 1911 году Брауэр доказал теорему об *инвариантности размерности*², которая утверждает, что \mathbb{R}^n негомеоморфно \mathbb{R}^m при $m \neq n$. Позже мы обсудим одну из самых знаменитых задач классификации, за решение которой была назначена награда в миллион долларов.

Важность задач классификации не следует недооценивать. Один из главных открытых вопросов – какова форма Вселенной? Всем, кроме специалистов по теории струн, представляется, что мы живем в трехмерной Вселенной – гигантском 3-мерном многообразии (предположительно без края!). Каковы свойства этого многообразия? Конечен ли его диаметр, или оно простирается бесконечно? Верно ли, что оно топологически эквивалентно \mathbb{R}^3 , или же оно имеет нетривиальные топологические свойства? И еще более странный вопрос – ориентируемо ли оно? Может ли случиться, что космонавт-правша улетит далеко от Земли и вернется левшой?

Теперь, когда мы ввели понятие многообразия для любой размерности, естественно возникает вопрос, применима ли к ним формула Эйлера. Для ответа на него нам придется вернуться к многогранникам. Коши первым увидел нечто подобное обобщению формулы Эйлера на более высокие размерности³. В той же статье, где он доказал формулу Эйлера путем проецирования многогранника на плоскость, был сформулирован и доказан многомерный ее аналог в одном частном случае. Коши доказал, что если пометить вершины, ребра и грани внутри выпуклого многогранника, разбив его тем самым на S выпуклых многогранников, и обозначить V , E , F соответственно полное число вершин, ребер и граней (включая и внутренне), то

$$V - E + F - S = 1.$$

Для иллюстрации теоремы Коши рассмотрим разбиения октаэдра и куба на рис. 22.5. Новая грань внутри октаэдра разбивает его на два многогранника, поэтому $S = 2$. Имеется 6 вершин, 12 ребер и 9 граней. В полном соответствии с утверждением Коши, $6 - 12 + 9 - 2 = 1$. Аналогично в кубе, разбитом на 3 многогранника, имеется 12 вершин, 22 ребра и 14 граней, и $12 - 22 + 14 - 3 = 1$.

В 1852 году Людвиг Шлефли открыл вариант формулы Эйлера, справедливый для выпуклых многогранников любой размерности, но эта рабо-

та была опубликована только в 1901 году, когда его результаты уже были заново открыты другими⁴. Пусть P – n -мерный многогранник, имеющий b_0 вершин, b_1 ребер, b_2 граней и вообще b_k граней размерности k . Шлефли представлял себе эти многогранники как полые оболочки, ограниченные $(n-1)$ -мерными гранями, это означает, что $b_n = 0$. Определим эйлерову характеристику как знакопеременную сумму числа граней разных размерностей: $\chi(P) = b_0 - b_1 + b_2 - \dots \pm b_{n-1}$. Шлефли заметил, что $\chi(P) = 0$, когда n нечетно, и $\chi(P) = 2$, когда n четно.

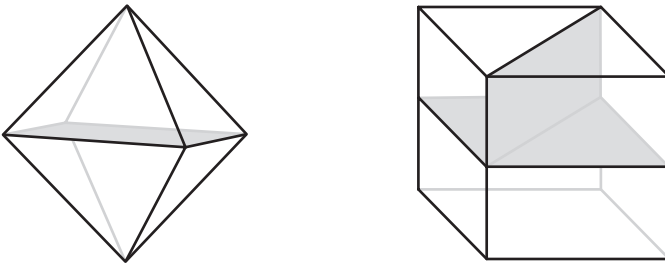


Рис. 22.5. Разбиение октаэдра и куба

Рассмотрим результаты Коши и Шлефли с точки зрения современной топологии. Прежде всего оба ограничивались только выпуклыми многогранниками, не имеющими ни дыр, ни туннелей. Топологически полый n -мерный многогранник Шлефли гомеоморфен $(n-1)$ -мерной единичной сфере, S^{n-1} . Таким образом, теорема Шлефли показывает, что $\chi(S^n) = 0$ при нечетном n и $\chi(S^n) = 2$ при четном n . С другой стороны, Коши предполагал, что выпуклый многогранник сплошной, т. е. топологически эквивалентный трехмерному шару B^3 . Коши доказал, что $\chi(B^3) = 1$, а мы теперь знаем, что $\chi(B^n) = 1$ для всех n . Чтобы убедиться в этом, создадим B^n , «заполним» многогранник Шлефли одной n -мерной гранью. Тогда $\chi(B^n) = \chi(S^{n-1}) + (-1)^n$. Для четных n $\chi(B^n) = 0 + 1 = 1$, а для нечетных n $\chi(B^n) = 2 - 1 = 1$.

Следующее обобщение на многомерный случай было предложено Листингом. Мы уже несколько раз с ним встречались. Он внес вклад в теорию графов (глава 11), первым из математиков стал изучать узлы (глава 18), открыл ленту Мёбиуса раньше самого Мёбиуса и даже придумал термин «топология» (глава 16). Фактически он первым подошел к формуле Эйлера с чисто топологической точки зрения и стал первым математиком, *думавшим* как тополог. Можно было бы назвать его одним из гигантов топологии. Но в действительности его мало кто знал во время жизни, да и после смерти он долго оставался незаметной фигурой. Даже теперь в «Словаре научных биографий», восемнадцатитомном собрании кратких биографий наиболее значительных ученых и математиков за всю историю человечества, нет статьи о Листинге.



Рис. 22.6. Иоганн Листинг

Не понятно, почему он так и не занял достойного места в истории. У него прекрасный академический послужной список. Он защитил докторскую диссертацию под руководством Гаусса и оставался в ближнем кругу своего учителя до самой его смерти (Листинг присутствовал на похоронах). В течение восьми лет он жил по соседству с Риманом. (Удивительно, что нет никаких свидетельств совместной работы или даже значимых бесед между ними, хотя у них так много общего. Высказывалось предположение, что Листинг, возможно, опасался заразиться туберкулезом, терзавшим семью Римана⁵.) Листинг внес важный вклад и в другие области науки, например оптику глаза. Помимо топологии, он ввел в оборот еще несколько терминов, сохранившихся до наших дней, например «микрон» – миллионная доля метра.

Быть может, неизвестностью он обязан личным качествам. Будучи общительным и добрым человеком, он страдал маниакально-депрессивным психозом, постоянно испытывал финансовые затруднения из-за больших долгов, а его жена часто вступала в конфликт с законом. Быть может, из-за своего беспокойного духа он на несколько лет отдалялся от математики и принимал неудачные карьерные решения, а быть может, все объясняется отказом играть в политические игры в академии. Возможно, проблема – в его способе изложения математики. В его работах всегда очень много внимания уделяется деталям, за которыми трудно разглядеть важные и глубокие открытия.

Он написал две монографии по топологии, одну в 1847, другую в 1861 году⁶. Первая, уже упоминавшаяся «Топология», состояла в основном из его размышлений на топологические темы. Вторая, с длинным названием «Der Census räumlicher Komplexe oder Verallgemeinerung des Euler'schen Satzes von den Polyedern» («Исследование пространственных комплек-

сов, или Обобщение теоремы Эйлера на многогранники»), содержала его обобщения формулы Эйлера на невыпуклые трехмерные тела. В 1884 году П. Г. Тэйт сетовал, что труды Листинга по топологии не были извлечены из незаслуженной безвестности и не опубликованы на английском, особенно когда так много работ, по сравнению с ними ничемных или, по крайней мере, не столь полезных, удостоилось этой чести⁷.

В «Исследовании» Листинг отказался от взгляда на многогранники как на жесткие фигуры, а подверг проблему топологическому рассмотрению. Листинг подсчитывал количество вершин, ребер, граней и (трехмерных) пространственных граней, но допускал, что эти характеристики могут иметь нетривиальную топологию, или (в его терминологии) *циклозис*. Например, он считал окружность ребром, а сферу гранью, но при подсчете модифицировал итог, принимая во внимание их топологию. Цилиндр он считал гранью, но, поскольку тот содержит нетривиальную петлю, вычитал единицу. Таким образом, если A, B, C, D – соответственно число вершин, ребер, граней и пространственных граней, очищенных от циклозиса, то $A - B + C - D = 0$.

Чтобы дать представление о том, как устроено разбиение Листинга, применим его к сплошному тору – это разбиение показано на рис. 22.7. В нем нет вершин, одно круговое ребро, две грани (в форме цилиндра и в форме диска) и две пространственные грани (внутренность цилиндра и окружающее пространство, которое он тоже учитывал в подсчете). Поскольку в этом разбиении нет вершин, $A = 0$. Ребро одно, но оно содержит замкнутую петлю, так что $B = 1 - 1 = 0$. Грани две, но поскольку цилиндрическая грань содержит замкнутую петлю вдоль окружности, то C уменьшается на единицу. Таким образом, $C = 2 - 1 = 1$. Наконец, пространственных грани две, но поскольку внешнее пространство содержит нетривиальную петлю, имеем $D = 2 - 1 = 1$. В полном согласии с формулой Листинга: $A - B + C - D = 0 - 0 + 1 - 1 = 0$.

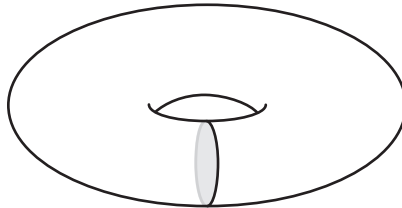


Рис. 22.7. Разбиение сплошного тора

Подход Листинга к задаче был удивительно остроумным и проникательным. Это была первая попытка рассмотреть трехмерную формулу Эйлера с чисто топологической точки зрения. Однако она была далека от совершенства. Уж как минимум способ вычисления A, B, C и D был путанным.

Листинг отказался от изящной простоты вершин, ребер и граней Эйлера. Вместо этого мы должны понимать топологию каждого элемента разбиения Листинга.

Следующий крупный вклад в теорию n -мерной топологии был сделан Риманом и итальянским математиком Энрико Бетти (1823–1892). Чтобы понять, в чем он состоял, нам придется вернуться к изучению поверхностей, предпринятому Риманом.

В своей докторской диссертации 1851 года Риман представил топологический инвариант – число дырок в ориентируемой поверхности. Он назвал его *числом связности поверхности*⁸. Поверхность (с краем или без края) имеет число связности n , или является n -*связной*ⁱ, если n – наибольшее число разрезов, при котором поверхность еще не распадается на частиⁱⁱ. Если поверхность имеет край, то разрезы должны начинаться и заканчиваться на крае. Если же у поверхности нет края, то первый разрез должен начинаться и заканчиваться в одной и той же точке (после чего у поверхности появится край).

На рис. 22.8 показано три поверхности с краем: цилиндр, диск с тремя дырками и лента Мёбиуса. Пунктирными линиями представлены разрезы. Для цилиндра и диска с дырками число связности равно 1 и 3 соответственно. Работа Римана по числам связности предшествует открытию неориентируемых поверхностей Мёбиусом, но числа связности для неориентируемых поверхностей вычисляются точно таким же образом. В частности, лента Мёбиуса 1-связная.

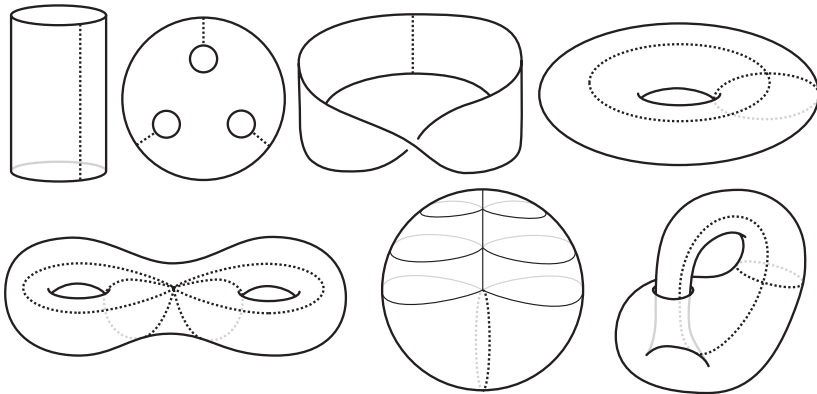


Рис. 22.8. Разрезы для определения чисел связности различных поверхностей

ⁱ В наши дни значение термина n -связный несколько изменилось.

ⁱⁱ На самом деле число связности Римана было на единицу больше этого значения, но мы уменьшили его, чтобы сохранить совместимость с современной нотацией.

Простейшей замкнутой поверхностью является сфера. Любой разрез вдоль замкнутой кривой разбивает сферу на две части. Поэтому сфера 0-связная. Если разрезать тор вдоль трубки, то получится цилиндр. После второго разреза параллельно оси цилиндра получится прямоугольник. Следовательно, число связности тора равно 2. Аналогично можно вычислить числа связности других поверхностей. Двойной тор 4-связен, проективная плоскость 1-связна, а бутылка Клейна 2-связна.

Может показаться, что число связности – новый важный топологический инвариант, но на самом деле это замаскированная эйлерова характеристика. Проницательный читатель, наверное, уже подметил связь между числом связности и родом ориентируемой замкнутой поверхности. И Риман тоже обратил на это внимание – число связности в два раза больше рода. Если известна одна из трех величин – род, эйлерова характеристика или число связности, – то можно вычислить и остальные две.

Давайте уточним связь между числом связности и эйлеровой характеристикой. Представим себе, что до фактического разрезания мы нарисовали линии разрезов на n -связной поверхности S . Это дает очень простое разбиение поверхности. Для простоты предположим, что все разрезы начинаются и заканчиваются в одной и той же точке, так что $V = 1$. После разрезания останется одна грань, так что $F = 1$. Кроме того, каждая линия разреза является ребром, так что $E = n$. В результате получаем следующее простое соотношение между числом связности и эйлеровой характеристикой:

$$\chi(S) = 1 - n + 1 = 2 - n.$$

К концу жизни здоровье Римана начало ухудшаться. Между 1862 годом и смертью, последовавшей в 1866 году, он несколько раз ездил в Италию на лечение. В одну из поездок он навестил своего знакомого Бетти, с которым встречался в Гёттингене в 1858 году. Бетти был профессором в Пизанском университете. Он также преподавал в высшей школе, был членом парламента и сенатором. Он был известным математиком и одаренным преподавателем и сыграл важную роль в возрождении математики в Италии после ее объединения.

Будучи в Италии, Риман беседовал с Бетти о том, как обобщить числа связности на многообразия более высокой размерности. Трудно сказать, кто из них какой вклад внес в теорию. В 1871 году именно Бетти опубликовал эти обобщения, но из писем и заметок видно, что Риман многое знал о них еще в 1852 году.

Идея обобщения заключается в том, чтобы по аналогии с тем, как Риман подсчитывал 1-мерные разрезы поверхности, подсчитать для n -мерного многообразия максимальное число m -мерных многообразий (подчиняющихся некоторым сложным условиям) для каждого $m \leq n$. Это даст числа связности b_m для всех m от 0 до n . В этих обозначениях b_1 является римановым числом связности.



Рис. 22.9. Энрико Бетти

Бетти доказал, что b_m – топологические инварианты многообразия. Однако работать с n -мерными многообразиями трудно, и позже выяснилось, что в определениях и рассуждениях Бетти имелись тонкие ошибки. Тем не менее работа Бетти стала исключительно важным шагом на пути к пониманию топологии n -мерных многообразий.

Исправить ошибки Бетти вознамерился Анри Пуанкаре. Он сделал это – и гораздо больше.

Глава 23

Анри Пуанкаре и взлет топологии

Создаваемые математиком образы, подобно образам художника или поэта, должны обладать красотой; подобно краскам или словам, идеи должны сочетаться гармонически. Красота служит первым критерием: в мире нет места безобразной математике.

– Г. Х. Харди¹

Если формулы Эйлера, касающиеся кёнигсбергских мостов и многогранников, знаменуют рождение топологии, а работы Листинга, Мёбиуса, Римана, Клейна и других математиков XIX века – годы ее юности, то признаком наступления зрелого возраста стали труды Анри Пуанкаре. И до него существовали теоремы, которые сегодня мы относим к топологическим, но лишь в самом конце XIX века Пуанкаре систематизировал эту область.

Изучая полное собрание его трудов, мы замечаем общую тему: топологический взгляд на математику. Быть может, этот качественный подход к предмету объясняется его нелюбовью (или, как он сам говорил, затруднениями) к математическим вычислениям. А быть может, это реакция на печально известное отсутствие художественных способностей (вспомните, он называл геометрию «искусством рассуждений о плохо нарисованных фигурах»). Как бы то ни было, Пуанкаре в конце концов сам увидел эту общую черту и написал: «К какой бы задаче я ни приступал, она приводила меня к *Analysis Situs*»².

Пуанкаре имел в виду первопроходческую 123-страничную статью *Analysis Situs*³, написанную в 1895 году. За последующие десять лет он написал ее продолжение в пяти основополагающих частях, которые сам называл дополнениями⁴. Об этих шести статьях Жан Дьедонне писал:

Как и во многих своих статьях, он дал волю своему воображению и необычайно развитой «интуиции», которая очень редко уводила его не в ту сторону; почти каждый раздел содержит оригинальную идею. Но не следует нам искать точных определений, и зачастую приходится из контекста догадываться, что он имел в виду. Многие результаты он вообще оставил без доказательства,

а если и давал себе труд привести доказательство, то чуть ли не каждый аргумент вызывает сомнения. Эта статья на самом деле является *чертежом* для будущих разработок совершенно новых идей, и чтобы под каждую из них подвести твердые основания, потребовалось создать новые методы⁵.

Представьте себе Джонни-яблочное семечко¹, который бродил по пустошам и разбрасывал семена, из которых впоследствии выросли плодоносящие сады. Вряд ли будет преувеличением сказать, что почти все исследования по топологии до начала 1930-х годов выросли из этой работы Пуанкаре.

Один из его современников писал: «В области *Analysis Situs* Пуанкаре недавно принес нам множество новых результатов, но в то же время поднял множество новых вопросов, которые все еще ждут своего разрешения»⁶. Пробелы и прорехи в рассуждениях Пуанкаре действительно были, и для их устранения понадобилось время. Интуитивный подход к предмету, характерный для Пуанкаре и его предшественников, нужно было подкрепить солидными математическими аргументами. Строгость и единый стандарт доказательств в топологии появились примерно в 1910 году, и еще несколько десятилетий ушло на возведение прочной конструкции по чертежам Пуанкаре.

Один из многих важных вкладов Пуанкаре – изобретение понятия *гомологии*. Это остроумный способ формализовать изучение римановых чисел связности и их многомерных обобщений Бетти. В наши дни гомология – одно из основных средств анализа многообразий. Пуанкаре ввел это понятие в *Analysis Situs* и уточнял в каждом дополнении. Потребовалось примерно тридцать лет, чтобы теория гомологий приняла современную форму.

Описание теории гомологий – все равно, в современных терминах или по Пуанкаре – выходит за рамки этой книги. Вместо этого мы ограничимся поверхностным изложением, полагаясь на интуицию. Мы обсудим не n -мерный вариант, а лишь 1-мерную гомологию на поверхностях.

Один из способов интерпретировать 1-мерную гомологию заключается в том, чтобы взглянуть на петли, нарисованные на поверхности. Не будем фиксировать петлю, а позволим ей перемещаться по поверхности. Она может как угодно растягиваться, укорачиваться и извиваться, лишь бы не разрывалась и не покидала поверхность.

Простейшей из возможных является топологически тривиальная петля, которую можно стянуть в точку. Она может произвольно виться по поверхности, но не должна окружать дырки. Например, поскольку в сфере нет дырок, любую петлю, нарисованную на ее поверхности, можно стянуть в точку.

¹ Житель США, ставший впоследствии фольклорным персонажем. См. ru.m.wikipedia.org/wiki/Джонни_Эпплсид. – *Прим. перев.*

Простейшие поверхности – это те, на которых, как на сфере, любая петля топологически тривиальна. Такая поверхность называется *односвязной*. Как видно по рис. 23.1, диск и сфера односвязные, а кольцо и тор – нет.

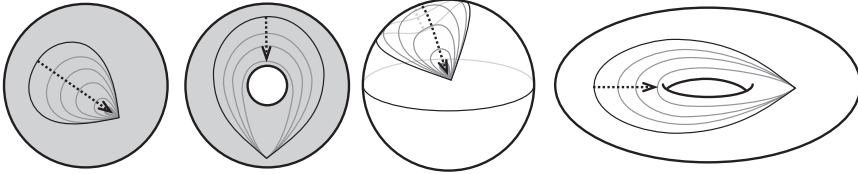


Рис. 23.1. Диск и сфера – односвязные поверхности, а кольцо и тор – нет

Из теоремы классификации поверхностей мы знаем, что сфера – единственная односвязная замкнутая поверхность. На всех прочих имеется бесконечно много нетривиальных петель. Пуанкаре понял, что важно подсчитывать существенные, или независимые нетривиальные, циклы на поверхности. Для ориентируемых поверхностей он назвал эту величину 1-мерным числом *Бетти*, в честь Бетти. Для его вычисления он определил странную арифметическую операцию на множестве петель, которую мы будем записывать как сложение.

В теории гомологий любая петля имеет ориентацию и называется *циклом*. Таким образом, циклы a и $-a$ – одна и та же петля, но с противоположными ориентациями. Суммой двух петель a и b называется объединение циклов, поэтому $a + b$ и $b + a$ – одно и то же, что в нашей нотации записывается как $a + b \equiv b + a$. Иногда желательно представлять себе $a + b$ как самостоятельную петлю. Согласно нашей арифметике, мы можем проследовать по петле a , затем по b , или по петле b , затем по a . Хотя это могут быть разные петли, они представляют один и тот же цикл. Мы допускаем взаимное уничтожение двух циклов противоположной ориентации, т. е. $a + (-a) + b \equiv b$. Кроме того, если цикл a можно деформировать в цикл b , то $a \equiv b$.

Чтобы почувствовать, как работает такое сложение, рассмотрим три цикла a , b и c на торе (рис. 23.2). Как видим, можно деформировать цикл c , так что он совпадет с циклом a , за которым следует цикл b . Поэтому c и $a + b$ – один и тот же цикл, или $c \equiv a + b$.

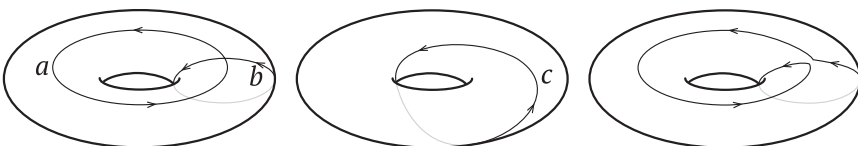


Рис. 23.2. Цикл c можно деформировать в цикл $a + b$

Если это действительно операция сложения, то должен быть нулевой цикл. На что он похож? Самый очевидный нулевой цикл – тот, что можно стянуть в точку. На односвязной поверхности любой цикл нулевой. И всё? Верно ли, что единственные нулевые циклы – топологически тривиальные? Оказывается, нет. Цикл w на рис. 23.3 охватывает «талию» двойного тора, и стянуть его в точку невозможно. Однако его можно деформировать, так что он пройдет по циклу u , затем по v , потом по $-u$ и по $-v$. Следовательно, $w \equiv u + v + (-u) + (-v) \equiv 0$.

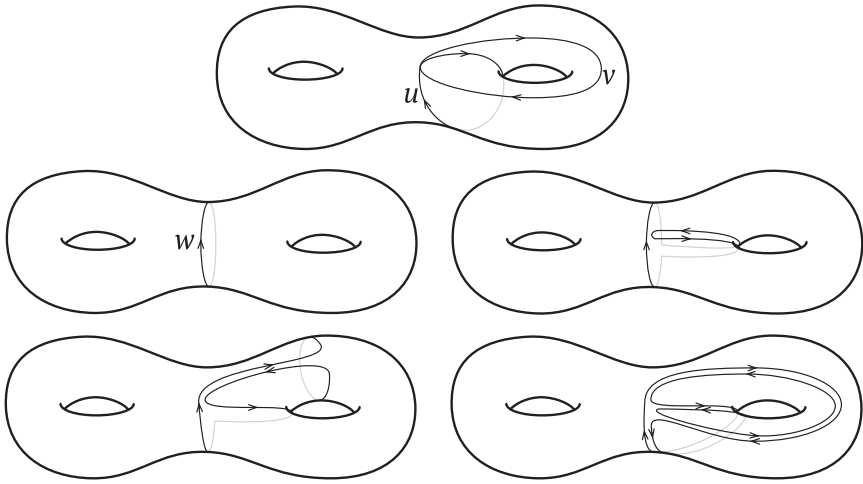


Рис. 23.3. Нулевой цикл на двойном торе, который невозможно стянуть в точку

Мы видим, что цикл s на рис. 23.2 можно записать в виде суммы циклов a и b . Оказывается, что любой цикл на торе можно записать в виде суммы a и b . Иными словами, если дан произвольный цикл d на торе, то можно найти такие целые числа m и n , что $d \equiv ma + nb$. То есть a и b – единственные существенные циклы, поэтому, согласно Пуанкаре, одномерное число Бетти тора равно 2. Аналогично для двойного тора на рис. 23.3 циклы u и v существенны, и есть еще два вокруг другой дырки. Одномерное число Бетти двойного тора равно 4.

Для ориентируемых поверхностей количество таких циклов является первым числом Бетти, но для неориентируемых начинаются странности. Весь наш опыт подсказывает, что из уравнения $a + a = 0$ следует, что $a = 0$. Для вещественных чисел так оно и есть. Но для циклов может случиться, что $a \neq 0$, но $a + a \equiv 0$. Вообще-то, такое явление в жизни не редкость. На многих автомобилях одометр рассчитан на расстояние до 99 999 километров. Для такого одометра $50\,000 + 50\,000 = 0$. Другой пример – отсчет времени, принятый в армии. Полночь – это 0:00, полдень – 12:00, а время

непосредственно перед полуночью – 23:59. Поэтому через 12 часов после 12:00 будет 0:00, или $12 + 12 = 0$.

Чтобы увидеть эту странную арифметику в действии, вернемся к проективной плоскости и бутылке Клейна. На рис. 22.8 мы видели, что число связности проективной плоскости равно 1. Обозначим соответствующий цикл a и придадим ему ориентацию, как показано на рис. 23.4. Тогда $a + a$, или для краткости $2a$, – это цикл, проходящий по a два раза. Удивительно, но, как видно по рисунку, этот удвоенный цикл действительно топологически тривиален – путем деформирования его можно стянуть в точку. Поэтому $2a \equiv 0$.

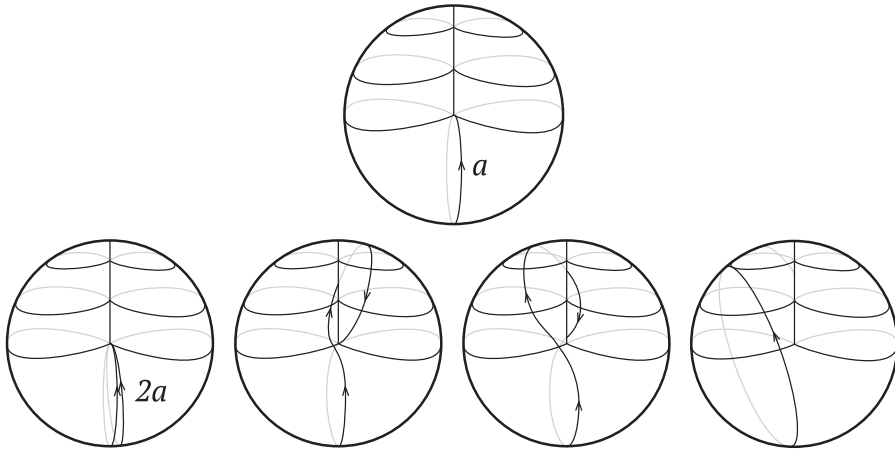


Рис. 23.4. Для проективной плоскости $2a \equiv 0$

То же самое имеет место для бутылки Клейна, но обоснование несколько отличается. Ранее мы видели, что число связности бутылки Клейна равно 2. Обозначим соответствующие циклы (ориентированные) b и c , как показано на рис. 23.5. Как видно, удвоенный цикл $2b$ эквивалентен $b + c + (-b) + (-c)$. Иначе говоря, хотя $2b$ топологически не тривиален, все равно $2b \equiv 0$.

Таким образом, мы можем разделить эти существенные циклы на два класса в зависимости от того, обладают они таким поведением или нет. Продолжим называть количество циклов, не обладающих таким поведением, 1-мерным числом Бетти. Если на поверхности существует цикл a , для которого $na \equiv 0$ (и n – наименьшее такое положительное число), то будем называть n коэффициентом зацепления поверхности. Следовательно, в 1-мерном случае для проективной плоскости число Бетти равно 0, а коэффициент зацепления равен 2, тогда как для бутылки Клейна число Бетти равно 1, а коэффициент зацепления равен 2.

Действуя похожим образом, Пуанкаре определил многомерные числа Бетти и коэффициенты зацепления, только в качестве циклов он исполь-

зовал не петли, а многообразия более высокой размерности. Пуанкаре доказал, что числа Бетти и коэффициенты зацепления – топологические инварианты многообразий. В табл. 23.1 приведены числа Бетти и коэффициенты зацепления замкнутых поверхностей. Мы обозначаем b_i i -е число Бетти¹.

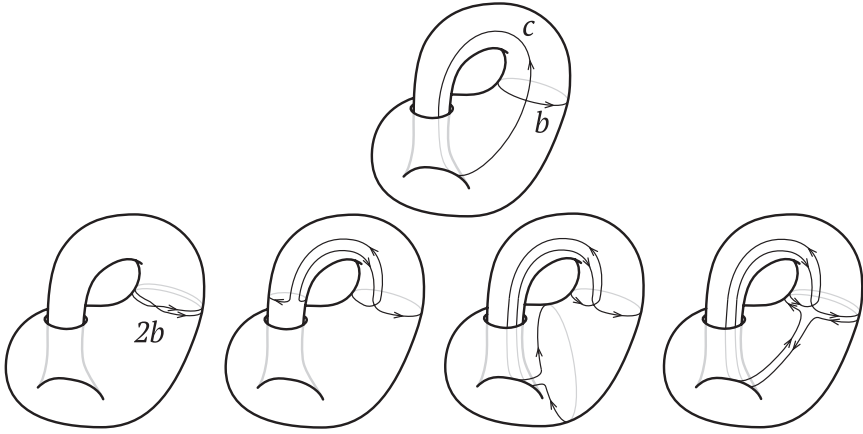


Рис. 23.5. Для бутылки Клейна $2b \equiv b + c + (-b) + (-c) \equiv 0$

Таблица 23.1. Числа Бетти и коэффициенты зацепления поверхностей

Поверхность S	$\chi(S)$	b_0	b_1	b_2	Коэффициенты зацепления (в 1-мерном случае)
Сфера	2	1	0	1	Нет
Тор	0	1	2	1	Нет
Тор с 2 дырками	-2	1	4	1	Нет
Тор с g дырками	$2 - 2g$	1	$2g$	1	Нет
Бутылка Клейна	0	1	1	0	2
Проективная плоскость	1	1	0	0	2
Сфера с c скрещенными колпаками	$2 - c$	1	$c - 1$	0	2

В «Analysis Situs» Пуанкаре следовал идеям Римана и Бетти. Но, отвечая на призыв к строгости, в последующих статьях он сменил направление. Именно тогда он начал работать с симплициальными комплексами, n -мерным обобщением многогранников. В этом контексте циклы в теории

¹ Пуанкаре, следуя введенному Риманом соглашению, считал, что i -е число Бетти на единицу больше этого значения, но для простоты мы придерживаемся современной нотации.

гомологий строятся, исходя из особенностей многогранника. Например, 1-мерный цикл – это не произвольная петля на многообразии, а последовательность ребер многогранника, образующая петлю.

С практической точки зрения, работать с симплицальными комплексами гораздо проще, чем с первой моделью Пуанкаре. Пуанкаре мог описать комплекс в терминах *матрицы инциденций* – прямоугольного массива чисел, показывающего, какие симплексы являются соседними. Вычисление чисел Бетти и коэффициентов зацепления с помощью этих матриц стало чисто механическим процессом.

Располагая таким обобщением многогранников на многомерный случай, естественно задаться вопросом, можно ли обобщить эйлерову характеристику на многомерные многообразия. Пуанкаре, как Коши и Шлефли до него, обобщил эйлерову характеристику, вычислив знакопеременную сумму числа k -симплексов. Иными словами, если многообразие M представлено в виде симплицального комплекса с a_k симплексами размерности k , то он определил эйлерову характеристику как

$$\chi(M) = a_0 - a_1 + a_2 - \dots \pm a_n.$$

Это обобщение эйлеровой характеристики на n -мерное пространство называется *характеристикой Эйлера–Пуанкаре* многообразия M .

Например, сплошной тор является 3-мерным многообразием с краем (краем является тор, 2-мерное многообразие). На рис. 23.6 показано, как представить сплошной тор в виде симплицального комплекса. У него 12 вершин (0-симплексов), 36 ребер (1-симплексов), 36 граней (2-симплексов) и 12 треугольных пирамид (3-симплексов). Поэтому $a_0 = 12$, $a_1 = 36$, $a_2 = 36$ и $a_3 = 12$, так что характеристика Эйлера–Пуанкаре равна $\chi(\text{сплошной тор}) = 12 - 36 + 36 - 12 = 0$.

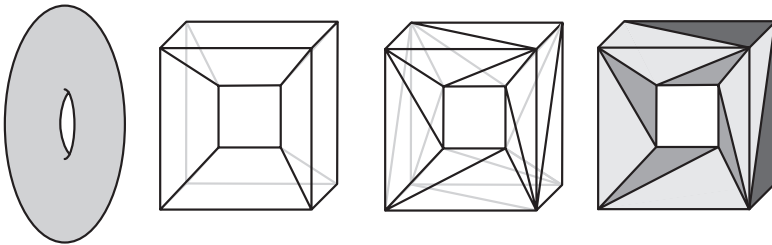


Рис. 23.6. Симплициальный комплекс для сплошного тора

Так же как эйлерова характеристика является топологическим инвариантом поверхностей, так и характеристика Эйлера–Пуанкаре является инвариантом n -мерных многообразий. Чтобы доказать этот факт, Пуанкаре установил нечто гораздо более интересное. Он доказал, что если k -е число Бетти равно b_k , то

$$\chi(M) = b_0 - b_1 + b_2 - \dots \pm b_n$$

То есть, чтобы вычислить характеристику Эйлера–Пуанкаре, мы игнорируем коэффициенты зацепления и берем знакопеременную сумму чисел Бетти! В табл. 23.1 показано, что это равенство имеет место для чисел Бетти поверхностей. Поскольку каждое число b_k является топологическим инвариантом, таковым же является и их знакопеременная сумма. Стало быть, характеристика Эйлера–Пуанкаре – топологический инвариант.

В 1895 году Пуанкаре открыл изумительно симметричное соотношение между числами Бетти⁷. Последовательность чисел Бетти для нескольких многообразий показана в табл. 23.2. Пуанкаре заметил, что числа Бетти встречаются парами, причем первые такие же, как последние: $b_0 = b_n$, $b_1 = b_{n-1}$ и т. д. Это и стало утверждением знаменитой теоремы двойственности Пуанкаре.

Теорема двойственности Пуанкаре

Если b_0, b_1, \dots, b_n – числа Бетти замкнутого ориентируемого n -мерного многообразия, то $b_i = b_{n-i}$ для всех i .

Таблица 23.2. Симметрия чисел Бетти

Многообразие	Числа Бетти: $b_0, b_1, b_2, \dots, b_n$
S^1	1, 1
S^2	1, 0, 1
S^n	1, 0, ..., 0, 1
Тор	1, 2, 1
Двойной тор	1, 4, 1
Тор с g дырками	1, $2g$, 1

Мы уже встречались с двойственностью, когда обсуждали подмеченное Кеплером объединение платоновых тел в пары (глава 6). В обоих случаях термин «двойственность» выбран не случайно; наблюдение Кеплера – это замаскированная двойственность Пуанкаре. Теорема двойственности Пуанкаре утверждает, что при вычислении чисел Бетти многообразия мы вправе менять местами роли i -мерных и $(n - i)$ -мерных симплексов. Двойственность платоновых тел иллюстрирует это поведение. Например, икосаэдр дает пример разбиения сферы на вершины, ребра и грани. Если воспользоваться двойственностью Кеплера и преобразовать каждую вершину икосаэдра в грань, а каждую грань – в вершину, то получится додекаэдр – еще одно разбиение сферы.

В «Analysis Situs» Пуанкаре писал: «Я полагаю, что эту теорему никто не формулировал, однако она известна многим, и некоторые даже находили

ей применения»⁸. Мы не знаем, ни кто были эти «многие», ни как они использовали это соотношение, но главной целью Пуанкаре было доказать тот удивительный факт, что характеристика Эйлера–Пуанкаре любого замкнутого ориентируемого многообразия нечетной размерности равна нулю!

Действительно, рассмотрим 3-мерный тор – 3-мерное многообразие, полученное склеиванием сторон куба, как в левой части на рис. 23.7. Его числа Бетти равны $b_0 = 1, b_1 = 3, b_2 = 3$ и $b_3 = 1$ (мы не станем это доказывать), поэтому характеристика Эйлера–Пуанкаре равна

$$\chi(\text{3-мерный тор}) = 1 - 3 + 3 - 1 = 0.$$

Вообще, пусть M – произвольное замкнутое ориентируемое многообразие нечетной размерности n . В силу теоремы двойственности Пуанкаре числа Бетти встречаются парами с противоположным знаком, поэтому в выражении характеристики Эйлера–Пуанкаре в виде знакопеременной суммы они взаимно уничтожаются:

$$\begin{aligned} \chi(M) &= b_0 - b_1 + b_2 - \dots - b_{n-2} + b_{n-1} - b_n \\ &= (b_0 - b_n) - (b_1 - b_{n-1}) + \dots \pm (b_{(n-1)/2} - b_{(n+1)/2}) \\ &= 0 - 0 + 0 - \dots \pm 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Оказывается, что характеристика Эйлера–Пуанкаре любого замкнутого неориентируемого многообразия также равна нулю. Мы опускаем сложное доказательство этого факта, но проиллюстрируем его на примере. 3-мерное многообразие, полученное попарным склеиванием сторон куба, как показано в правой части на рис. 23.7, неориентируемое. Его числа Бетти равны $b_0 = 1, b_1 = 2, b_2 = 1$ и $b_3 = 0$ (у него также имеются коэффициенты зацепления в размерностях 1 и 2). Мы видим, что двойственность Пуанкаре не имеет места, но характеристика Эйлера–Пуанкаре по-прежнему равна нулю:

$$\chi(M) = 1 - 2 + 1 - 0 = 0.$$

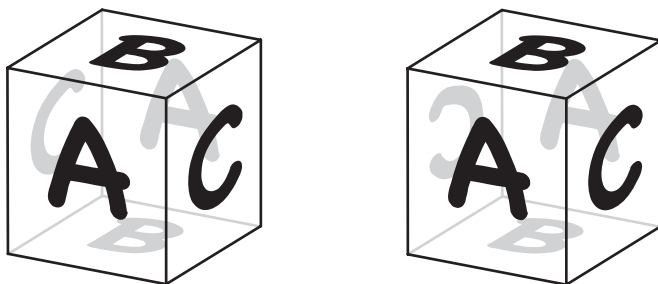


Рис. 23.7. Трехмерный тор и неориентируемое трехмерное многообразие

Следует отметить, что многообразия с краем нечетной размерности не обязательно имеют нулевую характеристику Эйлера–Пуанкаре. Например, для n -мерного шара B^n характеристика Эйлера–Пуанкаре равна 1 для всех n .

Преобразование топологии из дисциплины, построенной на интуитивных аргументах, в раздел математики со строгими доказательствами произошло на протяжении первых трех десятилетий XX века. Это было время, когда топологи избавились от пробелов, прорех, нежелательных допущений и ошибок блестящей работы Пуанкаре.

Например, рассмотрим следующие два предположения, сделанных Пуанкаре. Во-первых, он утверждал, что любое многообразие можно представить в виде симплициального комплекса или, точнее, что всякое многообразие можно триангулировать. Во-вторых, он предполагал, что *Hauptvermutung* (основная гипотеза комбинаторной топологии) верна для любого многообразия (напомним, что эта гипотеза утверждает, что любые два разбиения многообразия можно измельчить, добавив симплексы, так что они станут топологически эквивалентными). Как выясняется, в общем случае оба этих предположения неверны. И тем не менее математики показали, что выводы Пуанкаре справедливы.

Важное усовершенствование идей Пуанкаре принадлежит немецкой женщине-математику Эмми Нётер (1882–1935). Нётер, дочери математика, пришлось бороться с укоренившимися предрассудками. Она была женщиной, подвизавшейся в области, где доминировали мужчины. В 1904 году женщинам наконец разрешили поступать в Эрлангенский университет, но до тех пор она могла лишь присутствовать на занятиях. Докторскую диссертацию она защитила в 1907 году. В 1915 году, когда она уже заработала репутацию первоклассного математика, Клейн и Давид Гильберт (1862–1943) пригласили ее в Гёттинген с намерением принять в постоянный штат. Но лишь в 1919 году ей было позволено занять должность на факультете, а до тех пор считалось, что ее курсы читаются от имени Гильберта, а она лишь выступает в роли его помощника. Когда к власти пришли нацисты, жизнь многих немцев изменилась. В 1933-м еврейка Нётер была вынуждена уехать из Гёттингена в США и стала преподавать в колледже в Брин-Море. Спустя два года она умерла.

Наибольшую известность Нётер принесли пионерские работы в области общей алгебры. В самых общих чертах, общая алгебра изучает множества, наделенные одной или несколькими бинарными операциями (например, сложение и умножение и обратные к ним вычитание и деление).

До середины 1920-х годов гомологии описывались в терминах чисел Бетти и коэффициентов зацепления. Понадобилась алгебраист Нётер, чтобы понять, что гомологии обладают гораздо более богатой структурой. Она выделила ключевую особенность гомологии – способность складывать и вычитать циклы. Сконцентрировавшись на этой арифметической операции, она заметила, что гомология – частный случай алгебраического объ-

екта, называемого *группой*, и что правильный взгляд на гомологию дают *группы Бетти*, или *группы гомологий*, как их теперь называют. В своей автобиографии Павел Александров писал: «Вспоминаю обед у Брауэра в честь Эмми Нётер, во время которого гостя изложила определение групп Бетти-комплексов, вскоре получившее всеобщее распространение и совершенно преобразившее всю топологию»⁹.



Рис. 23.8. Эмми Нётер

Совершенно неожиданно топологам оказался доступен во всех отношениях новый инструментарий. В их распоряжении оказались все методы и теоремы теории групп. Мощные теоремы стало возможно доказывать, не изобретая колесо. Числа Бетти и коэффициенты зацепления возникали естественным способом, а инвариантность характеристики Эйлера–Пуанкаре получила простое доказательство. В надгробном слове Нётер Александров писал:

В те дни никому не приходило в голову строить комбинаторную топологию иначе, чем с помощью теории ... групп; тем больше оснований отдать должное Эмми Нётер, которая первой предложила идею такого построения. В то же время она заметила, каким простым и очевидным оказывается доказательство формулы Эйлера–Пуанкаре, если систематически пользоваться группами Бетти¹⁰.

В очередной раз мы видим, какие мощные результаты дает соединение различных ветвей математики. Декарт использовал анализ, чтобы понять геометрию. Риман и Пуанкаре применили топологию, чтобы понять анализ. Гаусс и Бонне воспользовались топологией, чтобы понять геометрию. А теперь топологи вольны использовать алгебру, чтобы понять топологию. Такое взаимное обогащение чрезвычайно плодотворно.

Включение алгебры в топологию настолько важно, что вся эта область топологии – практически вся топология, которую мы обсуждали в этой книге, – теперь называется *алгебраической топологией*. За десятилетия после работы Пуанкаре алгебраическая топология вышла за пределы групп гомологий и включила многие другие алгебраические структуры. В наши дни большинство топологов занимаются алгебраической топологией.

Эпилог.

Вопрос на миллион долларов

Если посмотреть на математику должным образом, то окажется, что она обладает не только истиной, но и высшей красотой – красотой холодной и суровой, подобной красоте скульптуры, не обращенной ни к какой стороне нашей слабой природы, лишенной украшений живописи или музыки, и тем не менее утонченно чистой и способной к строгому совершенству, свойственному лишь величайшим произведениям искусства.

– *Бертран Рассел, «Изучение математики»*¹

В XX веке топология стала одним из столпов математики, заняв место рядом с алгеброй и анализом. Многие математики, не считающие себя топологами, используют топологию в повседневной работе. Это неизбежно. Сегодня аспиранты математических специальностей первого года обучения обязаны пройти годичный курс топологии.

Один из способов измерить важность области науки – посмотреть, какие награды вручаются за достижения в этой области. Нобелевских премий по математике не существует, но есть эквивалент – филдсовская премия. Филдсовскую премию вручают раз в четыре года, начиная с 1936 года (за исключением Второй мировой войны). На каждой церемонии медали вручаются не более чем четырем математикам не старше сорока лет, внесшим выдающийся вклад в математику. Из сорока восьми лауреатов примерно треть была отмечена за работы по топологии, а еще большее число – за вклад в смежные области.

В связи с одной конкретной топологической проблемой было вручено целых три филдсовских премии. Это одна из самых знаменитых нерешенных задач XX века – настолько важная и трудная, что математику, решившему ее, обещана награда 1 миллион долларов. Называется эта проблема *гипотезой Пуанкаре*.

Теорема классификации поверхностей – одна из самых элегантных теорем во всей математике. Она утверждает, что любая поверхность однозначно определяется ориентируемостью, эйлеровой характеристикой и числом компонент края. Понятно, что было бы хорошо иметь подобную теорему

для многообразий любой размерности, но это чрезвычайно сложная задача. Ясно, что если такая классификация и существует, то приведенного выше перечня недостаточно, поскольку характеристика Эйлера–Пуанкаре любого замкнутого многообразия нечетной размерности равна нулю (см. главу 23).

Пуанкаре мечтал о классификации многомерных многообразий, но даже в трехмерном случае эта задача не поддавалась его усилиям. Гипотеза Пуанкаре стала только первым шагом в процессе этой классификации.

Простейшим замкнутым n -мерным многообразием является n -мерная сфера S^n . Пуанкаре искал простой критерий, который позволил бы узнать, гомеоморфно ли данное n -мерное многообразие в сфере S^n . В 1900 г. он думал, что нашел такой критерий. Он доказал², что любое n -мерное многообразие, гомологичное S^n , должно быть гомеоморфно S^n . Гомология n -мерной сферы особенно проста. Ее числа Бетти равны 1 для размерностей 0 и n , 0 для всех остальных размерностей, и зацепления нет.

Через четыре года он понял, что доказательство содержало ошибку³. И не только нашел собственную ошибку, но и обнаружил замечательный контрпример к своему же утверждению. Он построил патологическое 3-мерное многообразие, имеющее такую же гомологию, как S^3 , но не гомеоморфное S^3 . Для этого он склеил противоположные грани сплошного додекаэдра, повернув каждую на 36° по часовой стрелке.

Интересное и неожиданное свойство *додекаэдрического пространства Пуанкаре* состоит в том, что хотя его первое число Бетти равно 0, оно не является односвязным. То есть любой цикл гомологичен нулю, но существуют циклы, которые нельзя стянуть в точку. На рис. 23.3 мы видели пример нетривиального гомологичного нулю цикла на двойном торе, но в додекаэдрическом пространстве *всякий* цикл, который нельзя стянуть в точку, гомологичен нулю.

Из этого экзотического примера Пуанкаре сделал вывод, что одной гомологии недостаточно, чтобы охарактеризовать не только S^n , но даже S^3 . Поэтому он отложил в сторону вопрос в n -мерном случае и сосредоточился на 3-мерных многообразиях. Он подозревал, что если все циклы на 3-мерном многообразии топологически тривиальны, то многообразие должно быть гомеоморфно S^3 . Это и стало содержанием знаменитой ныне гипотезы Пуанкаре⁴.

Гипотеза Пуанкаре

Любое односвязное замкнутое трехмерное многообразие гомеоморфно трехмерной сфере.

На самом деле в статье Пуанкаре это утверждение выдвигалось не в виде гипотезы, а в виде вопроса. Он не сформулировал своего мнения о том,

каким будет ответ. Доказательство этой теоремы, конечно, несопоставимо с классификацией всех трехмерных многообразий, но стало бы важным первым шагом.

Знатные вызовы всем по вкусу, а уж гипотеза Пуанкаре – всем вызовам вызов. Она вошла в короткий список задач – вместе с теоремой о четырех красках, великой теоремой Ферма и гипотезой Римана, – получивших мистический статус. Как и остальные проблемы из этого списка, гипотеза Пуанкаре целиком захватывала тех, кто над ней работал. Несть числа молодым математикам, вступившим в эту схватку. Как писал один журналист, «математики говорят о гипотезе Пуанкаре, как Ахав толковал о Белом ките»⁵. Начиная с 1904 года многие заявляли, будто нашли доказательство. Но до недавнего времени все доказательства содержали дефекты – иногда тонкие ошибки, укрывшиеся в сотнях страниц глубокой математики.

В конце концов, гипотеза была обобщена на n -мерные многообразия – любое n -мерное многообразие, в достаточной степени похожее на n -мерную сферу, должно быть гомеоморфно S^n . Может показаться, что это обобщение до нелепости амбициозно. Как можно доказать его для $n = 100$, если мы даже для $n = 3$ не можем этого сделать? Если я лежа не могу выжать 80 килограммов, то с чего я вообразил, будто смогу поднять 225? Но, как ни странно это звучит, для больших n гипотеза проще! Часто бывает, что топология в пространствах малой размерности сложнее, чем в случае большой размерности. Грубо говоря, чем больше измерений, тем больше свободы двигать предметы, избегая столкновений.

Горячий молодой тополог Стивен Смейл (родился в 1930 г.) из Калифорнийского университета в Беркли дал первое доказательство обобщенной гипотезы Пуанкаре. В 1960 году он подтвердил гипотезу для важного класса *гладких* многообразий размерности $n \geq 5$ ⁶.

Смейл – колоритная личность. Он открыто выступал против войны во Вьетнаме и являлся страстным поборником свободы слова. Его протесты, в т. ч. критика американской внешней политики во время посещения Москвы, стали причиной судебного иска со стороны Комиссии по расследованию антиамериканской деятельности. Позже он оказался в затруднительном положении во время шестимесячного пребывания в Бразилии, оплаченного Национальным научным фондом. Советник президента Джонсона по науке писал: «Эта беспечность заставляет математиков всерьез считать, что обычный налогоплательщик должен верить, будто за создание математики на пляжах Рио-де-Жанейро следует платить из общественных фондов»⁷.

Поводом для этого высказывания послужили ставшие знаменитыми слова Смейла: «Самая лучшая моя работа была проделана на пляжах Рио-де-Жанейро»⁸. Находясь в Бразилии, Смейл не только доказал многомерную гипотезу Пуанкаре, но и открыл *подкову Смейла*, пример хаотической динамической системы.

Не прошло и двух лет, как результат Смейла для $n \geq 5$ был обобщен на многообразия без предположения гладкости⁹. Казалось, что победа не за горами. Но тут прогресс застыл. Случай $n = 4$ пал только в 1982 году – его доказал тридцатитрехлетний Майкл Фридман из Калифорнийского университета в Сан-Диего¹⁰. Затем снова наступила пауза. Каждая новая размерность давалась труднее предыдущих. Оригинальная гипотеза для размерности 3 оставалась неприступной. Появлялись и исчезали все новые неправильные доказательства. Казалось, проблема неразрешима.

В 1998 году Смейл опубликовал список из восемнадцати самых важных нерешенных математических задач¹¹ (Давид Гильберт сделал то же самое веком раньше). Классическая гипотеза Пуанкаре в этот список вошла.

В тот же год Институт математики Клэя объявил о награде в 1 миллион долларов за решение любой из семи самых трудных, на его взгляд, нерешенных задач в математике. Гипотеза Пуанкаре вошла и в этот элитный список. Для получения награды математик должен представить доказательство теоремы, которое выдержит придирчивую проверку математическим сообществом в течение двух лет после опубликования.

В 1982 году Билл Тёрстон анонсировал план полной классификации геометрии всех трехмерных многообразий. Он предположил, что любое трехмерное многообразие можно разрезать на области, каждое из которых будет обладать одной из восьми геометрических структур¹². Это предположение получило название «гипотеза геометризации Тёрстона». С помощью этих восьми стандартных элементов можно было бы понять геометрию и топологию любого трехмерного многообразия. В частности, отсюда следовало бы, что единственным односвязным замкнутым трехмерным многообразием является трехмерная сфера. Это доказывало бы гипотезу Пуанкаре.

В том же году Ричард Гамильтон, математик из Корнеллского университета, приступил к реализации программы, которая, по его мнению, должна была доказать гипотезу геометризации Тёрстона¹³. Он хотел взять произвольное трехмерное многообразие и, надувая его, как воздушный шарик, непрерывно деформировать в форму, которая, как он надеялся, будет точно отвечать модели Тёрстона. На пути к этой цели он добился значительного прогресса. Большинство специалистов полагало, что его техника должна сработать, но ни Гамильтон, ни кто-либо еще не смогли избавиться или еще как-то решить проблему сингулярностей – участков многообразия, которые не только не становились лучше при надувании, но даже превращались в нечто худшее.

В 2002 году скромный¹ российский математик Григорий Перельман (Гриша) (родился в 1966 г.) из Математического института им. Стеклова по-

¹ Автор употребил слово «unassuming» – ничем не выделяющийся, неприметный. Оставим это на его совести. – *Прим. перев.*

разил математическое сообщество, опубликовав в интернете первую из трех коротких, но чрезвычайно насыщенных статей. В этих статьях общим объемом всего 68 страниц автор утверждал, что довел до конца исследовательскую программу Гамильтона, которой исполнилось уже двадцать лет¹⁴. В них показано, что некоторые сингулярности вообще никогда не возникают, а другие при должной аккуратности можно устранить. В совокупности статьи содержали доказательство гипотезы геометризации и, как следствие, классической гипотезы Пуанкаре.

Математическое сообщество было настроено скептически – такие заявления звучали и раньше, а в статьях было очень мало деталей, – но и с осторожным оптимизмом. Перельман был уважаемым математиком и следовал широко признанному плану Гамильтона.

В рассуждениях Перельмана многое осталось недосказанным. Даже лучшие специалисты по геометрии и топологии испытывали трудности при проверке правильности доказательства. Три независимые группы математиков под микроскопом изучили его аргументы, восполнив недостающие детали¹⁵. Средняя длина анализа составила свыше трехсот страниц. Никаких серьезных ошибок не было найдено.

К концу 2006 года сложилось общее мнение, что доказательство Перельмана правильно. В тот год журнал «Science» назвал доказательство Перельмана «прорывом года»¹⁶. Как Смейл и Фридман до него, сорокалетний Перельман был номинирован на филдсовскую премию за вклад в доказательство гипотезы Пуанкаре (Тёрстон тоже получил филдсовскую премию за работу, которая косвенно привела к окончательному доказательству). Начался обратный отсчет времени в гонке за приз в миллион долларов (некоторые полагают, что награду вручат Перельману и Гамильтону вместе).

Возможно, покорена одна из высочайших математических вершин, подобная великой теореме Ферма, доказанной десятью годами ранее. Флаг водружен. Кто-то, возможно, посчитает, что это достижение звучит как похоронный звон по целой отрасли математики. Разумеется, это не так. С этой вершины математикам открывается ошеломляющее зрелище еще неизведанных пиков, ждущих своих покорителей. Как и в случае великой теоремы Ферма, не так важен сам результат, как огромный пласт математических методов, созданных в попытках доказать его.

Великая математика порождает еще более великую. Решение Эйлером задачи о кёнигсбергских мостах и данное им доказательство формулы для многогранников положило начало целой череде открытий во многих областях красивейшей математики и привело к созданию топологии. Гипотеза Пуанкаре – лишь одна из остановок в этом волнующем путешествии. Топология по-прежнему живее всех живых и активно развивается.

У этой удивительной истории странное и печальное послесловие, связанное с тем, какое влияние оказало доказательство на жизнь Перельмана. Начиналось все хорошо. В апреле 2003 года он отправился в краткий тур

с целью разъяснения своей работы. На его лекциях присутствовали Эндрю Уайлс, Джон Форбс Нэш младший (герой голливудского фильма-биографии «Игры разума»), Джон Конвей и другие хорошо известные математики. Но после возвращения в Россию придирчивость математического сообщества и поползновения других математиков, желавших примазаться к его успеху, начали испытывать его терпение¹⁷.

Перельман, который и раньше вел затворнический образ жизни, стал еще более замкнутым. Он хотел, чтобы его работа говорила сама за себя, и не желал принимать участия в процессе проверки. В конце концов, разочарование математическим сообществом окончательно возобладало, он уволился из академического института, перестал отвечать на письма и, судя по всему, полностью порвал с математикой. Беспрецедентным поступком, шокировавшим все научное сообщество, стал его отказ принять филдсовскую премию.

В конце лета 2006 года безработный Перельман жил вместе с матерью на ее нищенскую пенсию в маленькой квартирке в Санкт-Петербурге. Когда его спросили, примет ли он денежную сумму от Института математики Клэя, он ответил: «Я не буду решать, принять ли награду, до тех пор пока ее не предложат»¹⁸.

Многих шокировало то, что Перельман отказался от филдсовской премии и, возможно, откажется от денежной награды. Но для него самого решение задачи стало высшей наградой, а слава и деньги были не столь существенны. Он сказал: «Если доказательство правильно, то никакого признания не нужно»¹⁹. Любой ученый поймет чистую любовь Перельмана к предмету своих исследований и глубочайшее удовлетворение от прорывного открытия. Невозможно вообразить, что из-за повышенного внимания к личности потускнеет блеск самого достижения.

Конечно, такая же неподдельная любовь к математике заставляла Пифагора, Кеплера, Эйлера, Римана, Гаусса, Пуанкаре и других проводить бесчисленные часы в погоне за совершенной теоремой и безупречным доказательством. Мы можем только догадываться о восторге Перельмана, осознавшего, что он доказал гипотезу Пуанкаре, или о бурной радости Эйлера, увидевшего, что $V - E + F = 2$.

Как красноречиво писал Пуанкаре: «Ученый изучает природу не потому, что полезно; он изучает ее, потому что это доставляет ему удовольствие, потому что она прекрасна. Если бы природа не была прекрасной, она не стоила бы того труда, который тратится на ее познание, и жизнь не стоила бы того труда, чтобы ее прожить»²⁰.

Благодарности

На обложке этой книги стоит мое имя, но есть еще много людей, без помощи которых она никогда бы не увидела света. Хочу воспользоваться возможностью, чтобы поблагодарить их.

Прежде всего я обязан сказать спасибо редактору Вики Кирн. Ее успокаивающее присутствие и слова ободрения очень много значили для меня, когда я писал свою первую книгу. Работать с ней и со всем коллективом издательства Принстонского университета было чудесно.

Я не мог бы написать эту книгу, не зная, что именно писал Эйлер. Я безмерно благодарен Крису Франсезе, который помогал мне перевести работу Эйлера с латинского языка, на котором она написана. Кроме того, в других переводах мне помогали Энн Майял, Тони Микселл, Сандра Элферс, Вольфганг Мюллер и Люсиль Дюперрон.

Я высоко ценю помощь Рича Клейна, Эда Сэндифера, Пола Нахина, Клауса Питерса, Карла Куоллза, своих родителей Гэйл и Фрэнка Ричесонов, а также анонимных читателей, которых издатель выбрал для чтения всей рукописи или ее частей. Вдумчивые замечания специалистов и неспециалистов позволили сделать книгу гораздо лучше. Я также благодарен литературному редактору Лайману Лайонзу за тщательную вычитку текста и многочисленные предложения по улучшению стиля.

Я благодарю за бесконечное терпение своего давнего коллегу Джима Вайсмана. Уж не знаю, почему я решил, что смогу нести полную учебную нагрузку, заниматься исследованиями и писать книгу по истории математики одновременно. Оказалось, что совместные с Джимом исследования зачастую приходилось задвигать на заднее сиденье, из-за чего они продвигались с черепашьей скоростью или вообще замирали на многие месяцы. Джим ни разу не посетовал.

Наконец, я говорю спасибо своей жене Бекки и детям Бену и Норе, которые вынуждены были мириться с моим отсутствием в течение многих и многих часов, отданных книге.

Приложение А

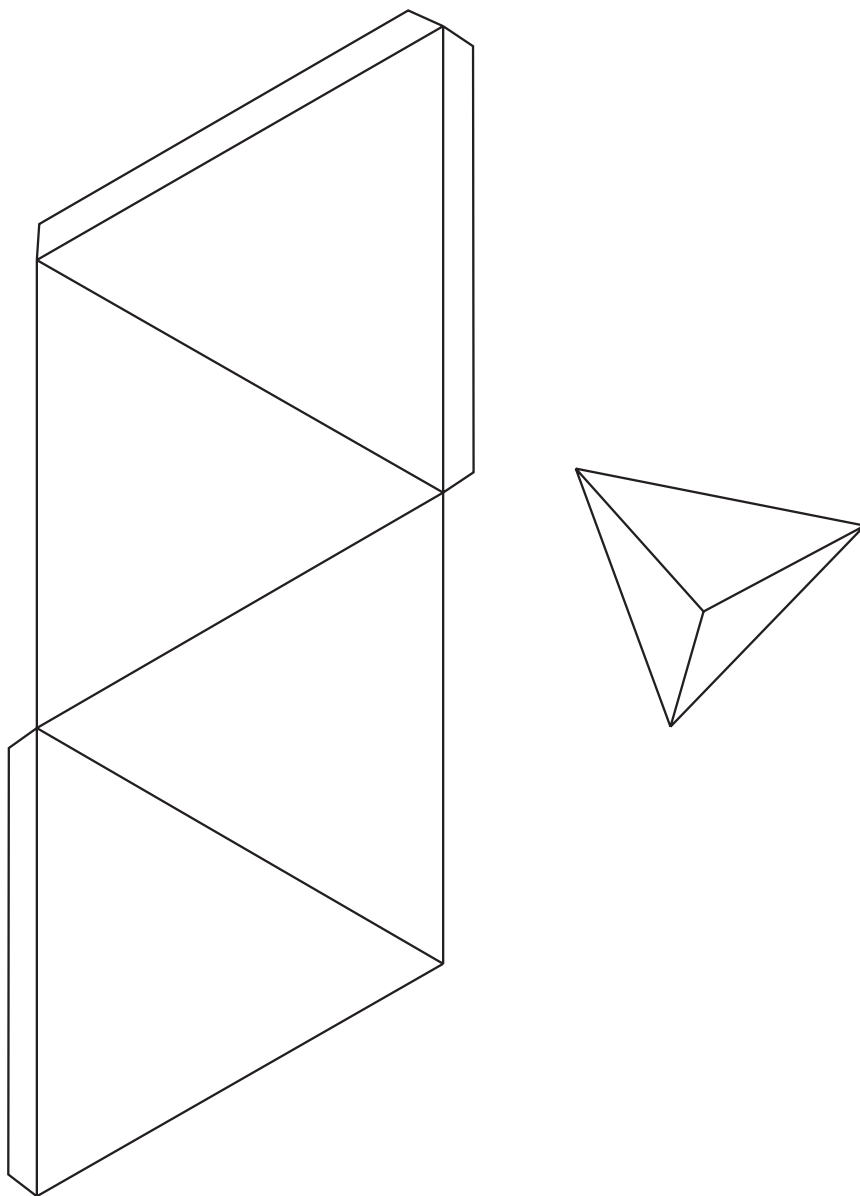
Создаем многогранники и поверхности своими руками

Лучший способ изучить многогранники и топологические поверхности – изготовить их собственноручно. На следующих страницах показаны развертки всех пяти платоновых тел, тора, цилиндра, ленты Мёбиуса, бутылки Клейна и проективной плоскости.

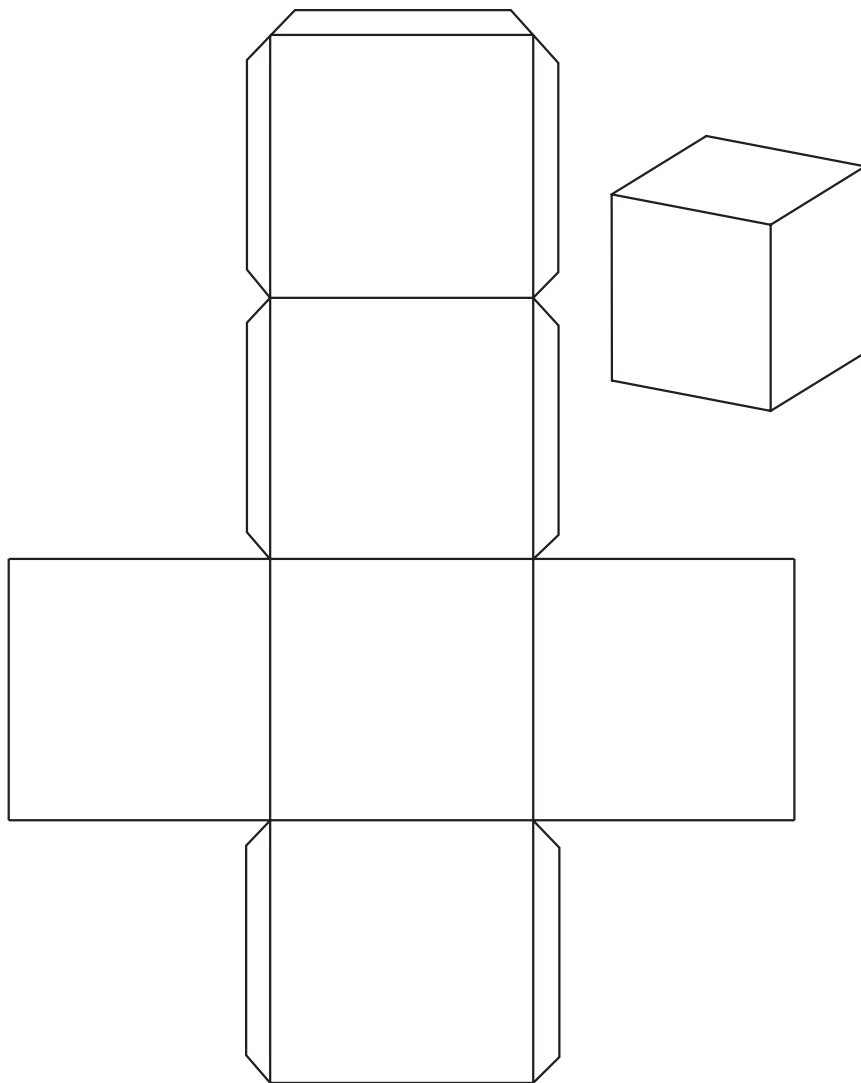
Ниже приведены инструкции по изготовлению бумажных моделей.

1. Сфотографируйте развертку из книги. Увеличьте ее, если хотите сделать модель побольше.
2. Скопируйте развертку на лист плотной бумаги. Можете вместо этого перевести ее на клейкую пленку и наклеить ее на лист картона.
3. Аккуратно вырежьте развертку по линейке острым ножом.
4. Тупым ножом наметьте сгибы, чтобы фигура хорошо сложилась.
5. Пользуйтесь выступами, если собираетесь склеить модель. Отрежьте выступы, если хотите соединить края модели скотчем.

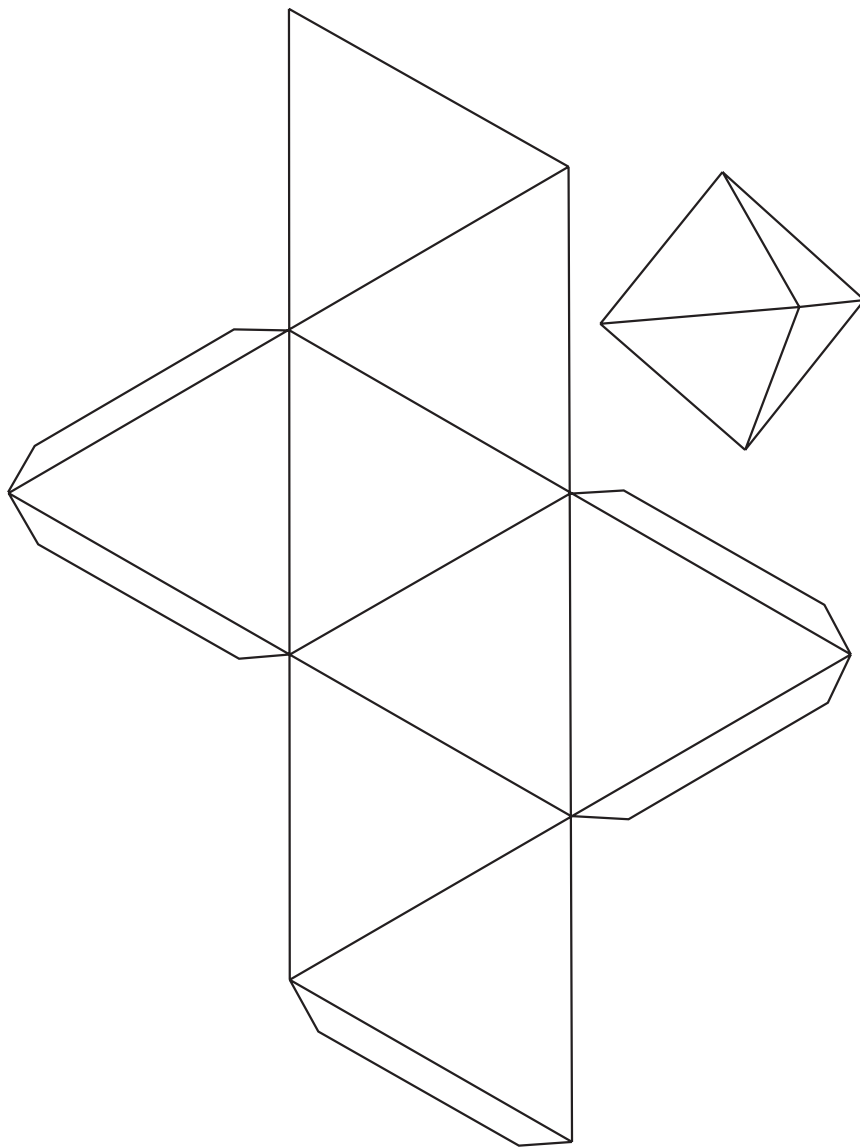
Тетраэдр



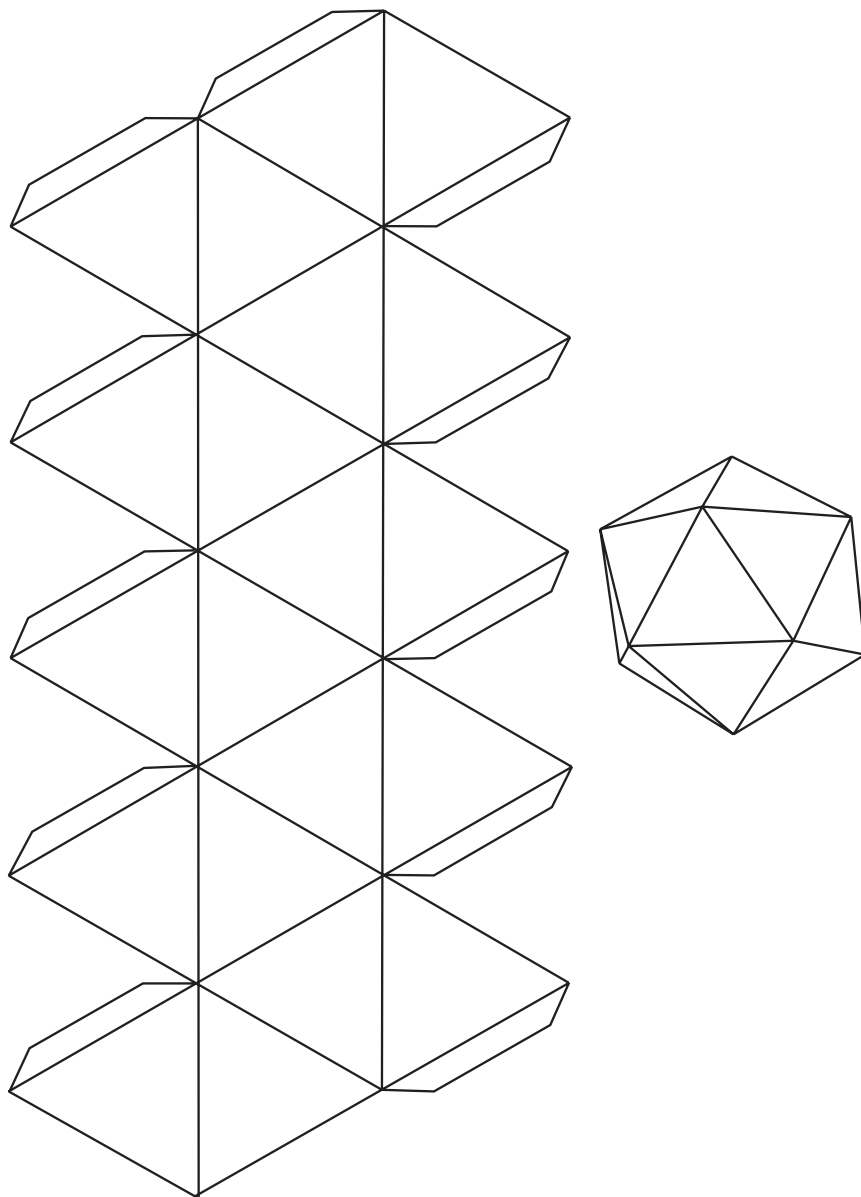
Куб



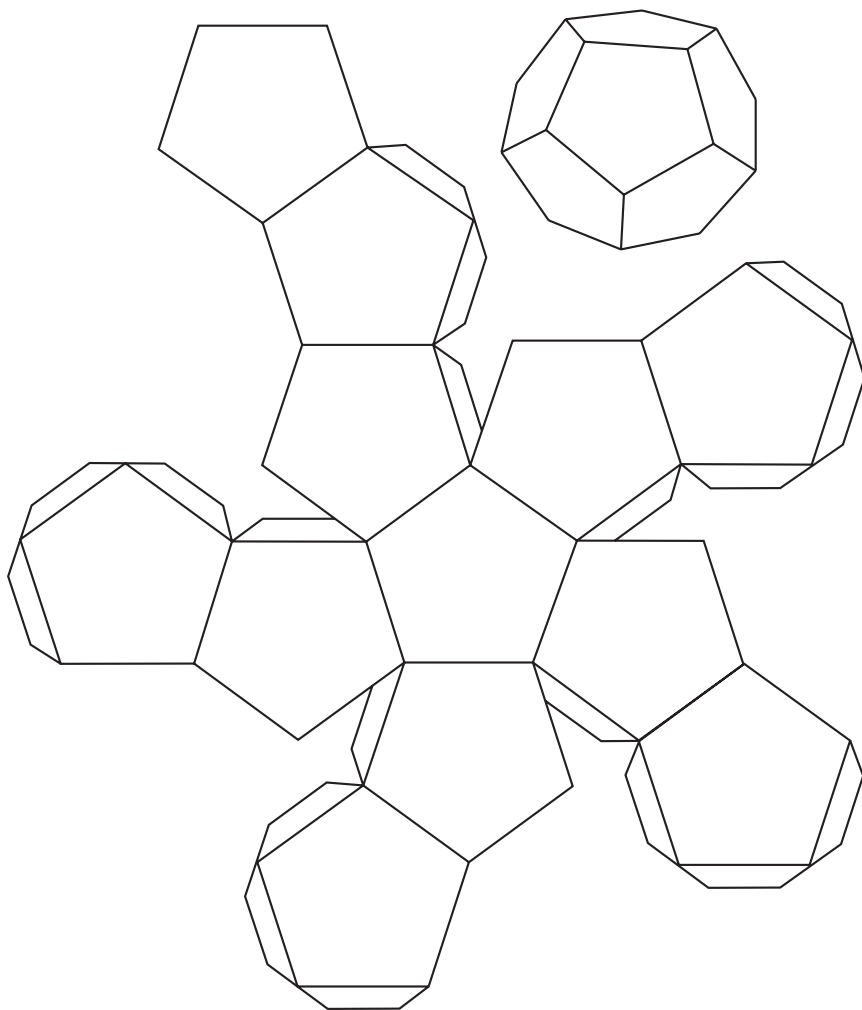
Октаэдр



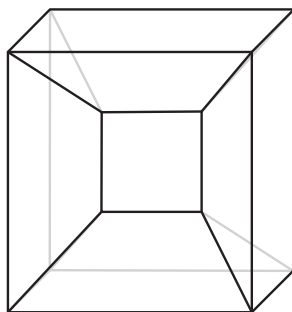
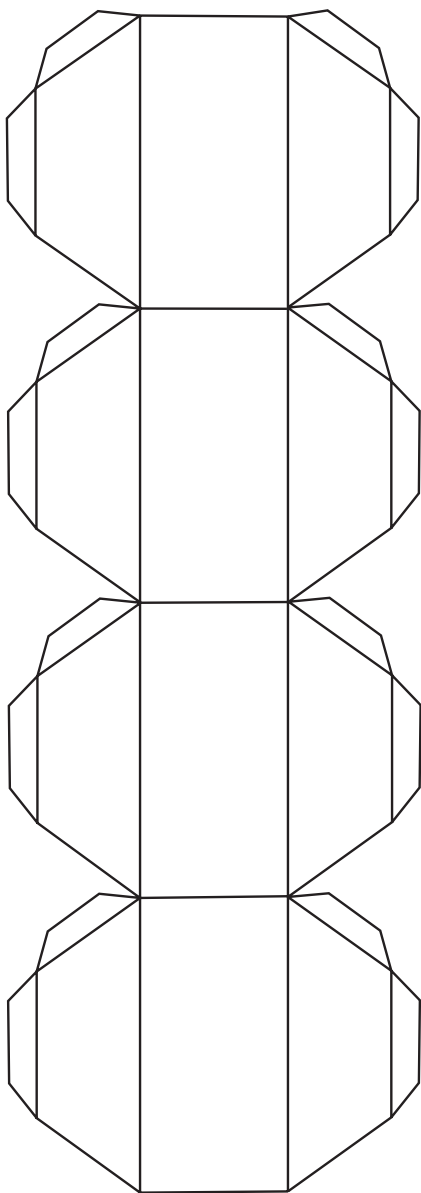
Икосаэдр



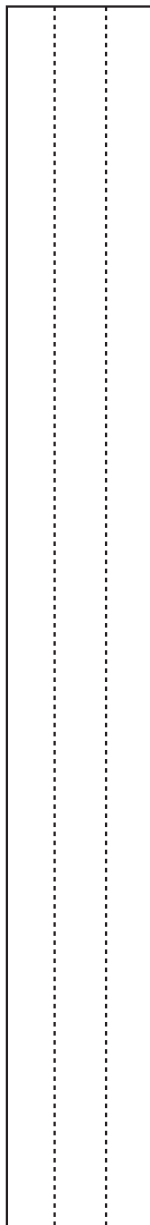
Додекаэдр



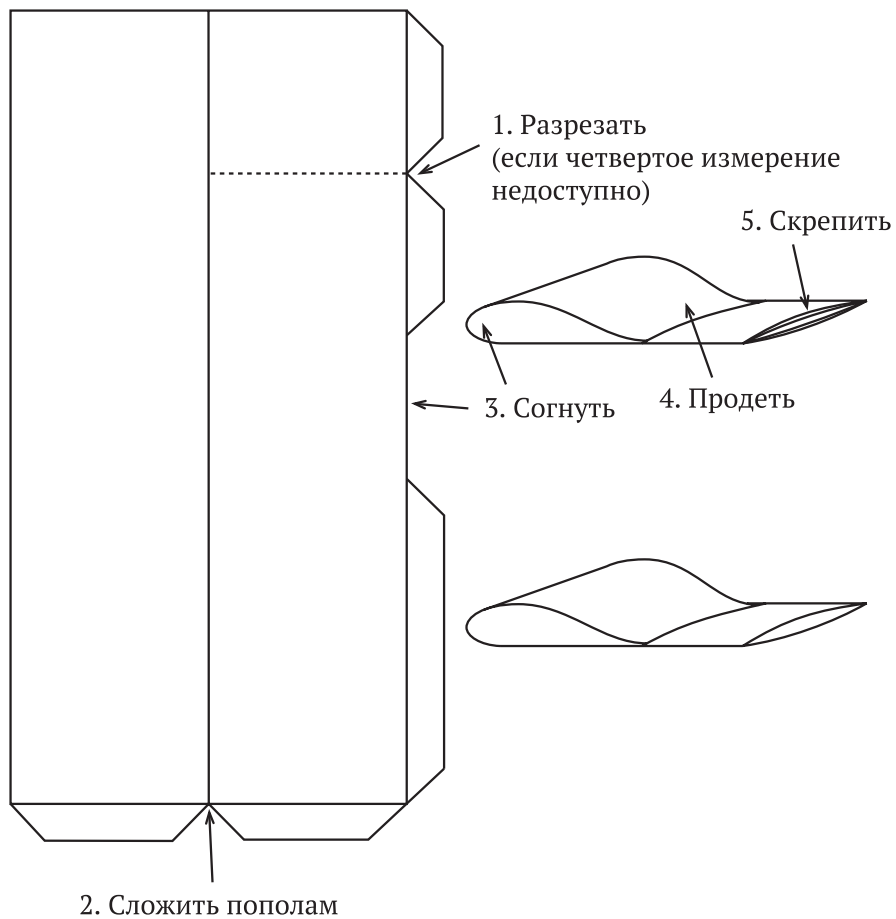
Тор



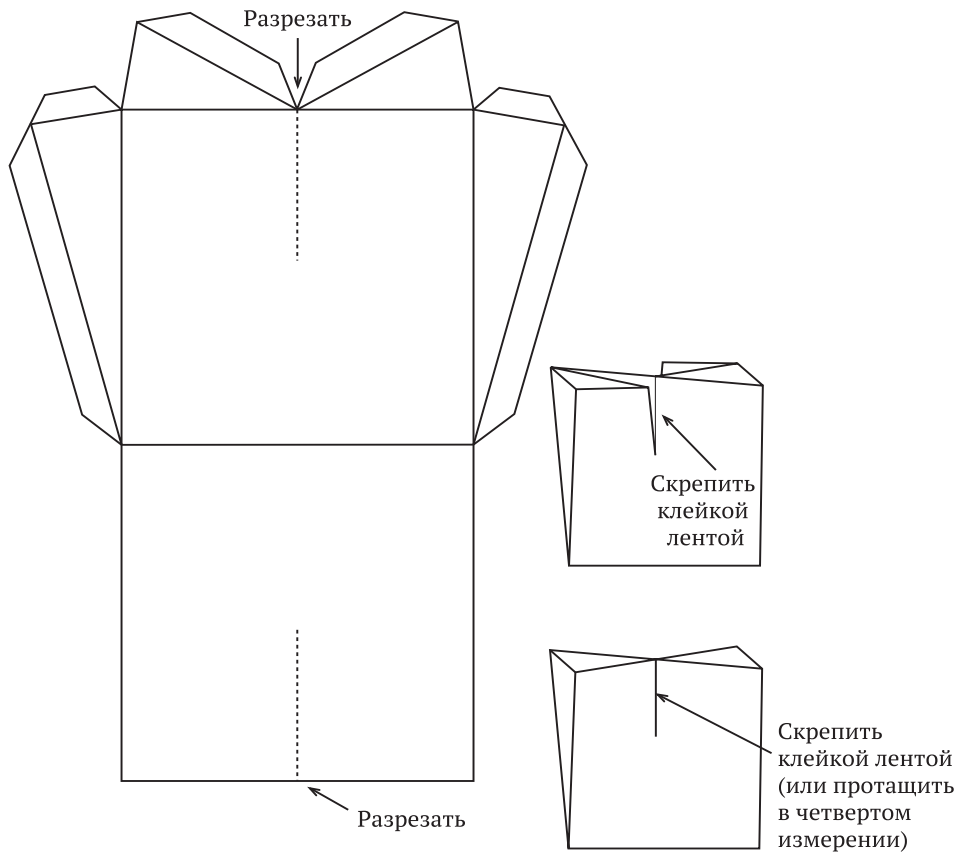
Лента Мёбиуса (или цилиндры)



Бутылка Клейна



Проективная плоскость



Приложение В

Рекомендуемое чтение

В конце книги имеется полный список литературы. В него включены все источники, которыми я пользовался при работе над книгой, а также многие первичные источники упоминаемых теорем. Я хотел бы особо остановиться на нескольких книгах и статьях, которые могут быть полезны читателям, желающим узнать больше об изложенных в книге темах. Я буду указывать только название и автора. Полное библиографическое описание имеется в списке литературы.

Существует много хороших справочников по истории математики. На первое место я ставлю книгу Carl Boyer, Uta Merzbach «A History of Mathematics». Интересующимся биографиями рекомендую 18-томное издание «Dictionary of Scientific Biography». Оно содержит высококачественные биографические статьи, написанные специалистами в своей области. Более легкое чтение, правда, грешащее историческими неточностями, – написанная в 1937 году классическая книга Eric Temple Bell «Men of Mathematics»¹. Очень удобен онлайн-ресурс John O'Connor и Edmund Robertson «MacTutor History of Mathematics Archive». Этот снабженный поисковым аппаратом сайт содержит многочисленные биографии и другую ценную историческую информацию.

Эйлеру посвящено много ресурсов, включая ряд новых, появившихся в 2007 году, объявленном «годом Эйлера». Я рекомендую два новых издания: «The Genius of Euler: Reflections on His Life and Work» под редакцией William Dunham и «Leonhard Euler: Life, Work and Legacy» под редакцией Robert Bradley и Edward Sandifer. Собрание сочинений Эйлера в 76 томах вышло в серии *Opera Omnia*, а большая часть его работ доступна на сайте Dominic Klyve и Lee Stemkoski «Euler Archive». Полный перевод на английский язык статьи Эйлера «Demonstratio Nonnullarum Insignium Proprietatum Quibus Solida Hedris Planis Inclusa Sunt Praedita», выполненный Крисом Франсезе, доступен на сайте Euler Archive.

Дополнительные сведения о многогранниках имеются в книге Peter Cromwell «Polyhedra». Там можно найти многие из затронутых в книге тем. В этой замечательной книге Кромвелл излагает как историю, так и теорию многогранников.

¹ Эрик Темпл Белл. Творцы математики. М.: Просвещение, 1979.

Авторитетное обсуждение развития формулы Эйлера приведено в книге Imre Lakatos «Proofs and Refutations: The Logic of Mathematical Discovery»ⁱ. В этой классической работе Имре Лакатос, специализирующийся на философии математики, использует формулу Эйлера и многочисленные доказательства, исключения и обобщения, чтобы представить свою точку зрения на математическое открытие. Подробные сноски, имеющиеся в этой книге, оказались мне очень полезны.

Об истории и содержании утраченной рукописи Декарта «Об элементах геометрических тел» можно прочитать в статье P. J. Federico «Descartes on Polyhedra: A Study of the De Solidorum Elementis». Помимо комментариев, она включает репродукции копии Лейбница с заметок Декарта и их перевод на английский язык.

Что касается теории графов, то нет лучшего чтения, чем изумительные книги и статьи Робина Уилсона с соавторами. По истории теории графов см. Norman Biggs, Keith Lloyd, and Robin Wilson «Graph Theory, 1736–1936». Это прекрасно написанный текст, включающий переводы многих важных статей. Развенчивающий мифы рассказ о кёнигсбергских мостах имеется в статье Brian Hopkins and Robin Wilson «The Truth about Königsberg». А захватывающее повествование о доказательстве теоремы о четырех красках – в статье Wilson «Four Colors Suffice: How the Map Problem Was Solved».

Есть два отличных справочника по истории топологии. Один – увесистая (больше 1000 страниц) книга «History of Topology» под редакцией I. M. James, другой – чуть более короткая «A History of Algebraic and Differential Topology: 1900–1960» Жана Дьедонне (Jean Dieudonné). Оба текста написаны профессиональными математиками и предполагают достаточно высокий уровень подготовки читателя.

Более доступные работы по эйлеровой характеристике, комбинаторной топологии, геометрии и многомерных многообразиях: книги D. M. Y. Sommerville «An Introduction to the Geometry of n Dimensions», David Hilbert and Stephan Cohn-Vossen «Geometry and the Imagination»ⁱⁱ, Maurice Fréchet and Ky Fan «Initiation to Combinatorial Topology» и Jeffrey Weeks «The Shape of Space». Знающим французский язык рекомендую книгу Jean-Claude Pont «La Topologie Algébrique des Origines à Poincaré».

Для тех, кто любит строить топологические поверхности из бумаги и хотел бы попробовать себя в других занятиях, рекомендую книгу Stephen Barr «Experiments in Topology». Каждый любитель математики просто обязан познакомиться с чудесными книгами Мартина Гарднера. В них полно чарующих математических жемчужин. Математическая ассоциация Америки недавно выпустила пятнадцать его книг на компакт-диске под названием

ⁱ Лакатос И. Доказательства и опровержения. Как доказываются теоремы. М.: Наука, 1967.

ⁱⁱ Гильберт Д., Кон-Фоссен С. Наглядная геометрия. ОНТИ, 1936.

«Martin Gardner's Mathematical Games: The Entire Collection of his Scientific American Columns».

Некоторые другие изящные приложения формулы Эйлера описаны в книге Martin Aigner and Günter Ziegler «Proofs from The Book». Там же приведено элементарное доказательство теоремы Коши о жесткости выпуклых многогранников. Элегантное и наглядное доказательство теоремы классификации поверхностей см. в статье George Francis and Jeffrey Weeks «Conway's ZIP proof». Вышедший в 1884 году роман Edwin Abbott «Flatland: A Romance of Many Dimensions»ⁱ – одновременно социальная сатира и исследование понятия математической размерности.

Введение в теорию узлов см. в книге Colin Adams «The Knot Book: An Elementary Introduction to the Mathematical Theory of Knots». Ее можно использовать в качестве учебника, но читается она скорее как научно-популярная литература.

Sylvia Nasar и David Gruber написали статью для «The New Yorker» под названием «Manifold Destiny: A Legendary Problem and the Battle Over Who Solved it»ⁱⁱ. В ней они подробно разбирают свару вокруг доказательства гипотезы Пуанкаре и гипотезы геометризации Тёрстона.

Голосование, проведенное среди математиков, показало, что они считают формулу Эйлера для многогранников второй по красоте теоремой во всей математике. Мы видели также еще несколько теорем, вошедших в список 10 лучших: существование пяти правильных многогранников (№ 4), теорема Брауэра о неподвижной точке (№ 6), иррациональность $\sqrt{2}$ (№ 7) и теорема о четырех красках (№ 9). Если хотите узнать об остальных, прочитайте статью David Wells «Are These the Most Beautiful?».

ⁱ Эббот Э. Флатландия. Роман о четвертом измерении. М.: Мир, 1976.

ⁱⁱ Судьба многообразия: легендарная задача и спор о том, кто ее решил. – Прим. перев.

Примечания

Предисловие

1. Quoted in Schechter (1998), 155.

Введение

1. Quoted in Machamer (1998).
2. Juškevič and Winter (1965), 333.

Глава 1

1. Dunham (1999), xiii.
2. Quoted in Youschkevitch (1971).
3. Riasanovsky (1993), 285.
4. Vucinich (1963), 69.
5. Quoted in Condorcet (1786).
6. Quoted in Eves (1969b), 48.
7. Quoted in Boyer and Merzbach (1991), 440.
8. Quoted in Cajori (1927).
9. Quoted in Calinger (1996).
10. Quoted in Cajori (1927).
11. Riasanovsky (1993), 248.
12. Quoted in Alexander (1989), 173.
13. Weil (1984).
14. Hartley (2003).
15. Hardy (1992), 70.
16. Vucinich (1963), 146–47.
17. Condorcet (1786).
18. Wells (1990).

Глава 2

1. Hemingway (1932), 122.
2. Francese and Richeson (2007).
3. Poincaré (1913), 434.

Глава 3

1. McEwan (1997), 20.
2. Plato (1972), 244.
3. Waterhouse (1972).
4. Там же.

Глава 4

1. Simmons (1992), 20.
2. Burkert (1972), 109.
3. Quoted in van der Waerden (1954), 94.
4. Quoted in Euclid (1926) vol. 3, 438.
5. Quoted in van der Waerden (1954), 165.
6. Taylor (1929), 5.
7. Boyer and Merzbach (1991), 84.
8. Allan (1975).
9. Plato (2000), 46.

Глава 5

1. Russell (1967), 37–38.
2. Quoted in Bulmer-Thomas (1976).
3. Там же.
4. van der Waerden (1954), 173.
5. Euler (1862).
6. Cauchy (1813a).
7. Connelly (1977).
8. Quoted in Bulmer-Thomas (1967), 195.

Глава 6

1. Simmons (1992), 69.
2. Koestler (1963), 262.
3. Там же, 252.
4. Kepler (1596), английский перевод Kepler (1981).
5. Kepler (1596), quoted in Gingerich (1973).
6. Kepler (1981), 107.
7. Quoted in Martens (2000), 146.
8. Kepler (1938), английский перевод Kepler (1997).
9. Quoted in Emmer (1993).

Глава 7

1. Bell (1987), 16.
2. Juškevič and Winter (1965), 333.
3. Euler (1758b).
4. Legendre (1794).
5. Juškevič and Winter (1965), 333.
6. Там же, 334.
7. Euler (1758b).
8. Там же.
9. Euler (1758a), английский перевод Euler (1758c).
10. Legendre (1794).
11. Euler (1758a), английский перевод Euler (1758c).

12. Lebesgue (1924).
13. Francese and Richeson (2007); Samelson (1996).

Глава 8

1. Bell (1945), 211.
2. Poincaré (1913), 44.

Глава 9

1. Descartes (1965), 259.
2. Quoted in Bell (1937), 35.
3. Descartes (1965).
4. Kuhn (1970), 54.
5. Quoted in Federico (1982), 76.
6. Lebesgue (1924).
7. Kuhn (1970), 55.

Глава 10

1. Albers (1994).
2. Lohne (1972).
3. Quoted in Itard (1972).
4. Girard (1629).
5. Quoted in Itard (1972).
6. Poinsot (1810).
7. Poinsot (1810).

Глава 11

1. Thoreau (1894), 419.
2. Quoted in Sachs, Stiebitz, and Wilson (1988).
3. Там же.
4. Quoted in Hopkins and Wilson (2004).
5. Euler (1736), английский перевод в Biggs, Lloyd, and Wilson (1986), 3–8.
6. Ball (1892).
7. Hierholzer (1873).
8. Barabási (2002), 12.
9. Listing (1847).
10. Terquem (1849).

Глава 12

1. Abel (1881), 259.
2. Freudenthal (1971).
3. Там же.
4. Simmons (1992), 186.
5. Cauchy (1813a).

6. Lhuilier (1813).
7. Там же.
8. Hadamard (1907).
9. Listing (1861–62); Jordan (1866b).

Глава 13

1. Hankel (1884).
2. Hardy (1992), 94.
3. Pick (1899).
4. DeTemple (1989).
5. Gardner (1975a), 8.
6. Applegate, Jacobson, and Sleator (1991).

Глава 14

1. Twain (1894), 42–43.
2. May (1965).
3. Graves (1889), 423.
4. Там же.
5. Cayley (1878).
6. Quoted in Dudley (1992).
7. Gardner (1975b); Gardner (1988).
8. Baltzer (1885), цитируется по Coxeter (1959).
9. Там же.
10. Kempe (1879).
11. Quoted in Wilson (2002), 119.
12. Gardner (1995).
13. Appel and Haken (1977); Appel, Haken, and Koch (1977).
14. Hales (2005).

Глава 15

1. Quoted in Federico (1982), 71.
2. Sommerville (1958), 143–44.
3. de Jonquières (1890).
4. Speziali (1973).
5. Pont (1974), 24.
6. Lhuilier (1813).
7. Hessel (1832).
8. Poinsot (1810).
9. Cauchy (1813a).
10. Lhuilier (1813).
11. Steiner (1826).
12. von Staudt (1847), 18–23.
13. Hoppe (1879).

Глава 16

1. Listing (1847).
2. Tait (1883).
3. Lefschetz (1970).
4. Из интервью Maurer (1983).
5. Klein (1882/83).
6. Brahana (1921).
7. Clarke (2000).
8. Gardner (1990).
9. Gardner (1956).
10. Listing (1861–1862).
11. Möbius (1865).
12. Во введении к Abbott (2005), xxix.
13. Klein (1882).

Глава 17

1. Poincaré (1895).
2. Möbius (1863).
3. Radó (1925).
4. Παπακυριακόπουλος (1943).
5. Quoted in Freudenthal (1975).
6. Riemann (1851); Riemann (1857).
7. Möbius (1863).
8. Jordan (1866a).
9. Dyck (1888).
10. Dehn and Heegaard (1907).
11. Francis and Weeks (1999).
12. Там же.

Глава 18

1. Shakespeare (2002), 82.
2. Vandermonde (1771).
3. Gauss (1877).
4. Listing (1847).
5. Seifert (1934).
6. Порядковый номер A002864 в Sloane (2007).
7. Crowell (1959).
8. Порядковый номер A002863 в Sloane (2007).
9. Kauffman (1987b); Murasugi (1987); Thistlethwaite (1987).

Глава 19

1. Frost (2002), 308.
2. Brouwer (1912).

3. Цитируется по Dieudonné (1975).
4. Dieudonné (1975).
5. Poincaré (1881).
6. Poincaré (1885).
7. Brouwer (1912).
8. Beno Eckmann, quoted in Frei and Stambach (1999).
9. Hopf (1925); Hopf (1926a); Hopf (1926b).
10. Morse (1929).
11. Thurston (1997).
12. Brouwer (1909).
13. Brouwer (1912).

Глава 20

1. Shakespeare (1992), 36.
2. Pólya (1954), 57–58.
3. Hopf (1935).
4. Quoted in Federico (1982), 43.
5. Euler (1758b); Euler (1758a).

Глава 21

1. Bell (1937), 254.
2. Euler (1760).
3. Обсуждение этой истории см. в Hayes (2006).
4. Quoted in Simmons (1992), 177.
5. Gauss (1828); английский перевод и комментарии в Dombrowski (1979).
6. Bonnet (1848).
7. Blaschke (1921).
8. Dyck (1888).

Глава 22

1. Scholz (1999).
2. Brouwer (1911).
3. Cauchy (1813a).
4. Schläfli (1901).
5. Breitenberger (1999).
6. Listing (1847), Listing (1861–1862).
7. Tait (1884).
8. Riemann (1851).

Глава 23

1. Hardy (1992), 85.
2. Цитируется по Dieudonné (1975).
3. Poincaré (1895).

4. Poincaré (1899); Poincaré (1900); Poincaré (1902a); Poincaré (1902b); Poincaré (1904).
5. Dieudonné (1989), 17.
6. Heinrich Tietze (1880–1964), цитируется по James (2001).
7. Poincaré (1895).
8. Poincaré (1895), цитируется по Sarkaria (1999).
9. Цитируется по James (1999).
10. Там же.

Эпилог

1. Russell (1957).
2. Poincaré (1900).
3. Poincaré (1904).
4. Там же.
5. Taubes (1987).
6. Smale (1961).
7. Smale (1990).
8. Там же.
9. Stallings (1962); Stallings (1960); Zeeman (1961); Zeeman (1962).
10. Freedman (1982).
11. Smale (1998).
12. Thurston (1982).
13. Hamilton (1982).
14. Perelman (2002); Perelman (2003b); Perelman (2003a).
15. Cao and Zhu (2006a); Cao and Zhu (2006b); Kleiner and Lott (2006); Morgan and Tian (2006).
16. Mackenzie (2006).
17. Дополнительные сведения см. в Nasar and Gruber (2006).
18. Nasar and Gruber (2006).
19. Цитируется по Nasar and Gruber (2006).
20. Poincaré (1913), 366.

Список литературы

- Abbott, E. A. (2005). *Flatland: A romance of many dimensions*. Princeton, NJ: Princeton University Press. With an introduction by Thomas Banchoff.
- Abel, N. H. (1881). *Oeuvres completes de Niels Henrik Abel*, vol. 2. Christiania, Norway: Imprimerie De Grondahl & Son.
- Adams, C. C. (1994). *The knot book: An elementary introduction to the mathematical theory of knots*. New York: W. H. Freeman.
- Aigner, M., and G. M. Ziegler (2001). *Proofs from The Book* (2nd ed.). Including illustrations by Karl H. Hofmann. Berlin: Springer-Verlag.
- Albers, D. J. (1994). Freeman Dyson: Mathematician, physicist, and writer. *The College Mathematics Journal* 25 (1), January, 2–21.
- Alexander, J. T. (1989). *Catherine the Great: Life and legend*. New York: Oxford University Press.
- Allan, D. J. (1975). Plato. In C. C. Gillispie (ed.), *Dictionary of scientific biography*. Vol. 11, 22–31. New York: Charles Scribner's Sons.
- Andrews, P. (1988). The classification of surfaces. *Amer.Math. Monthly* 95 (9), 861–867.
- Appel, K., and W. Haken (1977). Every planar map is four colorable. I. Discharging. *Illinois J. Math.* 21 (3), 429–490.
- Appel, K., W. Haken, and J. Koch (1977). Every planar map is four colorable. II. Reducibility. *Illinois J. Math.* 21 (3), 491–567.
- Applegate, D., G. Jacobson, and D. Sleator (1991). *Computer analysis of sprouts*. Technical Report CMU-CS-91-144, Carnegie Mellon University.
- Asimov, I. (1965). *A short history of chemistry: An introduction to the ideas and concepts of chemistry*. Science Study Series. Garden City, NY: Anchor Books, Doubleday.
- Ball, W. W. R. (1892). *Mathematical recreations and problems of past and present times*. London: MacMillan.
- Baltzer, R. (1885). Eine Erinnerung an Möbius und seinen Freund Weiske. *Ber. Verh. K. Sächs. Ges. Wiss. Leipzig* 37, 1–6.
- Barabási, A.-L. (2002). *Linked: How everything is connected to everything else and what it means*. Cambridge, MA: Perseus.
- Barnette, D. (1983). *Map coloring, polyhedra, and the four-color problem*. Washington DC: Mathematical Association of America.
- Barr, S. (1964). *Experiments in topology*. New York: Dover.
- Baxter, M. (1990). Unfair games. *Ureka: The Journal of the Archimedean* 50, 60–68.

Becker, J. C., and D. H. Gottlieb (1999). A history of duality in algebraic topology. In I. M. James (ed.), *History of topology*, 725–745. Amsterdam: North-Holland.

Bell, E. T. (1937). *Men of Mathematics*. New York: Simon and Schuster.

---. (1945). *The development of mathematics*. New York: McGraw-Hill.

---. (1987). *Mathematics: Queen and servant of science*. MAA Spectrum series. Washington DC: Mathematical Association of America.

Biggs, N. (1993). The development of topology. In J. Fauvel, R. Flood, and R. Wilson (eds.), *Möbius and his band: Mathematics and astronomy in nineteenth-century Germany*, 105–119. New York: The Clarendon Press, Oxford University Press.

Biggs, N. L., E. K. Lloyd, and R. J. Wilson (1986). *Graph theory 1736–1936*. Oxford: Clarendon Press.

Blaschke, W. (1921). *Vorlesungen über Differentialgeometrie*. Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag.

Bonnet, O. (1848). Mémoire sur la théorie générale des surfaces. *J. Éc. Polytech.* 19, 1–146.

Boyer, C. B. (1951). The foremost textbook of modern times. *Amer. Math. Monthly* 58, April, 223–226.

Boyer, C. B., and U. Merzbach (1991). *A history of mathematics* (2nd ed.). New York: John Wiley & Sons.

Boyle, R. (1937). *The sceptical chymist, with an introduction by M. M. Pattison Muir*. Everyman's Library. London: J. M. Dent and Sons.

Bradley, R., and E. Sandifer (eds.) (2007). *Leonhard Euler: Life, work and legacy*. Vol. 5 of *Studies in the history and philosophy of mathematics*. Amsterdam: Elsevier.

Brahana, H. R. (1921). Systems of circuits on two-dimensional manifolds. *Ann. Of Math.* (2) 23 (2), 144–168.

Breitenberger, E. (1999). Johann Benedict Listing. In I. M. James (ed.), *History of topology*, 909–924. Amsterdam: North-Holland.

Brewster, D. (1833). The life of Euler. In *Letters of Euler on different subjects in natural philosophy addressed to a German princess*, 15–28. New York: J. and J. Harper.

Brisson, L., and F. W. Meyerstein (1995). *Inventing the universe: Plato's «Timaeus», the big bang, and the problem of scientific knowledge*. Albany, NY: State University of New York Press.

Brouwer, L. E. J. (1909). On continuous one-to-one transformations of surfaces to themselves. *Proc. Kon. Nederl. Akad. Wetensch. Ser. A* 11, 788–798.

---. (1911). Beweis der Invarianz der Dimensionzahl. *Mathematische Annalen* 69, 169–175.

---. (1912). Über Abbildung von Mannigfaltigkeiten. *Mathematische Annalen* 71 (1), 97–115.

Bulmer-Thomas, I. (1967). *Selections illustrating the history of Greek mathematics with an English translation by Ivor Thomas*, Vol. 2 of *Loeb Classical Library*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

- . (1971). Euclid. In C. C. Gillispie (ed.), *Dictionary of scientific biography*. Vol. 4, 414–437. New York: Charles Scribner's Sons.
- . (1976). Theaetetus. In C. C. Gillispie (ed.), *Dictionary of scientific biography*. Vol. 13, 301–307. New York: Charles Scribner's Sons.
- Bureau, W. (1976). Staudt, Karl Georg Christian von. In C. C. Gillispie (ed.), *Dictionary of scientific biography*. Vol. 8, 4–6. New York: Charles Scribner's Sons.
- Burckhardt, J. J. (1983). Leonhard Euler, 1707–1783. *Math. Mag.* 56 (5), 262–273.
- Burde, G., and H. Zieschang (1999). Development of the concept of a complex. In *History of topology*, 103–110. Amsterdam: North-Holland.
- Burke, J. G. (1972). Hessel, Johann Friedrich Christian. In C. C. Gillispie (ed.), *Dictionary of scientific biography*. Vol. 6, 358–59. New York: Charles Scribner's Sons.
- Burkert, W. (1972). *Lore and science in ancient Pythagoreanism*. Cambridge, MA: Harvard University Press.
- Cajori, F. (1927). Frederick the Great on mathematics and mathematicians. *Amer. Math. Monthly* 34, 122–130.
- Calinger, R. (1968). Frederick the Great and the Berlin Academy of Sciences (1740–1766). *Annals of Science* 24 (3), 239–249.
- . (1996). Leonhard Euler: The first St. Petersburg years (1727–1741). *Historia Math.* 23 (2), 121–166.
- Cao, H.-D., and X.-P. Zhu (2006a). A complete proof of the Poincaré and geometrization conjectures—application of the Hamilton-Perelman theory of the Ricci flow. *Asian Journal of Mathematics* 10 (2), June, 165–492.
- . (2006b). Erratum to «A complete proof of the Poincaré and geometrization conjectures—application of the Hamilton-Perelman theory of the Ricci flow». *Asian Journal of Mathematics* 10 (4), December, 663–664.
- Carruccio, E. (1970). Betti, Enrico. In C. C. Gillispie (ed.), *Dictionary of scientific biography*. Vol. 2, 104–106. New York: Charles Scribner's Sons.
- Casselmann, B. (2004). *Mathematical illustrations: A manual of geometry and Post-Script*. New York: Cambridge University Press.
- Cauchy, A. L. (1813a). Recherches sur les polyèdres. *Journal de l'École Polytechnique* 9, 68–86.
- . (1813b). Sur les polygones et les polyèdres. *Journal de l'École Polytechnique* 9, 87–98.
- Cayley, A. (1861). On partitions of a close. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science, 4th Series* 21, 424–428.
- . (1873). On Listing's theorem. *Messenger of Mathematics II*, 81–89.
- . (1878). On the coloring of maps. *Proceedings of the London Mathematical Society IX*, 14.
- Chambers, M., R. Grew, D. Herlihy, T. Rabb, and I. Woloch (1987). *The Western experience, Vol. 2: The early modern period* (4th ed.). New York: Alfred A. Knopf.
- Clarke, A. C. (2000). The wall of darkness. In *The Collected Stories of Arthur C. Clarke*, 104–118. New York: Tom Doherty Associates.

Collingwood, S. D. (1898). *The life and letters of Lewis Carroll (Rev. C. L. Dodgson)*. London: T. Fisher Unwin.

Condorcet, M. J. (1786). Eulogy to Mr. Euler (translated by John S. D. Glaus, Euler Society, 2005). In *History of the Royal Academy of Sciences 1783*, 37–68. Paris: Imprimerie Royale.

Connelly, R. (1977). A counterexample to the rigidity conjecture for polyhedra. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* 47, 333–338.

Conway, J., P. Doyle, J. Gilman, and B. Thurston (1994). Geometry and the imagination. <http://www.geom.uiuc.edu/docs/education/institute91>.

Coolidge, J. L. (1963). *A history of geometrical methods*. New York: Dover.

Copper, M. (1993). Graph theory and the game of sprouts. *Amer. Math. Monthly* 100 (5), 478–482.

Coxeter, H. S. M. (1959). The four-color map problem, 1840–1890. *Mathematics Teacher* 52, 283–289.

---. (1988). Regular and semiregular polyhedra. In M. Senechal and G. Fleck (eds.), *Shaping space: A polyhedral approach*, proceedings of 1984 conference held in Northampton, MA, 67–79. Boston, Design Science Collection, Birkhäuser Boston.

Crombie A. C., (1971). Descartes, Réne du Perron. In C. C. Gillispie (ed.), *Dictionary of scientific biography*, vol. 4, 51–55. New York: Charles Scribner's Sons.

Cromwell, P. R. (1995). Kepler's work on polyhedra. *Math. Intelligencer* 17 (3), 23–33.

---. (1997). *Polyhedra*. Cambridge: Cambridge University Press.

Crowe, M. J. (1974). Möbius, August Ferdinand. In C. C. Gillispie (ed.), *Dictionary of scientific biography*. Vol. 9, 429–431. New York: Charles Scribner's Sons.

Crowell, R. (1959). Genus of alternating link types. *Ann. of Math.* (2) 69, 258–275.

D'Alarcao, H., and T. E. Moore (1976–77). Euler's formula and a game of Conway's. *Journal of Recreational Mathematics* 9 (4), 149–251.

de Jonquières, E. (1890). Note sur un point fondamental de la théorie des polyèdres. *Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences* 110, 110–115.

Dehn, M., and P. Heegaard (1907). Analysis situs. In *Enzyklopädie Mathematische Wissenschaft*. Vol. 3, 153–220. Leipzig: Teubner.

Descartes, R. (1965). *Discourse on method, Optics, geometry, and meteorology*. Translated with an introduction by Paul J. Olscamp. Indianapolis: Bobbs-Merrill.

DeTemple, D. (1989). Pick's theorem: A retrospective. *Mathematics Notes From Washington State University* 32 (3 and 4), November, 1–4.

DeTemple, D., and J. M. Robertson (1974). The equivalence of Euler's and Pick's theorems. *Math. Teacher* 67 (3), 222–226.

Dieudonné, J. (1975). Poincaré, Henri Jules. In C. C. Gillispie (ed.), *Dictionary of scientific biography*. Vol. 11, 51–61. New York: Charles Scribner's Sons.

---. (1989). *A history of algebraic and differential topology: 1900–1960*. Boston: Birkhäuser Boston.

Dombrowski, P. (1979). *150 years after Gauss' «Disquisitiones generales circa superficies curvas»*. With the original text of Gauss. Vol. 62 of *Astérisque*. Paris: Société Mathématique de France.

Doyle, P. H., and D. A. Moran (1968). A short proof that compact 2-manifolds can be triangulated. *Invent. Math.* 5, 160–162.

Dudley, U. (1992). *Mathematical cranks*. MAA Spectrum series. Washington DC: Mathematical Association of America.

Dunham, W. (1990). *Journey through genius: The great theorems of mathematics*. New York: John Wiley & Sons.

---. (1999). *Euler: The master of us all*. Vol. 22 of *The Dolciani Mathematical Expositions*. Washington DC: Mathematical Association of America.

---. (ed.) (2007). *The genius of Euler: Reflections on his life and work*. MAA Spectrum series. Washington DC: Mathematical Association of America.

Dyck, W. (1888). Beiträge zur analysis situs. *Math. Ann.* XXXII, 457–512.

Emmer, M. (1993). Art and mathematics: The Platonic solids. In M. Emmer (ed.), *The visual mind*, Leonardo Book Ser., 215–220. Cambridge, MA: MIT Press.

Epple, M. (1999). Geometric aspects in the development of knot theory. In *History of topology*, 301–357. Amsterdam: North-Holland.

Euclid (1926). *The thirteen books of Euclid's Elements translated from the text of Heiberg*. Vol. I: Introduction and Books I, II. Vol. II: Books III–IX. Vol. III: Books X–XIII and Appendix. Translated with introduction and commentary by Thomas L. Heath, 2nd ed. Cambridge: Cambridge University Press.

Euler, L. (1736). *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis*. *Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae* 8, 128–40. Reprinted in *Opera Omnia* series 1, vol. 7, 1–10.

---. (1758a). *Demonstratio nonnullarum insignium proprietatum quibus solida hedris planis inclusa sunt praedita*. *Novi Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae* 4, 94–108. Reprinted in *Opera Omnia* series 1, vol. 26, 94–108.

---. (1758b). *Elementa doctrinae solidorum*. *Novi Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae* 4, 72–93. Reprinted in *Opera Omnia* series 1, vol. 26, 71–93.

---. (1758c). Proof of some notable properties with which solids enclosed by plane faces are endowed. Translated by Chris Francese and David Richeson. <http://www.eulerarchive.org>.

---. (1760). *Recherches sur la courbure des surfaces*. *Mém. Acad. Sci. Berlin* 16, 119–143.

---. (1862). *Continuatio fragmentorum ex adversariis mathematicis depromptorum*. In P. H. Fuss and N. Fuss (eds.), *Opera postuma mathematica et physica*, Vol. 1, 487–518. St. Petersburg: St. Petersburg Academy of Sciences.

---. (1911–). *Opera Omnia*. Basel: Birkhäuser.

Euler Archive, <http://www.eulerarchive.org>. Created by D. Klyve and L. Stemkoski.

Eves, H. (1990). *An introduction to the history of mathematics*. 6th ed. Pacific Grove, CA: Brooks/Cole.

---. (1969a). *In mathematical circles, quadrants I and II*. Boston: Prindle, Weber & Schmidt.

---. (1969b). *In mathematical circles, quadrants III and IV*. Boston: Prindle, Weber & Schmidt.

Federico, P. J. (1982). *Descartes on polyhedra: A study of the De Solidorum Elementis*. Vol. 4 of *Sources in the history of mathematics and physical sciences*. New York: Springer-Verlag.

Field, J. V. (1979). Kepler's star polyhedra. *Vistas Astronom.* 23 (2), 109–141.

---. (1988). *Kepler's geometrical cosmology*. Chicago: University of Chicago Press.

Francesse, C., and D. Richeson (2007). The flaw in Euler's proof of his polyhedral formula. *Amer. Math. Monthly* 114, April, 286–296.

Francis, G. K. (1987). *A topological picturebook*. New York: Springer-Verlag.

Francis, G. K., and J. R. Weeks (1999). Conway's ZIP proof. *Amer. Math. Monthly* 106 (5), 393–399.

Fréchet, M., and K. Fan (1967). *Initiation to combinatorial topology*. Translated from the French, with some notes, by H. W. Eves. Boston: Prindle, Weber & Schmidt.

Freedman, M. H. (1982). The topology of four-dimensional manifolds. *J. Differential Geom.* 17 (3), 357–453.

Frei, G. and U. Stambach (1999). Heinz Hopf. In I. M. James (ed.), *History of topology*, 991–1008. Amsterdam: North-Holland.

Freudenthal, H. (1971). Cauchy, Augustin-Louis. In C. C. Gillispie (ed.), *Dictionary of scientific biography*. Vol. 3, 131–148. New York: Charles Scribner's Sons.

---. (1972). Hopf, Heinz. In C. C. Gillispie (ed.), *Dictionary of scientific biography*. Vol. 6, 496–497. New York: Charles Scribner's Sons.

---. (1975). Riemann, Georg Friedrich Bernhard. In C. C. Gillispie (ed.), *Dictionary of scientific biography*. Vol. 11, 447–456. New York: Charles Scribner's Sons.

Fritsch, R. and G. Fritsch (1998). *The four-color theorem: History, topological foundations, and idea of proof*. Translated from the 1994 German original by Julie Peschke. New York: Springer-Verlag.

Frost, R. (2002). *The poetry of Robert Frost: The collected poems*. New York: Henry Holt.

Funkenbusch, W. W. (1974). Classroom notes: From Euler's formula to Pick's formula using an edge theorem. *Amer. Math. Monthly* 81 (6), 647–648.

Gardner, M. (1956). The Afghan bands. In *Mathematics, Magic and Mystery*, 70–73. New York: Dover.

---. (1975a). *Mathematical Carnival*. New York: Knopf.

---. (1975b). Mathematical games: Six sensational discoveries that somehow or another have escaped public attention. *Scientific American* 232, April, 127–131.

- . (1988). Six sensational discoveries. In *Time Travel and Other Mathematical Bewilderments*, 125–138. New York: W. H. Freeman.
- . (1990). Möbius bands. In *Mathematical Magic Show*, 123–136. Washington DC: Mathematical Association of America.
- . (1995). The four-color map theorem. In *New Mathematical Diversions*, 113–123. Washington DC: Mathematical Association of America.
- . (2005). *Martin Gardner's mathematical games: The entire collection of his Scientific American columns*. MAA Spectrum series (on CD). Mathematical Association of America.
- Gaskell, R. W., M. S. Klamkin, and P. Watson (1976). Triangulations and Pick's theorem. *Math. Mag.* 49 (1), 35–37.
- Gaukroger, S. (1995). *Descartes: An intellectual biography*. Oxford: Clarendon Press.
- Gauss, C. F. (1828). *Disquisitiones generales circa superficies curvas*. Göttingen: Dieterich.
- . (1877). Zur mathematischen theorie der electrodynamischen wirkungen. In *Werke*, vol. 5. Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen.
- Gillispie, C. C. (ed.) (1970–1990). *Dictionary of Scientific Biography*, Volumes 1–16. New York: Charles Scribner's Sons.
- Gingerich, O. (1973). Kepler, Johannes. In C. C. Gillispie (ed.), *Dictionary of scientific biography*. Vol. 7, 289–312. New York: Charles Scribner's Sons.
- Girard, A. (1629). *Invention nouvelle en algèbre*. Amsterdam: Guillaume Jansson Blaeuw.
- Gluck, H. (1975). Almost all simply connected closed surfaces are rigid. In *Geometric topology (Proc. Conf., Park City, Utah, 1974)*, 225–39. Lecture Notes in Math., Vol. 438. Berlin: Springer.
- Gorman, P. (1979). *Pythagoras: A life*. London: Routledge & Kegan Paul.
- Gottlieb, D. H. (1996). All the way with Gauss-Bonnet and the sociology of mathematics. *Amer. Math. Monthly* 103 (6), 457–469.
- Graham, L. R. (1993). *Science in Russia and the Soviet Union: A short history*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Graves, R. P. (1889). *Life of Sir William Rowan Hamilton*, vol. 3. Dublin: Hodges, Figgis, & Co.
- Grünbaum, B. (2003). *Convex polytopes* (2nd ed.). Vol. 221 of *Graduate texts in mathematics*. Prepared and with a preface by Volker Kaibel, Victor Klee, and Günter M. Ziegler. New York: Springer-Verlag.
- Grünbaum, B., and G. C. Shephard (1993). Pick's theorem. *Amer. Math. Monthly* 100 (2), 150–161.
- Guillemin, V., and A. Pollack (1974). *Differential topology*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.
- Guthrie, W. (1962). *A history of Greek philosophy: The earlier presocratics and the Pythagoreans*, vol. 1. Cambridge: Cambridge University Press.
- Hadamard, J. (1907). Erreurs de mathematicians. *L'intermédiaire des mathématiciens* 14, 31.

Hales, T. C. (2005). A proof of the Kepler conjecture. *Ann. of Math.* (2) 162 (3), 1065–1185.

Hamilton, R. S. (1982). Three-manifolds with positive Ricci curvature. *J. Differential Geom.* 17 (2), 255–306.

Hankel, H. (1884). *Die Entwicklung der Mathematik in den letzten Jahrhunderten*. Tübingen: Verlag und Druck von Franz.

Harcave, S. (1964). *Russia: A history* (5th ed.). Philadelphia: J. B. Lippincott.

Hardy, G. H. (1992). *A mathematician's apology*. Cambridge: Cambridge University Press.

Hartley, J. M. (2003). Governing the city: St. Petersburg and Catherine II's reforms. In A. Cross (ed.), *St. Petersburg: 1703–1825*, 99–118. London: Palgrave Macmillan.

Hatcher, A. (2002). *Algebraic topology*. Cambridge: Cambridge University Press.

Hayes, B. (2006). Gauss's day of reckoning: A famous story about the boy wonder of mathematics has taken on a life of its own. *American Scientist* 94 (3), 200–205.

Heath, T. (1981). *A history of Greek mathematics: From Aristarchus to Diophantus*, vol. II. Corrected reprint of the 1921 original. New York: Dover.

Hemingway, E. (1960). *Death in the afternoon*. New York: Charles Scribner & Sons.

Hessel, J. F. (1832). Nachtrag zu dem Eulerschen Lehrsatz von Polyedern. *Journal für die Reine und Angewandte mathematik* 8, 13–20.

Hierholzer, C. (1873). Über die möglichkeit, einen linienzug ohne wiederholung und ohne unterbrechnung zu umfahren. *Mathematische Annalen* 6, 30–32.

Hilbert, D., and S. Cohn-Vossen (1952). *Geometry and the imagination*. Translated by P. Néményi. New York: Chelsea Publishing Company.

Hollingdale, S. (1989). *Makers of mathematics*. London: Penguin Books, a Pelican Book.

Hopf, H. (1925). Über die curvatura integra geschlossener Hyperflächen. *Math. Ann.* 95, 340–367.

---. (1926a). Abbildungsklassen n -dimensionaler Mannigfaltigkeiten. *Math. Ann.* 96, 209–224.

---. (1926b). Vectorfelder in n -dimensionalen Mannigfaltigkeiten. *Math. Ann.* 96, 225–249.

---. (1935). Über die Drehung der Tangenten und Sehnen ebener Kurven. *Comp. Math.* 2, 50–62.

Hopkins, B., and R. Wilson (2004). The truth about Königsburg. *Col. Math. J.* 35 (3), May, 198–207.

Hoppe, R. (1879). Ergänzung des eulerschen satzes von den polyedern. *Archiv der Mathematik und Physik* 63, 100–103.

Itard, J. (1972). Girard, Albert. In C. C. Gillispie (ed.), *Dictionary of scientific biography*. Vol. 5, 408–410. New York: Charles Scribner's Sons.

---. (1973). Legendre, Adrien-Marie. In C. C. Gillispie (ed.), *Dictionary of scientific biography*. Vol. 8, 135–143. New York: Charles Scribner's Sons.

Jackson, A. (2006). Conjectures no more? Consensus forming on the proof of the Poincaré and geometrization conjectures. *Notices Amer. Math. Soc.* 53 (8), 897–901.

James, I. M. (1999). From combinatorial topology to algebraic topology. In *History of topology*, 561–73. Amsterdam: North-Holland.

---. (2001). Combinatorial topology versus point-set topology. In *Handbook of the history of general topology*, Vol. 3 of *History of Topology Series*, 809–834. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ.

Jones, P. S. (1994). Irrationals or incommensurables I: Their discovery and a «logical scandal». In F. J. Swetz (ed.), *From five fingers to infinity: A journey through the history of mathematics*, 172–175. Chicago: Open Court.

Jordan, C. (1866a). Des contours tracés sur les surfaces. *J. Math. Pures Appl.* (2) 11, 110–130. See also *Oeuvres*, vol. 4, 91–112, Paris: Gauthier-Villars et cie, 1964.

---. (1866b). Recherches sur les polyèdres. *Comptes rendus des Séances de l'Académie des Sciences* 62, 1339–1341.

Juškevič, A. P., and E. Winter (1965). *Leonhard Euler und Christian Goldbach: Briefwechsel 1729–1764*. Berlin: Akademie-Verlag.

Katz, V. J. (1993). *A history of mathematics: An introduction*. New York: Harper Collins College Publishers.

Kauffman, L. H. (1987a). *On knots*, vol. 115 of *Annals of mathematics studies*. Princeton, NJ: Princeton University Press.

---. (1987b). State models and the Jones polynomial. *Topology* 26 (3), 395–407.

Kempe, A. B. (1879). On the geographical problem of four colors. *American Journal of Mathematics II*, 193–204.

Kepler, J. (1596). *Mysterium cosmographicum*. Tübingen.

---. (1938). Harmonice mundi. In M. Caspar (ed.), *Johannes Kepler gesammelte werke*, vol. 6. Munich: Beck.

---. (1981). *Mysterium cosmographicum: The secret of the universe*. Translation by A. M. Duncan, introduction and commentary by E. J. Aiton, with a preface by I. Bernard Cohen. New York: Abaris Books.

---. (1997). *The harmony of the world*, vol. 209 of *Memoirs of the American Philosophical Society*. Translated from the Latin and with an introduction and notes by E. J. Aiton, A. M. Duncan, and J. V. Field, with a preface by Duncan and Field. Philadelphia: American Philosophical Society.

Klein, F. (1882). *Über Riemanns Theorie der algebraischen Functionen und ihrer Integrale*. Leipzig: B. G. Teubner.

---. (1882/83). Neue Beiträge zur Riemannschen Funktionentheorie. *Math. Ann.* 21, 141–218.

Kleiner, B., and J. Lott (2006). Notes on Perelman's papers. www.math.lsa.umich.edu/~lott/ricciflow/perelman.html.

Kline, M. (1972). *Mathematical thought from ancient to modern times*. New York: Oxford University Press.

Knobloch, E. (1998). Mathematics at the Prussian Academy of Sciences 1700–1810. In H. G. W. Begehr, H. Koch, J. Kramer, N. Schnappacher, and E.-J. Thiele (eds.), *Mathematics in Berlin*, 1–8. Berlin: Birkhäuser.

Koestler, A. (1963). *The sleepwalkers: A history of man's changing vision of the universe*. New York: The Universal Library.

Kuhn, T. S. (1970). *The structure of scientific revolutions* (2nd ed.). Chicago: University of Chicago Press.

Lakatos, I. (1976). *Proofs and refutations: The logic of mathematical discovery*. Cambridge: Cambridge University Press.

Lebesgue, H. (1924). Remarques sur les deux premières démonstrations du théorème d'Euler relatif aux polyèdres. *Bulletin de la Société Mathématique de France* 52, 315–336.

Lefschetz, S. (1970). The early development of algebraic topology. *Bol. Soc. Brasil. Mat.* 1 (1), 1–48.

Legendre, A. M. (1794). *Éléments de géométrie*. Paris: Firmin Didot.

Lhuillier, S. (1811). Démonstration immédiate d'un théorème fondamental d'Euler sur les polyèdres. *Mémoires de l'Académie Impériale des Sciences de Saint-Pétersbourg* 4, 271–301.

---. (1813). Mémoire sur la polyédrométrie. *Annales de Mathématiques* 3, 169–189.

Listing, J. B. (1847). Vorstudien zur topologie. *Göttinger studien (Abtheilung 1)* 1, 811–875.

---. (1861–62). Der Census räumlicher Complexe oder Verallgemeinerung des Euler'schen Satzes von den Polyedern. *Abhandlungen der königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen* 10, 97–182.

Liu, A. C. F. (1979). Lattice points and Pick's theorem. *Math. Mag.* 52 (4), 232–235.

Livingston, C. (1993). *Knot theory*, vol. 24 of *Carus Mathematical Monographs*. Washington DC: Mathematical Association of America.

Lobastova, N., and M. Hirst (2006). World's top maths genius jobless and living with mother. *Daily Telegraph*. August 20.

Lohne, J. A. (1972). Harriot, Thomas. In C. C. Gillispie (ed.), *Dictionary of scientific biography*. Vol. 6, 124–129. New York: Charles Scribner's Sons.

---. (1979). Essays on Thomas Harriot. I. Billiard balls and laws of collision; II. Ballistic parabolas; III. A survey of Harriot's scientific writings. *Arch. Hist. Exact Sci.* 20 (3–4), 189–312.

Machamer, P. (1998). Galileo's machines, his mathematics, and his experiments. In P. Machamer (ed.), *The Cambridge Companion to Galileo*, Cambridge Companions to Philosophy, 53–79. New York: Cambridge University Press.

Mackenzie, D. (2006). Breakthrough of the year: The Poincaré conjecture proved. *Science* 314 (5807), December 22, 1848–1849.

MacTutor History of Mathematics Archive, <http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history>. Created by J. J. O'Connor and E. F. Robertson.

Malkevitch, J. (1984). The first proof of Euler's formula. *Mitt. Math. Sem. Gies-sen* 165, 77–82.

---. (1988). Milestones in the history of polyhedra. In M. Senechal and G. Fleck (eds.), *Shaping space: A polyhedral approach*, proceedings of 1984 conference held in Northampton, MA, 80–92. Boston: Design Science Collection, Birkhäuser Boston.

Martens, R. (2000). *Kepler's philosophy and the new astronomy*. Princeton, NJ: Princeton University Press.

Maurer, S. B. (1983). An interview with Albert W. Tucker. *Two-Year College Mathematics Journal* 14 (3), 210–224.

May, K. O. (1965). The origin of the four-color conjecture. *Isis* 56 (3), 346–348.

McClellan III, J. E. (1985). *Science reorganized: Scientific societies in the eighteenth century*. New York: A Columbia University Press.

McEwan, I. (1997). *Enduring love*. New York: Anchor Books.

---. (1963). *Morse theory*. Based on lecture notes by M. Spivak and R. Wells. *Annals of Mathematics Studies*, no. 51. Princeton, NJ: Princeton University Press.

---. (2003). Towards the Poincaré conjecture and the classification of 3-manifolds. *Notices Amer. Math. Soc.* 50 (10), 1226–1233.

Möbius, A. F. (1863). Theorie der elementaren Verwandtschaften. *Abhandlungen Sächsische Gesellschaft der Wissenschaften* 15, 18–57. Also in *Gesammelte Werke*, vol. 2, Leipzig, 1886, 433–471.

---. (1865). Ueber die Bestimmung des Inhaltes eines Polyeders. *Abhandlungen Sächsische Gesellschaft der Wissenschaften* 17, 31–68. *Gesammelte Werke*, vol. 2, Leipzig, 1886, 473–512.

Morgan, J. W., and G. Tian (2006). Ricci flow and the Poincaré conjecture. <http://arXiv.org/abs/math.DG/0607607>.

Morse, M. (1929). Singular points of vector fields under general boundary conditions. *Amer. J. Math.* 41, 165–178.

Murasugi, K. (1958). On the genus of the alternating knot. I, II. *J. Math. Soc. Japan* 10, 94–105, 235–248.

---. (1987). Jones polynomials and classical conjectures in knot theory. *Topology* 26 (2), 187–194.

Nasar, S., and D. Gruber (2006). Manifold destiny: A legendary problem and the battle over who solved it. *The New Yorker*, August 28, 44–57.

Nash, C. (1999). Topology and physics—a historical essay. In I. M. James (ed.), *History of topology*, 359–415. Amsterdam: North-Holland.

Papakyriakopoulos, C. (1943). A new proof for the invariance of the homology groups of a complex. *Bull. Soc. Math. Grèce* 22, 1–154.

Perelman, G. (2002). The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications. <http://arxiv.org/abs/math.DG/0211159>.

---. (2003a). Finite extinction time for the solutions to the Ricci flow on certain three-manifolds. <http://arxiv.org/abs/math.DG/0307245>.

---. (2003b). Ricci flow with surgery on three-manifolds. <http://arxiv.org/abs/math.DG/0303109>.

Peterson, I. (2003). Recycling topology. *Science News Online* 163 (17), April 26.

Pick, G. (1899). Geometrisches zur zahlenlehre. *Sitzungber. Lotos, Naturwissen Zeitschrift, Prague* 19, 311–319.

Plato (1921). *Theaetetus. Sophist*. With an English translation by H. N. Fowler. New York: G. P. Putnam's Sons.

---. (1972). *Philebus and Epinomis*. Translation and introduction by A. E. Taylor. London: Dawsons of Pall Mall.

---. (2000). *Timaeus*. Translated with an introduction by Donald J. Zeyl. Indianapolis: Hackett Publishing.

Poincaré, H. (1881). Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle. *J. de Math.* 7, 375–422.

---. (1885). Sur les courbes définies par les équations différentielles. *Journal de mathématiques* 1 (4), 167–244.

---. (1895). Analysis situs. *J. Ec. Polytech ser. 2* 1, 1–123.

---. (1899). Complément à l'analysis situs. *Rend. Circ. Math. D. Palermo* 13, 285–343.

---. (1900). Second complément à l'analysis situs. *Proc. Lond. Math. Soc.* 32, 277–308.

---. (1902a). Sur certaines surfaces algébriques; troisième complément à l'analysis situs. *Bull. Soc. Math. France* 30, 49–70.

---. (1902b). Sur les cycles algébriques; quatrième complément à l'analysis situs. *J. de Math.* 8, 169–214.

---. (1904). Cinquième complément à l'analysis situs. *Rend. Circ. Math. D. Palermo* 18, 45–110.

---. (1913). *The foundations of science: Science and hypothesis, the value of science, science and method*. Science and Education. New York: The Science Press.

Poinsot, L. (1810). Mémoire sur les polygones et les polyèdres. *Journal de l'école polytechnique* 4, 16–48.

Pólya, G. (1954). *Induction and analogy in mathematics*. Vol. 1 of *Mathematics and plausible reasoning*. Princeton, NJ: Princeton University Press.

Pont, J.-C. (1974). *La topologie algébrique des origines à Poincaré*. Paris: Presses Universitaires de France.

Przytycki, J. (1992). A history of knot theory from Vandermonde to Jones. *Aportaciones Matemáticas Comunicaciones* 11, 173–185.

Radó, T. (1925). Über den begriff von Riemannsche fläche. *Acta Univ. Szeged* 2, 101–120.

Ranicki, A. A., A. J. Casson, D. P. Sullivan, M. A. Armstrong, C. P. Rourke, and G. E. Cooke (1996). *The Hauptvermutung book*, volume 1 of *K-Monographs in Mathematics*. A collection of papers of the topology of manifolds. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Read, J. (1966). *Prelude to chemistry: An outline of alchemy, its literature and relationships*. Cambridge, MA: The M.I.T. Press.

Riasanovsky, N. V. (1993). *A History of Russia* (5th ed.). New York: Oxford University Press.

Richeson, D. (2007). The polyhedral formula. In R. Bradley and E. Sandifer (eds.), *Leonhard Euler: Life, work and legacy*. Vol. 5 of *Studies in the history and philosophy of mathematics*, 421–39. Amsterdam: Elsevier.

Riemann, G. F. B. (1851). *Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse*. PhD thesis, Göttingen.

---. (1857). Theorie der Abel'schen Functionen. *Journal für Mathematik* 54, 101–155. Also in *Gesammelte Mathematische Werke und Wissenschaftlicher Nachlass*, Berlin: Springer, 1990, 88–142.

Russell, B. (1957). The study of mathematics. In *Mysticism and Logic*, 55–69. Garden City, NY: Doubleday.

---. (1967). *The autobiography of Bertrand Russell*, vol. 1. Boston: Little, Brown.

Sachs, H., M. Stiebitz, and R. J. Wilson (1988). An historical note: Euler's Königsberg letters. *Journal of Graph Theory* 12 (1), 133–139.

Salzberg, H. W. (1991). *From caveman to chemist: Circumstances and achievements*. Washington DC: American Chemical Society.

Samelson, H. (1995). Descartes and differential geometry. In *Geometry, topology, & physics*, Conf. Proc. Lecture Notes in Geometry and Topology, IV, 323–328. Cambridge, MA: Internat. Press.

---. (1996). In defense of Euler. *Enseign. Math.* (2) 42 (3–4), 377–382.

Sandifer, E. (2004). How Euler did it: *V, E and F*, parts 1 and 2. Mathematical Association of America Online. <http://www.maa.org/news/howeulerdidit.html>.

Sarkaria, K. S. (1999). The topological work of Henri Poincaré. In *History of topology*, 123–167. Amsterdam: North-Holland.

Schechter, B. (1998). *My brain is open: The mathematical journeys of Paul Erdos*. New York: Touchstone.

Schläfli, L. (1901). Theorie der vielfachen Continuität. *Denkschr. Schweiz. naturf. Ges.* 38, 1–237.

Scholz, E. (1999). The concept of manifold, 1850–1950. In I. M. James (ed.), *History of topology*, 25–64. Amsterdam: North-Holland.

Seifert, H. (1934). Über das Geschlecht von Knotten. *Math. Ann.* 110, 571–592.

Seifert, H., and W. Threlfall (1980). *Seifert and Threlfall: A textbook of topology*, vol. 89 of *Pure and Applied Mathematics*. Translated from the German edition of 1934 by Michael A. Goldman, with a preface by Joan S. Birman. With «Topology of 3-dimensional fibered spaces» by Seifert, translated from the German by Wolfgang Heil. New York: Academic Press. Harcourt Brace Jovanovich Publishers.

Senéchal, M. (1988). A visit to the polyhedron kingdom. In M. Senéchal and G. Fleck (eds.), *Shaping space: A polyhedral approach*, proceedings of 1984 conference held in Northampton, MA, 3–43. Boston, Design Science Collection, Birkhäuser Boston.

Shakespeare, W. (1992). *Hamlet*. New York: Dover.

- . (2002). *Twelfth night*. Woodbury, CT: Barron's Educational Series.
- Simmons, G. F. (1992). *Calculus gems: Brief lives and memorable mathematics*. With portraits by Maceo Mitchell. New York: McGraw-Hill.
- Simpson, J., and E. Weiner (eds.) (1989). *Oxford English Dictionary* (2nd ed.). Oxford: Clarendon Press.
- Sloane, N. J. A. (2007). The online encyclopedia of integer sequences. <http://www.research.att.com/~njas/sequences>.
- Smale, S. (1961). Generalized Poincaré's conjecture in dimensions greater than four. *Ann. of Math.* (2) 74, 391–406.
- . (1990). The story of the higher dimensional Poincaré conjecture (what really actually happened on the beaches of Rio). *Math. Intelligencer* 12 (2), 44–51.
- . (1998). Mathematical problems for the next century. *Math. Intelligencer* 20 (2), 7–15.
- Sommerville, D. M. Y. (1958). *An introduction to the geometry of n dimensions*. New York: Dover.
- Speziali, P. (1973). L'huillier, Simon-Antoine-Jean. In C. C. Gillispie (ed.), *Dictionary of scientific biography*. Vol. 8, 305–307. New York: Charles Scribner's Sons.
- Stallings, J. (1960). Polyhedral homotopy-spheres. *Bull. Amer. Math. Soc.* 66, 485–488.
- Stallings, J. (1962). The piecewise-linear structure of Euclidean space. *Proc. Cambridge Philos. Soc.* 58, 481–488.
- Steiner, J. (1826). Leichter Beweis eines stereometrischen Satzes von Euler. *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 1, 364–367.
- Steinitz, E. (1922). Polyeder und raumeinteilungen. In W. F. Meyer and H. Mohrmann (eds.), *Encyclopädie der mathematischen Wissenschaften*. Vol. 3 (Geometrie), 1–139. Leipzig: Teubner.
- Stillwell, J. (2002). *Mathematics and its history* (2nd ed.). Undergraduate Texts in Mathematics. New York: Springer-Verlag.
- Struik, D. J. (1972). Gergonne, Joseph Diaz. In C. C. Gillispie (ed.), *Dictionary of scientific biography*. Vol. 5, 367–369. New York: Charles Scribner's Sons.
- Tait, P. G. (1883). Johann Benedict Listing. *Nature* 28, February 1, 316. Also in *Scientific Papers of Peter Guthrie Tate*, vol. 2, Cambridge: Cambridge University Press, 81–84.
- . (1884). Listing's *Topologie*. Introductory address to the Edinburgh Mathematical Society, November 9, 1883. *Philosophical Magazine* 17 (5), January, 30–46.
- Taubes, G. (1987). What happens when hubris meets nemesis. *Discover* 8, July, 66–77.
- Taylor, A. E. (1929). *Plato: The man and his work*. New York: The Dial Press.
- . (1962). *A commentary on Plato's Timaeus*. London: Oxford University Press.
- Terquem, O. (1849). Sur les polygones et les polyèdres étoilés, polygones funiculaires. *Nouv. Ann. Math.* 8, 68–74.

- Terrall, M. (1990). The culture of science in Frederick the Great's Berlin. *Hist. Sci.* 28, 333–364.
- Thistlethwaite, M. B. (1987). A spanning tree expansion of the Jones polynomial. *Topology* 26 (3), 297–309.
- Thomassen, C. (1992). The Jordan-Schönflies theorem and the classification of surfaces. *Amer. Math. Monthly* 99 (2), 116–130.
- Thoreau, H. D. (1894). In F. B. Sanborn (ed.), *Familiar Letters of Henry David Thoreau*. Boston: Houghton, Mifflin and Co.
- Thurston, W. P. (1982). Three-dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* 6 (3), 357–381.
- . (1997). *Three-dimensional geometry and topology*, vol. 1. Princeton, NJ: Princeton Univ. Press.
- Tucker, A. W., and F. Nebeker (1990). Lefschetz, Solomon. In C. C. Gillispie (ed.), *Dictionary of scientific biography*. vol. 18, 534–539. New York: Charles Scribner's Sons.
- Turnbull, H. W. (1961). *The great mathematicians*. New York: New York University Press.
- Twain, M. (1894). *Tom Sawyer abroad*. New York: Jenkins & Mccowan.
- van der Waerden, B. L. (1954). *Science awakening*. English translation by Arnold Dresden. Groningen, Netherlands: P. Noordhoff.
- Vanden Eynde, R. (1999). Development of the concept of homotopy. In *History of topology*, 65–102. Amsterdam: North-Holland.
- Vandermonde, A.-T. (1771). Remarques sur les problèmes de situation. *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de Paris* 15, 566–574.
- Varberg, D. E. (1985). Pick's theorem revisited. *Amer. Math. Monthly* 92 (8), 584–587.
- von Fritz, K. (1975). Pythagoras of Samos. In C. C. Gillispie (ed.), *Dictionary of scientific biography*. Vol. 11, 219–25. New York: Charles Scribner's Sons.
- von Staudt, K. G. C. (1847). *Geometrie der Lage*. Nürnberg: Bauer und Raspe.
- Vucinich, A. (1963). *Science in Russian culture: A history to 1860*. Stanford, CA: Stanford University Press.
- Waterhouse, W. C. (1972). The discovery of the regular solids. *Arch. Hist. Exact Sci.* 9, 212–221.
- Weeks, J. R. (2002). *The shape of space*, 2nd ed. New York: Marcel Dekker.
- Weibel, C. A. (1999). History of homological algebra. In *History of topology*, 797–836. Amsterdam: North-Holland.
- Weil, A. (1984). Euler. *Amer. Math. Monthly* 91 (9), 537–542.
- Wells, D. (1990). Are these the most beautiful? *Math. Intelligencer* 12 (3), 37–41.
- Weyl, H. (1989). *Symmetry*. Reprint of the 1952 original. Princeton Science Library. Princeton, NJ: Princeton University Press.
- Wilson, R. J. (1986). An Eulerian trail through Königsberg. *Journal of Graph Theory* 10 (3), 265–275.

---. (2002). *Four colors suffice: How the map problem was solved*. Princeton, NJ: Princeton University Press.

Youschkevitch, A. P. (1971). Euler, Leonhard. In C. C. Gillispie (ed.), *Dictionary of scientific biography*. Vol. 4, 467–484. New York: Charles Scribner's Sons.

Zeeman, E. C. (1961). The generalised Poincaré conjecture. *Bull. Amer. Math. Soc.* 67, 270.

---. (1962). The Poincaré conjecture for $n \geq 5$. In *Topology of 3-manifolds and related topics (Proc. The Univ. of Georgia Institute, 1961)*, 198–204. Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall.

Предметный указатель

А

acies, 73, 75
angulus solidus, 73, 75

Н

Hauptvermutung, 185, 267
hedra, 38, 73, 75

А

Адамар Жак Саломон, 124
Александров Павел, 268
Альтернирующий узел, 201, 204, 206
Американское математическое общество, 149, 165
Андерсон Гэри, 169
Анна Иоанновна, 28, 29
Аполлоний, 42, 60
Апель Кеннет, 20, 149
Араго Франсуа, 29
Аристотель, 53, 61, 67
Архимед, 13, 22, 42, 59, 187
Архимедовы тела. См.
полуправильные многогранники
Афганские ленты, 170, 183

Б

Базельский университет, 24, 27
Бакминстерфуллерен, 19, 86
Бальцер Ричард, 140
Барбари Якопо де, 61
Барбаро Даниэле, 61
Барр Стивен, 170, 288
Берлинская академия наук, 26, 30, 33
Берлинский университет, 189
Бернулли Даниил, 27, 28
Бернулли Иоганн, 24, 27
Бернулли Николай, 27
Бернулли Якоб, 24
Бертолле Клод Луи, 119

Бетти группа, 268
Бетти число, 257, 260, 271
Бетти Энрико, 255, 259, 260, 263
Биллингсли Генри, 38
Биркгоф Джордж Д., 148
Бляшке Вильгельм, 245
Бойер Карл, 37
Бойль Роберт, 53
Болл, У. У. Роуз, 110
Большая окружность, 96, 100, 233
Большой додекаэдр, 156
Большой звездный додекаэдр, 67, 156
Большой икосаэдр, 156
Бонне Пьер Оссиан, 244, 268
Браге Тихо, 67
Брауэра теорема о неподвижной точке, 223, 289
Брауэр Лёйтзен Эгберт Ян, 216, 219, 251, 268
Бреслау университет, 220
Бриггс Генри, 100
Брюссельская капуста, 134
Бутылка Клейна, 263
Бэркерт Уолтер, 47

В

Вандермонд Александр-Теофиль, 194
Вебер Вильгельм Эдуард, 189
Веблен Освальд, 148, 164
Векторное поле, 210, 219, 220
 градиентное, 211
Вольтер, 30
Выпуклость, 40, 44, 57, 81, 103, 105, 120, 152, 156, 226, 230, 251
Вюрцбургский университет, 159

Г

Галилей Галилео, 66
Галле университет, 140

Гамильтон Ричард, 273
 Гамильтон Уильям Роуэн, 139
 Гарднер Мартин, 133, 140, 141
 Гатри Фредерик, 139
 Гатри Фрэнсис, 139
 Гаттеньо Калев, 131
 Гаусса–Бонне теорема, 225
 глобальная, 245
 локальная, 244
 Гаусс Карл Фридрих, 22, 37, 140, 159,
 188, 195, 239, 243, 253
 Геккель Эрнст, 44
 Гелиоцентрическая модель, 64
 Геодезическая кривая, 233
 Геодезический купол, 16, 19, 87
 Геодезический многоугольник, 97,
 100, 163, 233, 241
 Геоцентрическая модель, 64
 Гессель Иоганн Фридрих
 Кристиан, 153, 180, 186, 250
 Гёттингенский университет, 140, 159,
 188, 240, 256, 267
 Гзелль Катарина, 28
 Гзелль Саломее-Абигайль, 35
 Гильберт Давид, 267, 273
 Гольдбах Христиан, 13, 72, 75, 108
 Гомеоморфизм, 182, 186, 190
 Гомология, 259, 267, 271
 Граф, 16, 107, 120, 124, 125, 141, 164,
 288
 Граф смежности, 142, 147
 Группа гомологий, 268

Д

Д'Аламбер Жан, 33
 Двуугольник, 100
 де Карейль Фуше, 91
 Декарта формула, 225, 229, 231, 235
 Декарта–Эйлера формула. См. Эйлера
 формула для многогранников
 Декарт Рене, 13, 71, 89, 230, 268, 288
 Об элементах геометрических
 тел, 91, 230
 Рассуждение о методе, чтобы
 хорошо направлять свой разум
 и отыскивать истину в науках, 90

де Морган Огастес, 139
 Ден Макс Вильгельм, 191
 Дерево, 127
 Джованни да Верона фра, 62
 Дидро Дени, 33
 Дика поверхность, 192
 Дик Вальтер фон, 172, 245, 249
 Динамические системы, 16, 21, 210,
 223, 272
 Диофант, 60
 Диполь (ноль векторного поля), 212,
 215
 Диск, 165, 176, 185, 188, 191, 196, 203,
 213, 221, 223, 242, 254
 Дифференциальные уравнения, 23,
 119, 189, 210, 219
 Додекаэдр, 43, 47, 49, 53, 57, 66, 68, 85,
 265, 271
 Дьедонне Жан Александр Эжен, 219,
 258
 Дюрер Альбрехт, 61

Е

Евдокс, 56
 Евклид, 13, 42, 50, 55, 59, 83, 95, 130
 Екатерина I, 26
 Екатерина II, 23, 33
 Елизавета I, 29, 32

Ж

Жан Люилье Симон Антуан Жан, 153,
 159, 161, 177, 180, 186
 Жергонн Жозеф Диас, 120, 123, 154,
 159
 Жирар Альбер, 97, 100, 233
 Жонкьер Эрнест де, 92, 152
 Жордана теорема, 173, 177, 237
 Жордан Мари Энмон Камиль, 124, 190

З

Закон взаимности квадратичных
 вычетов, 240
 Звездный многогранник.
 См. Кеплера–Пуансо многогранник
 Зейферта окружность, 198
 Зейферта поверхность, 197

Зейферт Герберт, 197
 Зенон, 42
 Золотое сечение, 50

И

Изотопия, 181, 194, 203
 Икосаэдр, 38, 43, 45, 47, 50, 53, 66, 68, 85, 265
 Инвариант узла, 195, 200, 204
 Индекс (нуля векторного поля), 213, 219, 221
 Индикатриса, 172
 Институт математики Клэя, 20, 273, 275
 Источник (ноль векторного поля), 212, 215

К

Калифорнийский университет, 272
 Канзасский университет, 164
 Кант Иммануил, 108
 Каролиnum колледж, 240
 Касательный вектор, 228, 237
 Кауфман Луисо, 205
 Кемпе Альфред Брей, 145
 Кемпе цепочка, 146, 148
 Кёнигсбергские мосты, задача о, 108, 142, 163, 194, 258
 Кеплера гипотеза, 150
 Кеплера–Пуансо многогранники, 156
 Кеплер Иоганн, 13, 20, 43, 61, 62, 100, 105, 157, 265
 Кёрл Роберт, 18
 Кёстлер Артур, 33
 Кларк Артур «Стена мрака», 169
 Классификация поверхностей, 188, 190, 194, 251, 260, 270
 Клейна бутылка, 174, 179, 185, 188, 215, 247, 250, 256, 262, 277
 Клейн Феликс, 166, 168, 171, 267
 Клерселье Клод, 91
 Кокстер Гарольд Скотт
 Макдональд, 140, 148
 Компактная поверхность, 166, 185
 Конвей Джон Хортон, 133, 275
 доказательство ZIP, 191

Кондорсе де маркиз, 36
 Коннелли Роберт, 59
 Коперник Николай, 64
 Кох Джон, 149
 Коши Огюстен Луи, 59, 118, 127, 152, 158, 251, 264
 Коши теорема о жесткости многогранников, 59
 Коэффициент зацепления, 262, 267
 Край. См. Поверхность с краем;
 Многообразие с краем
 Кривизна
 гауссова, 239, 241
 главная, 239, 241, 243
 плоской кривой, 237
 Кристина, королева Швеции, 91
 Крото Харольд, 18
 Кроуэлл Ричард Генри, 202
 Куб, 14, 38, 47, 51, 57, 65, 66, 69, 73, 83, 85, 92, 123, 160, 230
 Кун Томас, 92
 Куратовского–Понтрягина теорема, 130
 Кэли Артур, 124, 139, 145, 163
 Кэрролл Льюис, 137

Л

Лагранж Жозеф-Луи, 33, 119, 247
 Лакатос Имре, 121, 155, 288
 Лаплас Пьер-Симон, 118
 Лебег Анри, 81, 93, 148
 Лежандр Адриен-Мари, 74, 76, 95, 103, 152, 156
 Лейбниц Готфрид, 26, 91, 99, 109, 119
 Лейпцигский университет, 140
 Лента, 198, 203
 Леонард К. К. фон, 155
 Леонардо да Винчи, 61, 63
 Лефшец Соломон, 164, 220
 Листинг Иоганн Бенедикт, 114, 124, 164, 171, 195, 252
 Литтл Чарльз Ньютон, 195
 Лондонское королевское общество, 26, 33, 95, 146
 Лондонское математическое общество, 139

М

Малый звездный додекаэдр, 67, 157
 Маринони Джованни, 109
 Математическая ассоциация
 Америки, 149
 Математический анализ, 26, 37, 62,
 119, 238
 Математический планшет, 131
 Мёбиус Август, 140, 171, 182, 190, 252
 Мёбиуса лента, 15, 169, 174, 176, 177,
 183, 191, 255, 277
 Менелай Александрийский, 97
 Минимальный злодей, 144, 147
 Многообразие, 220, 248, 256, 263, 271
 с краем, 249, 264
 Мурасуги Кунио, 202, 205
 Мэй Кеннетт О., 138

Н

Неизбежное множество, 148, 151
 Неориентируемость, 172, 184, 187, 191,
 197, 249, 255, 261, 266
 Неподвижная точка, 211, 223
 Нётер Эмми Амалия, 267
 Нормальный вектор, 173, 237, 241
 Нуль векторного поля, 211, 219, 221
 Ньютон Исаак, 22, 26, 67, 119

О

Односвязность, 260, 271, 273
 Односторонняя поверхность, 171, 197
 Октаэдр, 43, 47, 51, 57, 66, 68, 83, 85,
 234, 251
 Ориентируемость, 176, 184, 188, 197,
 245, 249, 256, 261, 265, 270

П

Папп, 60
 Патерсон Майкл, 133
 Пачоли Лука, 61
 Пентаграмма, 49, 157
 Пентакисдодекаэдр, 63
 Перельман Григорий, 20, 273
 Петр I Великий, 23, 24, 29, 33
 Петр II, 27

Петр III, 33
 Пизанский университет, 256
 Пика теорема, 131
 Пик Георг Александр, 131
 Пирамида, 38, 45, 51, 76, 122, 264
 Пифагор, 13, 42, 47, 49, 56, 61
 Пифагора теорема, 20, 131
 Пифагорейцы, 47, 50, 157
 Платон, 13, 20, 42, 51, 53, 61, 67
 Академия, 52
 Платоновы тела. См. Правильный
 многогранник
 Плоский угол, 57, 72, 92, 231
 Поверхность, 16, 165, 173, 179, 197,
 211, 215, 216, 221, 233, 238, 241, 246,
 255, 259, 270
 с краем, 166
 Пойя Дьёрдь, 226
 Политехническая школа, 119
 Полный граф, 128, 141
 Полный двудольный граф, 128
 Полуправильные многогранники, 59,
 67, 187
 Понт Жан-Клод, 154
 Поток, 210, 215, 223
 градиентный, 212
 Правильный многогранник, 20, 42, 54,
 57, 61, 65, 67, 83, 158
 двойственность, 69, 265
 Приводимая конфигурация, 148
 Принстонский университет, 164, 220
 Проблема пяти принцев, 140
 Проективная плоскость, 175, 178, 187,
 188, 247, 256, 262, 263, 277
 Прокл, 56
 Простая замкнутая кривая, 173, 177,
 225, 227, 237, 244
 Простой граф, 142
 Простой узел, 201, 203, 205
 Псевдосфера, 241
 Птолемей, 60
 Пуанкаре, 162, 165, 218, 246, 249, 258,
 268, 271
 Analysis Situs, 258, 259, 265
 Пуанкаре гипотеза, 20, 270
 Пуанкаре двойственность, 265

Пуанкаре Раймон, 218
 Пуанкаре–Хопфа теорема, 212, 215, 221
 Пуансо Луи, 105, 152, 156, 159
 Пункаре додекаэдрическое пространство, 271

Р

Равновесное состояние, 210
 Радиоляррии, 44
 Раскрашиваемость узла, 204, 207
 Раскрашивание карты, 18
 Рассада, 133
 Рафаэль, 61
 Римана гипотеза, 272
 Риман Георг Фридрих Бернхард, 188, 249, 253, 255, 263
 Риманова поверхность, 190
 Род
 поверхности, 177, 188, 191, 200, 245, 256
 узла, 200
 Ручка, 176, 186, 191, 251
 Рэйли Уолтер, 99

С

Санкт-Петербургская академия наук, 26, 27, 34, 110
 Седло (на поверхности), 212, 233, 242
 Седло (ноль векторного поля), 212
 Симплекс, 249, 264, 267
 Симплициальный комплекс, 249, 263, 267
 Скращенный колпак, 178, 187, 191, 247, 251, 263
 Смейл Стивен, 272
 Смолли Ричард, 18
 Сократ, 51, 61
 Сомервилль Д. М. Я., 152
 Составной узел, 203
 Стереоизомеры, 58
 Сток (ноль векторного поля), 212
 Сфера, 15, 70, 87, 96, 124, 163, 176, 184, 198, 211, 215, 219, 231, 241, 249, 260, 263
 n -мерная (S^n), 219, 252, 271

Т

Такер Альберт, 165
 Теорема
 об инвариантности размерности, 251
 об угловом избытке, 225, 229, 235, 244
 о вращающихся касательных, 228, 238
 о причесывании ежа, 17, 216, 221
 о пяти красках, 147
 о пяти соседях, 143, 147
 о сумме внешних углов, 226, 231, 238
 о сумме внутренних углов, 227, 231, 233
 о четырех красках, 18, 139, 151, 288
 о шести красках, 144
 Теркем Орли, 115
 Тёрстона гипотеза геометризации, 273, 289
 Тёрстон Уильям, 221, 273
 Тетраэдр, 38, 42, 47, 57, 66, 68, 76, 83, 85, 230
 Теэтет, 13, 50, 55, 60, 94, 158, 187
 Тистлетвейт Морвен, 205
 Томсон Уильям, 195
 вихревая модель атома, 195, 207
 Топологический инвариант, 16, 183, 196, 231, 245, 246, 251, 255, 263
 Тор, 15, 16, 155, 165, 174, 176, 185, 186, 188, 192, 212, 215, 217, 242, 245, 249, 250, 254, 256, 260, 263, 265
 3-мерный, 250
 двойной, 168, 176, 181, 188, 215, 216, 256, 261, 263, 265, 271
 с g дырками, 176, 188, 191, 198, 225, 263, 265
 Триангуляция, 191, 267
 Тэйт Питер Гатри, 164, 195, 205, 254

У

Уайлс Эндрю, 20, 275
 Угловой избыток
 геодезический многоугольник, 234, 241

многогранник, 229, 234, 235
 Угловой недостаток
 геодезический многоугольник, 234, 241
 многогранник, 229, 231, 234
 Узел, 16, 207
 бабушкин, 202
 восьмерка, 193, 200, 206, 207
 квадратный, 193, 207
 печать Соломона, 193, 207
 пряничный человек, 193, 207
 тривиальный, 193, 201, 207
 трилистник, 193, 197, 207
 Уитни зонтик, 178
 Уитни теорема о вложении, 251
 Уитни Хасслер, 148, 178, 250
 Уотерхаус Уильям, 45, 51, 94
 Усеченный икосаэдр, 14, 38, 63
 Уччелло Паоло, 61, 64, 156

Ф

Фазовое пространство, 210
 Фалес, 42
 Феодор, 51
 Фердинанд Карл Вильгельм, герцог
 брауншвейгский, 240
 Ферма великая теорема, 20, 272
 Ферма Пьер де, 20, 90
 Фибоначчи последовательность
 чисел, 20
 Филдсовская премия, 270
 Формула корней квадратного
 уравнения, 20
 Французская академия наук, 24, 26,
 33, 95, 119, 218
 Франческа Пьеро делла, 61
 Фридман Майкл, 273
 Фридрих II Великий, король
 Пруссии, 23, 30
 Фройденталь Ганс, 119
 Фуллер Бакминстер, 19
 Фуллерен, 18, 86

Х

Хакен Вольфганг, 20, 149

Харди Годфри Харольд, 35, 129
 Хеегард Поул, 191
 Хейлс Томас К., 150
 Хивуд Перси Джон, 145
 Хирхольцер Карл, 112
 Хоппе Р., 161
 Хопф Хайнц, 219, 228
 Хэрриота–Жирара теорема, 98, 102,
 233
 Хэрриот Томас, 97, 233

Ц

Центр (ноль векторного поля), 212,
 215
 Цикл, 260, 267
 Цилиндр, 165, 174, 182, 188, 191, 241,
 254, 277

Ч

Чарторыйский Адам князь, 153
 Четыре первичных элемента, 52, 67
 Число пересечений, 204
 Число связности, 255, 259, 262

Ш

Шаню Гектор–Пьер, 91
 Шлефли Людвиг, 175, 251, 264
 Штайнер Якоб, 159
 Штайниц Эрнст, 123
 Штаудт Карл Георг Кристиан фон, 159

Э

Эйлера–Пуанкаре
 характеристика, 264, 271
 Эйлера формула для многогранников,
 13, 16, 37, 39, 83, 87, 92, 102, 118, 120,
 135, 143, 152, 158, 163, 246, 251, 254,
 274, 288
 Эйлер Леонард, 13, 22, 37, 40, 59, 71,
 89, 92, 107, 113, 118, 122, 152, 159, 187,
 218, 231, 239, 287
*Demonstratio nonnullarum insignium
 proprietary quibus solida hedris
 planis inclusa sunt praedita, 75*

Elementa doctrinae solidorum, 75
Эйлера характеристика, 16, 184,
185, 191, 194, 200, 208, 215, 223, 231,
245, 252, 256, 264, 270
Эйлеров многогранник, 153, 155, 159,
180
Эйлеров обход, 111
Эйлеров цикл, 111
Эйлер Пауль, 23

Эйнштейн Альберт, 208
Элер Карл, 108
Эмпедокл, 52
Эрдёш Пауль, 151
Эрлангенский университет, 159, 267
Эшер Мауриц Корнелис, 169

Я

Ямницер Венцель, 61, 64, 156

Книги издательства «ДМК ПРЕСС»
можно купить оптом и в розницу
в книоторговой компании «Галактика»
(представляет интересы издательств
«ДМК ПРЕСС», «СОЛОН ПРЕСС», «КТК Галактика»).

Адрес: г. Москва, пр. Андропова, 38;
тел.: (499) 782-38-89, электронная почта: books@aliants-kniga.ru.

При оформлении заказа следует указать адрес (полностью),
по которому должны быть высланы книги;
фамилию, имя и отчество получателя.

Желательно также указать свой телефон и электронный адрес.
Эти книги вы можете заказать и в интернет-магазине: www.a-planet.ru.

Дэвид С. Ричесон

Жемчужина Эйлера

Главный редактор *Мовчан Д. А.*
dmkpress@gmail.com

Перевод *Слинкин А. А.*

Корректор *Синяева Г. И.*

Верстка *Чаннова А. А.*

Дизайн обложки *Мовчан А. Г.*

Формат 70×90 1/16.

Гарнитура PT Serif. Печать офсетная.

Усл. печ. л. 23,4. Тираж 200 экз.

Отпечатано в ООО «Принт-М»
142300, Московская обл., Чехов, ул. Полиграфистов, 1

Веб-сайт издательства: www.dmkpress.com