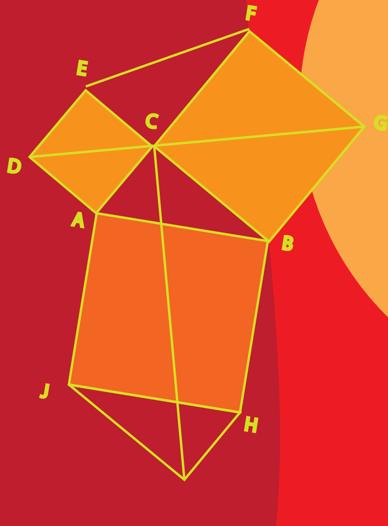
Стивен Кранц

Изменчивая природа математического доказательства

ДОКАЗАТЬ НЕЛЬЗЯ ПОВЕРИТЬ



Лаборатория ЗНАНИЙ

Кранц. Изменчивая природа

Вы смогли скачать эту книгу бесплатно и легально благодаря проекту ***«Дигитека»***. Дигитека — это цифровая коллекция лучших научно-популярных книг по самым важным темам — о том, как устроены мы сами и окружающий нас мир. Дигитека создается командой научно-просветительской программы «Всенаука». Чтобы сделать умные книги бесплатными, достойно вознаградив авторов и издателей, Всенаука организовала всенародный сбор средств.

Мы от всего сердца благодарим всех, кто помог освободить лучшие научно-популярные книги из оков рынка! Наша особая благодарность — тем, кто сделал самые значительные пожертвования (имена указаны в порядке поступления вкладов):

Дмитрий Зимин
Екатерина Васильева
Зинаида Стаина
Григорий Сапунов
Иван Пономарев
Анастасия Азбель
Николай Кочкин
Алексей Чмутов
Роман Кишаев
Сергей Вязьмин
Сергей Попов
Алина Федосова
Алексей Озоль
Роберт Имангулов
Алексей Волков
Александр Мусаев
Денис Бесков
Руслан Кундельский

Иван Брушлинский
Роман Гольд
Евгений Шевелев
Руслан Додыханов
Максим Кузьмич

Мы также от имени всех читателей благодарим за финансовую и организационную помощь:

Негосударственный институт развития «Иннопрактика»

Российскую государственную библиотеку

Компанию «Яндекс»

Фонд поддержки культурных и образовательных проектов «Русский глобус».

ИЗМЕНЧИВАЯ ПРИРОДА МАТЕМАТИЧЕСКОГО ДОКАЗАТЕЛЬСТВА

Steven G. Krantz

The Proof is in the Pudding

The Changing Nature of Mathematicial Proof

Springer

Стивен Кранц

Изменчивая природа математического доказательства

Доказать нельзя поверить

3-е издание, электронное

Перевод с английского
Н. А. Шиховой

Москва
Лаборатория знаний
2020

УДК 51.1
ББК 22.1
К78

Кранц С.

К78 Изменчивая природа математического доказательства. Доказать нельзя поверить / С. Кранц ; пер. с англ. Н. А. Шиховой. — 3-е изд., электрон. — М. : Лаборатория знаний, 2020. — 323 с. — Систем. требования: Adobe Reader XI ; экран 10". — Загл. с титул. экрана. — Текст : электронный.

ISBN 978-5-00101-896-4

Книга знакомит читателя с тем, как развивалось с течением времени понятие математического доказательства. Некоторые иллюстративные и интересные математические результаты приведены с доказательствами и поясняющими примерами. Рассмотрен вклад в историю доказательства многих великих математиков. Легкий и увлекательный стиль автора делает изложение доступным широкому кругу читателей.

Для преподавателей математики, студентов и всех интересующихся математическими науками.

УДК 51.1
ББК 22.1

Деривативное издание на основе печатного аналога: Изменчивая природа математического доказательства. Доказать нельзя поверить / С. Кранц ; пер. с англ. Н. А. Шиховой. — 2-е изд. — М. : Лаборатория знаний, 2017. — 320 с. : ил. — ISBN 978-5-00101-064-7.

16+

ISBN 978-5-00101-896-4

Посвящается Джерри Лайонсу,
учителю и другу

ПРЕДИСЛОВИЕ

Название этой книги не совсем уж легкомысленное[1]. Я так и слышу упреки, что правильно говорить «The proof of the pudding is in the eating», что нет никакого смысла во фразе «The proof is in the pudding». Однако так все говорят, и совершенно ясно, что при этом имеют в виду. Так же и с математическим доказательством. *Доказательство* в математике — психологический инструмент, предназначенный для убеждения некоего лица или аудитории в том, что некоторое математическое утверждение истинно. Структуру и язык для построения такого доказательства выбирает его автор, но оно должно быть скроено по меркам той аудитории, которая будет его воспринимать и оценивать. Поэтому не бывает «единственного» или «правильного», или «наилучшего» доказательства какого бы то ни было результата. Доказательство — часть ситуациональной этики: ситуации меняются, математические ценности и стандарты развиваются и эволюционируют, и именно таким изменчивым путем математика меняется и растет.

Эта книга об изменчивой и растущей природе математического доказательства. В ранней математике «истины» устанавливались эвристически и эмпирически. Основное внимание уделялось вычислениям. Почти не было теории, никакого формализма, и очень мало математических обозначений в том виде, как мы сейчас их понимаем. Поэтому те, кто желали изучить какие-либо математические вопросы, оказывались в невыгодном положении — им было сложно выражать свои мысли. Особенно сложно было формулировать общие утверждения о математических идеях. Практически невозможно было формулировать теоремы и доказывать их.

Хотя есть некоторые намеки на доказательства даже в табличках древнего Вавилона (таких как Плимптон 322) за 1800 до н. э., понятие доказательства возникло, видимо, только в Древней Греции. Самые ранние математические таблички содержали числа и элементарные вычисления. Из-за скудости текстов, дошедших до наших дней, мы не знаем, как это случилось, как кому-то пришло в голову, что некоторые из математических

[1] Оригинальное название книги «The proof is in the pudding» на русский язык можно перевести как «Доказательство в пудинге». Эта фраза получила популярность от другой: «The proof of the pudding is in the eating», т. е. «Чтобы распробовать пудинг, надо его съесть». Похоже, что автор афоризма неизвестен. Его использовали в качестве перевода похожего выражения на испанском языке: «al freír de los huevos lo verá» («увидишь, когда изжаришь яичницу»), автор этой фразы — Мигель Сервантес. — *Прим. перев.*

процедур требуют *логического обоснования*. И мы действительно не представляем, как возникло формальное понятие доказательства. «Республика» Платона уже содержит явное его описание. В «Физике» Аристотеля не просто обсуждаются доказательства, но изучаются тонкие различия в их методах. Многие древние греки, включая Евдокса, Теэтета, Фалеса, Евклида и Пифагора, либо использовали доказательства, либо ссылались на них. Протагор был софистом, работы которого признавал сам Платон. Его «Антилогии» были искусно сплетенными строгими рассуждениями, которые можно считать ростками доказательств.

Считается, что Евклид был первым, кто систематически использовал точные определения, аксиомы, строгие правила логики, чтобы сформулировать и *доказать* каждое утверждение (т. е. каждую теорему). Формализм Евклида, как и его методология, стал образцом — и даже для наших современников — для установления математических фактов.

Интересно, что математическая формулировка факта — это самостоятельная сущность, обладающая собственной ценностью и значимостью. А доказательство — это средство общения. Создатель или первооткрыватель нового математического результата хочет, чтобы другие тоже его приняли и в него поверили. В естественных науках (химии, биологии или физике, например) для этого используется специальный метод — *воспроизводимый эксперимент*[1]. Для математика воспроизводимый эксперимент — это доказательство, которое может прочесть, понять и оценить другой человек.

Идея доказательства возникает в разных жизненных ситуациях, не только в математике. В суде юрист (адвокат или прокурор) должен установить истину с помощью принятых версий доказательств. Для криминального дела это означает «вне разумных сомнений», а для гражданского — что доводы одной стороны должны перевешивать доводы другой. К математическим доказательствам такое представление не приближается ни на йоту. В реальном окружающем нас мире нет формальных определений или аксиом; нет смысла устанавливать факты путем строгих интерпретаций. Адвокат использует, конечно же, логику. Скажем, «обвиняемый слеп и поэтому не мог вести машину в Каньон Топанга ночью 23 марта» или «обвиняемый неграмотен и поэтому не мог построить атомную бомбу, которая использовалась с целью…». Но главное орудие адвоката, конечно же, не логика, а *факты*. Адвокат приводит

[1]Точнее, воспроизводимый эксперимент *с контролем*, поскольку аккуратный ученый сравнивает результаты своих экспериментов с некоторым стандартом или нормой. Это позволяет оценить результаты.

доводы, не допускающие разумных сомнений, собирая доказательства с решительным перевесом в пользу своего клиента.

В то же время в обычной, в повседневной речи тоже есть понятие доказательства, и оно тоже отличается от математического. Муж может сказать «Думаю, моя жена беременна», в то время как жена может это *знать наверняка*. Беременность — это не вневременный непреложный факт (вроде теоремы Пифагора), а факт «временный», который нарушится через несколько месяцев. Так что в этом контексте понятие истины отличается от того, что используется в математике, и методы проверки истинности тоже. В действительности здесь проявляется различие между знанием и уверенностью, которая никогда не играет формальной роли в математике.

В современном обществе «доказательств» для предъявления штрафа за превышение скорости нужно гораздо меньше, чем для обвинения в убийстве. Похоже, что еще меньше доказательств требуется для оправдания военных действий[1)]. Широкая панорама мнений о современном понятии доказательства — в самых разных контекстах — представлена в [NCBI]. Говорят (см. [MCI]), что в некоторых областях математики (таких как топология малой размерности) доказательство можно пересказать на языке жестов.

Французский математик Жан Лере (1906–1998) так пишет о системе ценностей в современной математике.

> …разные области математики нераздельны как части живого организма; как живой организм, математика должна постоянно создаваться заново; каждое поколение должно перестроить ее вновь — шире, больше и прекраснее прежней. Смерть математических исследований стала бы концом математического мышления, которое составляет структуру научного языка, и таким образом, концом нашей научной цивилизации. Поэтому мы должны передать нашим детям силу характера, моральные ценности и стремление к полной жизни.

Лере говорит нам, что математические идеи хорошо приживаются на новых местах и хорошо переносят проверку временем, потому что у нас есть такой строгий и проверенный стандарт для формулирования и записи идей. Это великая традиция, она стоит того, чтобы ее сохраняли.

В доказательстве есть и человеческий фактор, который нельзя игнорировать. Принятие новой математической истины — это социологический процесс. Это что-то, что происходит в математическом сообществе. Оно включает понимание, усваивание, обдумывание и обсуждение. Самые

[1)]Эти идеи раскрываются в [SWD]. К этой же теме относятся захватывающие статьи [ASC], [MCI]. Целый выпуск журнала Philosophical Transactions of the Royal Society, осень 2005 г., посвящен статьям такого рода. Все они были написаны в связи с конференцией в Британии, где стояли вопросы вроде тех, что обсуждаются в этой книге. См. также [PTRS].

выдающиеся математики иногда ошибаются и объявляют новые результаты, а потом выясняется, что *неизвестно*, как их доказать. В 1879 г. А. Кемпе опубликовал доказательство теоремы о четырех красках, и оно продержалось целых 11 лет, пока П. Хивуд не нашел фатальную ошибку в работе. Первая совместная работа Харди и Литтлвуда была заявлена на заседании Лондонского математического общества в июне 1911 г. Но она никогда не была опубликована, поскольку позднее они обнаружили ошибку в доказательстве. Коши, Ламе и Куммер — каждый из них в тот или иной момент своей карьеры полагал, что доказал Великую теорему Ферма. И каждый из них ошибался. Радемахер в 1945 г. думал, что опроверг гипотезу Римана. Его работа была даже опубликована в Time Magazine. Позднее Радемахеру пришлось отозвать свое утверждение, поскольку Зигель нашел ошибку. В этой книге мы изучаем социальную базу математических дисциплин, разбираемся, как во взаимодействии разных математиков и разных математических культур творится форма нашей науки. Математические ошибки исправляются, причем не формальной логикой, а другими математиками. Это один из краеугольных камней нашей науки[1)].

В самом начале XX в. Брауэр дал революционное доказательство своей теоремы о неподвижной точке, а спустя некоторое время решительно отрекся от доказательств от противного (по крайней мере в отношении доказательств существования, а результат о неподвижной точке был именно таким) и создал движение интуиционизма. Позднее эту программу поддержал Эррет Бишоп, и его работа Foundations of Constructive Analysis, написанная в 1967 г., была довольно заметной (переработанное издание, написанное в соавторстве с Дугласом Бриджесом, опубликовано в 1985 г.). Эти идеи представляют особенный интерес для специалистов в теории компьютерных наук, ведь значимость доказательств от противного в компьютерных науках небесспорна (несмотря даже на то, что в свое время Алан Тьюринг расшифровал код Энигмы, применив как раз идеи доказательства от противного в контексте вычислительных машин).

В последние тридцать лет или около того стало ясно, что мы переосмыслили и решительно расширили наше представление о доказательстве. В этом явлении важную динамичную роль сыграли компьютеры. Они могут делать сотни миллионов операций в секунду. Это открывает возможности для экспериментирования, вычисления и визуализации таких

[1)]Математики делают ошибки на каждом шагу. Почти всякая опубликованная статья по математике содержит ошибки. В книге [LEC] задокументировано много важных ошибок в математической литературе до 1935 г.

вещей, что были немыслимы полвека назад. Следует иметь в виду, что математическое мышление включает овладение понятиями и рассуждениями, в то время как компьютер — просто средство для манипулирования данными, это совершенно разные вещи. Непохоже (см. блестящую книгу Роджера Пенроуза «Новый ум короля»), что когда-либо компьютер сможет думать и доказывать математические теоремы так, как это делает человек. Тем не менее компьютер может предоставить ценную информацию и натолкнуть на идею. Он может изобразить для пользователя вещи, которые тот раньше представить себе не мог. Это ценный инструмент. В нашей книге мы уделим много места изучению роли компьютеров в современной человеческой мысли.

Размышляя о роли компьютеров в математике, уместно напомнить известную историю. Тихо Браге (1546–1601) был одним из величайших астрономов Возрождения. Он разработал научную процедуру, которая позволила ему создать обширную базу данных о движении планет. Его даровитый ученик Иоганн Кеплер (1571–1630) страстно желал получить доступ к этим данным, поскольку у него были идеи о том, как сформулировать математические законы, описывающие движение планет. И Браге, и Кеплер были целеустремленными людьми, однако их взгляды на очень многие вещи разнились. Браге опасался, что Кеплер воспользуется данными, чтобы подтвердить теорию Коперника о Солнечной системе (а именно, что в центре системы находится вовсе не Земля, а *Солнце*, — это представление противоречило христианской догме). Пока Браге был жив, Кеплер так и не получил доступа к его расчетам.

Однако в эту историю странным образом вмешалось провидение. Спонсор Тихо Браге передал ему остров, где тот построил обсерваторию и работал в ней. Поэтому Браге приходилось выполнять некоторые социальные обязанности — выказывать свою признательность и сообщать о достижениях. На одном приеме Браге выпил так много пива, что его мочевой пузырь лопнул, и он умер. Кеплер вступил с семьей Браге в торг за данные, которые ему были так нужны. Течение научной истории изменилось навсегда.

Кеплер *не использовал* ни дедуктивное мышление или рассуждение, ни аксиоматический метод, ни стратегии математических доказательств для вывода своих трех законов движения планет. Он просто всматривался в сотни страниц данных Браге о планетах и считал, считал, считал…

Примерно в то же время свою теорию логарифмов разрабатывал Джон Непер (1550–1617). Это замечательный инструмент вычислений, он мог бы резко упростить задачу Кеплера. Но тот не мог понять смысла логарифмов и отказался от них. Он не шел простым путем. Только вообразите себе, что мог бы сделать Кеплер, будь у него компьютер! Правда, он мог бы и от компьютера отказаться просто оттого, что не понял принципа работы процессора.

Мы говорим здесь о Кеплере и Непере потому, что эта история предвосхитила современные споры об использовании компьютеров в математике. Одни утверждают, что компьютер позволяет нам видеть (вычислительно и визуально) вещи, которых мы раньше не могли представить. А другие считают, что все эти вычисления, конечно, очень хороши и полезны, но не составляют математического доказательства. Похоже, что первые смогут снабдить вторых информацией, и так возникнет симбиоз, приводящий к серьезным результатам. Мы обсудим эти соображения в книге.

Давайте вернемся к изменениям, которые произошли в математике за последние тридцать лет и были отчасти обусловлены пришествием высокоскоростных компьютеров. Вот матрикул некоторых компонентов этого процесса.

- В 1974 г. Аппель и Хакен [APH1] объявили, что задача о четырех красках решена. Иначе говоря, получен ответ на вопрос о том, сколько нужно красок, чтобы раскрасить любую карту так, что соседние страны получаются разных цветов. Построенное доказательство потребовало 1200 часов работы суперкомпьютера в университете Иллинойса. Математическое общество было в замешательстве, ведь такое «доказательство» никто не мог изучить или проверить. Или хотя бы понять. До сих пор не существует доказательства теоремы о четырех красках, которое может быть изучено и проверено человеком.
- Со временем люди все более и более свыклись с использованием компьютеров в доказательствах. В первые дни своего существования теория вейвлетов (к примеру) зависела от оценок некоторых постоянных, а их можно было получить только с помощью компьютера. Оригинальное доказательство де Бранжа гипотезы Бибербаха [DEB2] опиралось на результат теории специальных функций, который тоже можно было проверить только на компьютере (позднее обнаружилось, что это результат Аски и Гаспера, который доказан традиционно).
- Развитие новых обучающих средств, таких как программное обеспечение The Geometer's Sketchpad, многих, включая Филдсовского медалиста Уильяма Тёрстона, навело на мысль, что традиционные доказательства могут уступить дорогу экспериментированию, т. е. проверке тысяч или миллионов частных случаев на компьютере.

Так что приход компьютеров действительно изменил наш взгляд на то, что можно считать доказательством. Ведь смысл в том, чтобы убедить другого человека в том, что какое-то утверждение истинно. Очевидно, есть много разных способов сделать это.

Еще интереснее, возможно, некоторые новые социальные тренды в математике, приводящие к построению нестандартных доказательств (мы подробно обсудим их позднее).

- Одним из грандиозных предприятий математики XX в. стала классификация конечных простых групп. Даниэль Горенштейн из Ратгерского университета дирижировал этим процессом. Сейчас считается, что эта задача решена. Замечательно здесь то, что одна теорема потребовала усилий многих сотен ученых. «Доказательство» здесь — собрание сотен статей и работ, охватывающих период более 150 лет. Сейчас оно включает более 10 000 страниц, и его до сих пор подчищают и упорядочивают. Окончательная «запись доказательства» займет несколько томов, и нет никакой уверенности в том, что работающие сейчас эксперты проживут достаточно долго, чтобы увидеть результат своих усилий.
- Решение Томаса Хейлса задачи Кеплера об упаковке сфер во многом (как и решение задачи о четырех красках) опирается на компьютерные вычисления. Особенно интересно, что его доказательство вытеснило более раннее доказательство Ву Йи Хсианга, опирающееся на сферическую тригонометрию, *а не на компьютерные вычисления*. Хейлс допускает, что его «доказательство» нельзя проверить традиционным путем. Он организовал группу FlySpeck энтузиастов со всего света, чтобы построить процедуру проверки своих компьютерных аргументов.
- Про доказательство гипотезы Пуанкаре, построенное Григорием Перельманом, и про программу геометризации Тёрстона слышали все. В 2003 г. Перельман написал три статьи о том, как использовать теорию Ричарда Гамильтона о потоках Риччи, чтобы осуществить идею Тёрстона (она называется «программой геометризации») разбить трехмерное многообразие на части. У этого результата есть одно важное следствие — доказательство знаменитой гипотезы Пуанкаре. Хотя статьи Перельмана не совсем строгие и исчерпывающие, они исполнены воображения и глубоких геометрических идей. Эта работа подтолкнула бурную деятельность и спекуляции о том, как программу можно завершить и оценить. Джон Лотт и Брюс Кляйнер (из Мичиганского университета), Ганг Тиан (Принстон) и Джон Морган (Колумбия) предприняли огромные усилия, чтобы завершить программу Гамильтона—Перельмана, построить и записать настоящее доказательство, которое другие смогут изучить и проверить.

- Программа геометризации Тёрстона — это отдельная история. В начале 1980-х гг. он объявил, что получил результат о структуре трехмерных многообразий, по крайней мере, для некоторых важных подклассов многообразий, и знает, как его доказать. Классическая гипотеза Пуанкаре оказалась бы простым следствием из программы геометризации Тёрстона. Он написал множество работ [THU3] (объемом в целую книгу), а математический факультет Принстонского университета сделал их доступными по всему миру. Эти работы под общим названием The Geometry and Topology of Three-Manifolds [THU4] написаны увлекательно и захватывающе. Но написаны они довольно неформальным стилем, хотя содержат глубокую качественную математику. Их трудно понять и оценить.

Цель этой книги — изучить все идеи и направления, представленные выше. По дороге мы познакомим читателя с пластом культуры: кто такие математики, что их заботит и чем они занимаются. Мы расскажем, почему математика важна и почему так сильно влияет на сегодняшний мир. Мы надеемся, что читатель не только познакомится, но и будет очарован этой древней прославленной наукой и почувствует, как много еще предстоит узнать.

Декабрь, 2010

Стивен Кранц,
Сент-Луис, Миссури

БЛАГОДАРНОСТИ

Очень приятно быть вхожим в писательскую среду — всегда можешь получить толковые замечания и помощь от коллег. Я благодарен Джессу Алама, Давиду Бейли, Джону Блэнду, Джонатану Боруайну, Роберту Беркелю, Давиду Коллинзу, Брайану Дэйвису, Кейту Девлину, Эду Данну, Майклу Иствуду, Джерри Фолланду, Гопалкришне Гадияру, Джереми Грэю, Джеффу Лагариасу, Барри Мазуру, Роберту Стричарцу, Эрику Тресслеру, Джеймсу Уолкеру, Рассу Вудруфу и Дорону Цайлбергеру за то, что они внимательно прочитали черновой вариант моей книги и поделились своими знаниями и мудростью. Роберт Беркель и Давид Коллинз вычитали рукопись особенно тщательно и внесли много полезных идей и исправлений. Большое спасибо Эду Данну из Американского математического общества — он предложил тему книги и вдохновил меня на ее написание. И конечно же, я благодарю Сидни Харриса за любезное разрешение использовать его рисунки.

Анна Костант — редактор из издательства Birkhäuser/Springer — как всегда, была очень активна и помогала мне во всем. Это она предложила написать книгу для серии Copernicus, давала замечательные советы и поддерживала в ходе работы над книгой. Другой редактор, Эдвин Бешлер, помог мне отточить и оживить стиль. Давид Крамер — неизменно превосходный корректор. Я горжусь результатом нашей работы. И наконец, я благодарен Рэнди Руден за ее помощь и поддержку во время работы над книгой.

Глава 1

ЧТО ТАКОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО И С ЧЕМ ЕГО ЕДЯТ?

The proof of the pudding is in the eating.

— Мигель Сервантес

В математике нет настоящих противоречий.

— Карл Фридрих Гаусс

Логика — это искусство ошибаться, будучи уверенным в своей правоте.

— Джозеф Вудкратч

Чтобы проверить человека, доводы плывут.

— Роберт Браунинг

Ньютон был очень счастливым человеком, ведь Вселенная только одна, а он, Ньютон, смог открыть ее законы.

— Пьер-Симон Лаплас

Главной целью всех исследований внешнего мира должно быть открытие рационального порядка и гармонии, которые Бог ниспослал миру и поведал нам на языке математики.

— Иоганн Кеплер

Терьер может не суметь дать определение крысы, но узнает ее, когда увидит.

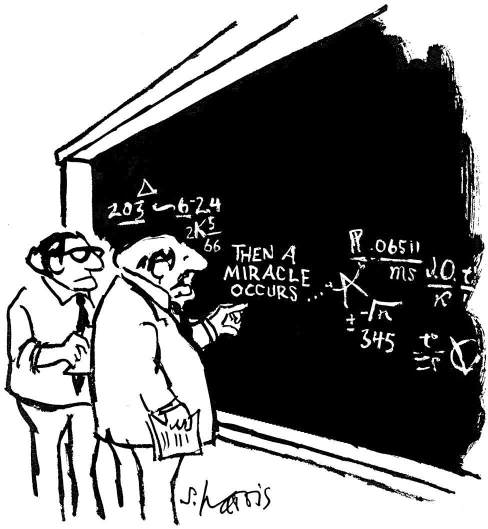
— А. Е. Хаусман

1.1 КТО ТАКОЙ МАТЕМАТИК?

Как-то раз я услыхал, как благонамеренная мамаша рассказывала своему малышу, что математик — это человек, который занимается «научной арифметикой». А есть люди, которые полагают, что математик — это тот, кто целыми днями не отрывается от компьютера.

Нельзя сказать, что такие представления совсем уж неверны, однако они даже близко не подходят к сути такого явления, как математик. Перефразируя слова математика и лингвиста Кита Девлина [DEV1], мы замечаем, что математик — это тот, кто

- наблюдает и интерпретирует явления;
- анализирует научные явления и информацию;
- формулирует концепции;
- обобщает концепции;
- проводит рассуждения по индукции;
- проводит рассуждения по аналогии;
- прибегает к методу проб и ошибок (и оценивает их);



"I THINK YOU SHOULD BE MORE EXPLICIT HERE IN STEP TWO."

Рис. 1.1. («Я думаю, шаг 2 нужно описать подробнее»
© Sidney Harris, www.sciencecartoonsplus.com)

- моделирует идеи и явления;
- формулирует задачи;
- абстрагируется от задач;
- решает задачи;
- пользуется вычислениями, чтобы делать аналитические выводы;
- делает дедуктивные выводы;
- строит догадки;
- доказывает теоремы.

И даже этот список неполон. Математик должен в совершенстве владеть критическим мышлением, анализом, дедуктивной логикой. Эти умения универсальны, они могут применяться в самых разных ситуациях и в самых разных областях знания. В наше время математические умения широко используются в медицине, физике, юриспруденции, коммерции, интернет-дизайне, техническом проектировании, химии, биологии, социальных науках, антропологии, генетике, производстве оружия, криптографии, пластической хирургии, анализе безопасности, обработке данных, компьютерных и многих других науках и практических приложениях.

Одно из поразительных и бурных приложений математики возникло всего каких-то двадцать лет назад — это финансовая математика. Работа Фишера Блэка из Гарварда и Мирона Сколеса из Станфорда привела к первому методу установления цены на опционы. Найденный метод базируется на теории стохастических интегралов — разделе абстрактной теории вероятностей. В результате во всем мире инвестиционные фирмы стали нанимать в штат докторов наук по математике. Когда на математических факультетах преподают курс теории меры — раньше его слушали исключительно для того, чтобы сдать экзамен на научную степень, — приходит удивительно много слушателей, в основном студенты экономико-финансовых специальностей.

Математика очень повлияла и на другую область современной науки, в которой работает значительное число математиков с очень высоким уровнем образования, — это генетика и проект «геном». Многие люди до сих пор не осознают, что спираль ДНК может включать миллиарды генов. Находить соответствия генетических маркеров — вовсе не то же самое, что искать пару для носка; приходится привлекать вероятностные соображения. Поэтому над проектом «геном» работает много математиков с ученой степенью.

В этой книге мы будем работать над понятием *математического доказательства*. Хотя большинство математиков проводят немного времени за доказательством теорем[1)], однако доказательство — это lingua franca математики. Это связующая нить, которая собирает все воедино. Именно доказательство вдыхает в математику жизнь и гарантирует бессмертие математическим идеям (см. [CEL], где понятие доказательства рассматривается с философской точки зрения).

Нет ни одной другой естественнонаучной или аналитической дисциплины, где доказательство использовалось бы с такой же готовностью и привычкой, как в математике. Это орудие делает теоретическую математику особенной: проложенная с тщанием дорога, которая следует строгим аналитическим правилам и неуклонно ведет к определенному выводу. Доказательство — это наше орудие для установления абсолютной и безупречной истинности математических утверждений. Именно поэтому мы можем опираться на математику Евклида, созданную 2300 лет назад, с той же готовностью, что и на современную. Ни в одной другой дисциплине это невозможно (хотя много интересного по этому вопросу можно найти в разд. 1.10).

[1)]Это объясняется тем, что очень много математиков работают не в университетах. Вместо этого они работают (например) в NSA (Агентство национальной безопасности) или NASA (Национальное управление по аэронавтике и исследованию космического пространства), или Hughes Aircraft, или Lawrence Berkeley Labs, или в Microsoft. Широко распространено мнение, что большинство специалистов в математических науках — ненастоящие математики, но так думают не все.

В нашей книге мы познакомим читателя с математиками и их занятиями, используя понятие «доказательства» как пробный камень. По пути мы познакомимся с причудами и характерными чертами некоторых математиков и их профессии в целом. Это захватывающее путешествие, сулящее много удовольствий и сюрпризов.

1.2 ПОНЯТИЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА

Мы начнем обсуждение с вдохновенной цитаты математика Майкла Атья (р. 1929) [ATI2]:

> Мы все знаем, что нам нравится в музыке, живописи или поэзии, а вот объяснить, почему нам это нравится, гораздо сложнее. То же самое относится и к математике, которую отчасти тоже можно назвать формой искусства. Можно составить длинный список желательных качеств: красота, изящество, важность, оригинальность, польза, глубина, широта, краткость, простота и ясность. Однако отдельно взятая работа вряд ли может сочетать их все; более того, некоторые из них несочетаемы. Как в сонатах, квартетах или симфониях приемлемы разные качества, точно так же и математические сочинения разных типов требуют разных подходов. Полезную аналогию представляет собой и архитектура. Собор, дворец или замок требуют совершенно разных выразительных средств, нежели офисное здание или жилой дом. Здание привлекает нас тем, что в нем соразмерно сочетаются качества, соответствующие его цели, но в конце концов наша эстетическая оценка инстинктивна и субъективна. Лучшие критики часто несогласны друг с другом.

Математика имеет длинную и славную историю. Наряду с философией она относится к старейшей точке приложения человеческого интеллектуального интереса. Человеческой природе присуще стремление понять

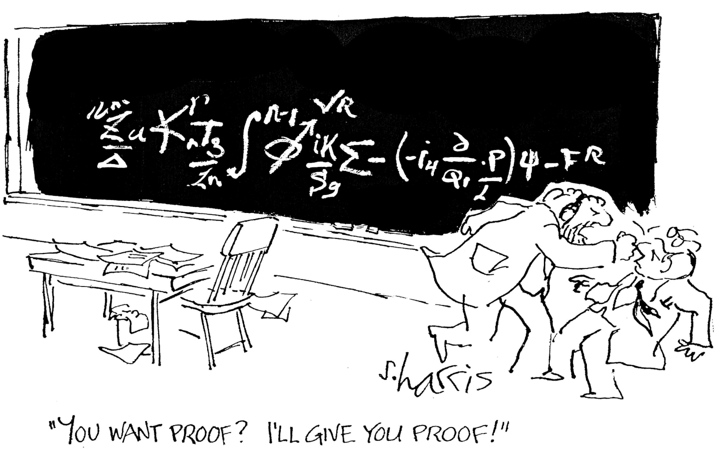


Рис. 1.2. («Вы хотите доказательство? Я Вам дам доказательство!» © Sidney Harris, www.sciencecartoonsplus.com)

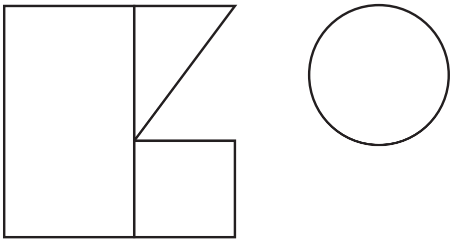


Рис. 1.3. Вопросы землемерия

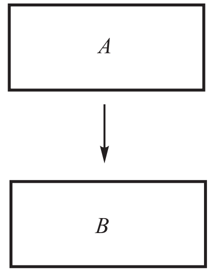


Рис. 1.4. Логический вывод

окружающий мир, и математика — естественный проводник на этом пути. Но для древних математика была прекрасна и ценна сама по себе; схоластическое стремление обладало внутренней ценностью и эстетической привлекательностью. Математику стоило изучать ради нее самой.

С самых первых дней математика была ограничена практическими вопросами. Египтян, как и греков, заботили вопросы землемерия (см. рис. 1.3). Естественным образом рождались геометрические и тригонометрические задачи. В них возникали треугольники и прямоугольники, так что ранние геометрии занимались этими объектами. Естественно было рассматривать и окружности — для проектирования арен, водных резервуаров и тому подобных объектов. Поэтому античная геометрии (и аксиомы Евклида для нее) имела дело с окружностями.

Ранняя математика была феноменологичной. Если можно было сделать разумное изображение, оно считалось достаточным подтверждением математического «факта». Иногда рассуждали по аналогии или призывали на помощь богов. Представление о том, что математическое утверждение может быть *доказано*, не было еще развитой идеей. Не было стандартов понятия доказательства. Аналитическая структура — «правила игры» — еще не была создана. Если бы один древний египтянин сказал другому: «Я не понимаю, почему это математическое утверждение верно. Пожалуйста, докажи его,» — такое требование было бы невозможно понять. Понятие доказательства не входило в активный словарь математиков того времени.

Итак, что же такое доказательство? Если подходить эвристически, доказательство — это такой инструмент риторики, который используется, чтобы один человек убедил другого, что некоторое математическое утверждение верно. А как это можно сделать? Поразмыслив, можно предположить, что естественный способ доказать, что что-то есть новое (назовем его B) — это как-то связать его с чем-то старым (назовем его A), про которое уже известно, что оно истинно. Таким образом, возникает понятие *вывода* нового результата из старого (см. рис. 1.4). И тогда возникает вопрос:

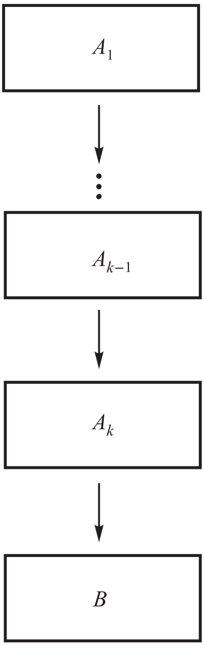


Рис. 1.5. Последовательность логических выводов

«Как была установлена истинность старого результата?» Если повторять эту процедуру, то мы придем к последовательности логических выводов, вроде изображенной на рис. 1.5. Неизбежно придется поинтересоваться, где же начало этой цепочки,—а это фундаментальный вопрос.

Мы не можем сказать, что у такого пути рассуждений нет начала, что он тянется бесконечно далеко к туманному началу времен. Ведь в таком случае становятся безосновательными наши размышления о том, каким следует быть доказательству. Мы пытаемся подтвердить новые математические факты, исходя из старых. А если вывод уходит бесконечно далеко в прошлое, мы не можем даже ухватить, на чем изначально обоснована наша логика.

Эти вопросы заставили античных математиков размышлять о природе математического доказательства. Фалес (640–546 до н. э.), Евдокс (408–355 до н. э.) и Теэтет Афинский (417–369 до н. э.) формулировали теоремы как формальные объявления некоторых идей, которые они хотели провозгласить как факты или истины. Считается, что Фалес доказал некоторые из этих теорем в геометрии (а позднее они были включены в более широкую систему Евклидом). *Теорема*—это формальное провозглашение математиком некоторого факта или истины. Но Евдоксу не удалось найти способ доказать свои теоремы. Его труды имели явный практический уклон, и он слишком увлекался вычислениями.

Впервые нынешний способ размышлять о математике был формализован Евклидом Александрийским. Вначале он дал определения, затем аксиомы, а потом уже теоремы—именно в таком порядке. Нельзя не согласиться, что Евклид создал парадигму, которой следовали все математики на протяжении 2300 лет. Это была правильная математика. Чтобы справиться с проблемой бесконечных логических цепочек, мы, следуя Евклиду, начнем с того, что примем набор *определений* и набор *аксиом*.

Что такое определение? Определение объясняет смысл какого-то термина, но даже с таким простым подходом связаны аналитические проблемы. Взять хотя бы первое определение, которое мы собираемся сформулировать. Предположим, что мы хотим определить *прямоугольник*. Это будет первый термин в нашей математической системе. Какие слова мы можем использовать? Скажем, мы определяем прямоугольник через точки,

Рис. 1.6. (Урок чтения формул в Музее Математики
© Sidney Harris, www.sciencecartoonsplus.com)

прямые и плоскости. Неизбежно встают вопросы: что такое точка? что такое прямая? что такое плоскость?

Ясно, что наше *первое* определение (определения) должно быть сформулировано в терминах общепринятых слов, которые не требуют дальнейших объяснений. Аристотель (384–322 до н. э.) настаивал на том, что определение должно описывать определяемое понятие в терминах уже известных понятий. Часто это вызывает заметные трудности. Например, Евклид определял *точку* как нечто, не имеющее частей. При этом, чтобы объяснить точное математическое понятие «точка», ему пришлось использовать *нематематические слова*, относящиеся к повседневной речи.[1] Как только «точка» определена, этот термин можно использовать в других определениях. А затем можно пользоваться повседневным языком, не требующим дальнейших объяснений. Так мы строим систему определений.

Определения дают нам язык для занятий математикой. Мы формулируем наши результаты, или *теоремы*, пользуясь словами, введенными в определениях. Хотя нет, к теоремам мы еще не готовы — мы еще не установили краеугольный камень, на котором будет основана наша теория вывода. Нам нужны аксиомы.

---

[1]Среди тех, кто занимается основаниями математики, принято те понятия, которые определяются нематематическим языком (т. е. те, которые нельзя определить через другие математические термины), называть неопределяемыми. Так, к неопределяемым относится понятие «множество», которое мы обсудим позднее; а также «точка».

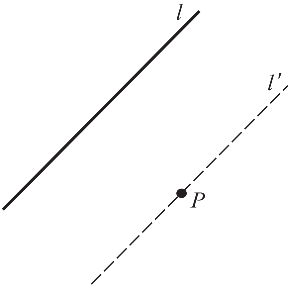


Рис. 1.7. Постулат о параллельных

Что такое аксиома? Аксиома[1] (или постулат[2]) — это математическое выражение факта, который считается самоочевидным, сформулированное с использованием терминологии, введенной в принятых определениях. Аксиомы не доказывают. Их считают данными, такими очевидными и заслуживающими доверия, что никаких доказательств для них не требуется.

Аксиомы можно использовать, чтобы объяснять основания. Это идеи в основании предмета исследования; их содержание считается ясным или самоочевидным. Подчеркнем еще раз: проверить утверждения аксиом нельзя. Они даются для удовольствия читателя; подразумевается, что они будут использованы далее для доказательства математических результатов. Одна из самых известных аксиом во всей математике — *постулат о параллельных Евклида*. Этот постулат (в формулировке Плейфэра[3]) утверждает, что если P — точка, а l — прямая, не проходящая через эту точку, то существует *единственная* прямая l', проходящая через точку P и параллельная l (рис. 1.7). Постулат о параллельных стал частью евклидовой геометрии 2300 лет назад. И больше двух тысяч лет было неизвестно, действительно ли это утверждение следовало объявить аксиомой. Нельзя ли его вывести из других четырех аксиом геометрии (подробный разбор аксиом Евклида проведен в разд. 2.2). Были предприняты невероятные усилия, чтобы построить такое доказательство, было сделано много знаменитых ошибок (историю этого вопроса см. в [GRE]). Но в 1820-х гг. Янош Бойяи и Николай Лобачевский установили, что постулат о параллельных доказать нельзя, и тому есть поразительная причина — существуют модели геометрии, в которых все остальные аксиомы Евклида выполняются, однако постулат о параллельных неверен. Так что этот постулат — одна из аксиом нашей самой привычной геометрии.

Вообще говоря, в любой области математики принято начинать с краткого перечисления определений и краткого списка аксиом. После того как

[1] Слово «аксиома» греческого происхождения, оно означает «что-то ценное».

[2] Слово «постулат» появилось в средневековой латыни, оно означает «называть» или «требовать».

[3] Джон Плейфэр (1748–1819) — геометр из Эдинбургского университета. Многие не отдают себе отчета, что евклидова геометрия, как мы знаем ее сегодня, — вовсе не та, что создавал Евклид. Плейфэр, Гильберт и многие другие поработали над тем, чтобы сделать ее более современной и последовательной.

они сформулированы, приняты и поняты, можно формулировать и доказывать теоремы. Доказательство может принимать много разных форм. Самая традиционная форма доказательства — точная последовательность утверждений, связанных между собой строгими правилами логики. Однако цель этой книги — выяснить и обсудить, какие еще формы может принимать доказательство. В наше время доказательство может (часто так и происходит) принимать традиционную форму, восходящую к Евклиду. Но приемов доказательства существует много: прямое доказательство, по индукции, перечисления, исчерпывания, по случаям, от противного — и это далеко не все. Доказательство может включать компьютерное моделирование. Или заключаться в построении физической модели. Или состоять из алгебраических вычислений с использованием программных пакетов Mathematica, Maple или MATLAB. Доказательство может сочетать различные перечисленные приемы.

Одна из основных задач этой книги — представить и изучить различные формы математического доказательства и роль, которую они играют в современной математике. Несмотря на многочисленные изменения и сдвиги в подходах к технике доказательства, эта фундаментальная методология остается краеугольным камнем в инфраструктуре математической мысли. Как уже было сказано, ключевая часть любого доказательства — какую форму оно бы ни принимало — логика. Но что такое логика? Это мы обсудим в следующем разделе.

Философ Карл Поппер полагал [POP], что *ничего* нельзя знать с абсолютной уверенностью. Он даже ввел доктрину фальсификационизма. В ее рамках научной может считаться только такая теория, для которой существует методологическая возможность ее опровержения.

Традиционная математика отвергает эту точку зрения. Считается, что математические утверждения, доказанные в соответствии с принятыми канонами математического вывода, неоспоримо верны. И такими останутся. Эта перманентная природа математики — уникальная черта, выделяющая ее из всех интеллектуальных деяний человека.

В статье [YEH] имеется поучительное обсуждение различных видов доказательства и их роли в нашем мышлении. Что же такое доказательство, почему оно важно и почему нам нужно продолжать строить доказательства?

1.3 КАК РАБОТАЕТ МАТЕМАТИК?

Мы все более-менее представляем себе работу мясника, врача или каменщика — мы *видели*, как эти люди практикуют свое ремесло. Нет сомнений или тайн относительно того, чем они занимаются.

С математиками все не так. Они могут работать без свидетелей и часто предпочитают уединение. Многие математики сидят в своих офисах или дома и неслышно размышляют. У одних есть любимые предметы, которыми они играют или манипулируют. Другие рисуют каракули. У кого-то есть дартс. Например, обладатель филдсовской медали Пол Дж. Коэн (1924–2007) частенько играл в дартс, представляя себе, что кидает дротики в своего брата (против которого его настраивали родители, воспитывая таким образом соревновательность в характере).

У некоторых математиков совершенно непредсказуемые и удивительные способы заниматься своим делом. Математик и физик Ричард Фейнман (1918–1988) любил размышлять о физике в стрип-клубе недалеко от Калтеха. Он бывал там каждый вечер. Когда у стрип-клуба возникли неприятности с законом, единственным уважаемым завсегдатаем (а среди них были доктора, адвокаты и даже священники), который не постеснялся свидетельствовать в пользу клуба, оказался Ричард Фейнман!

Лауреат Нобелевской премии по физике Стивен Вайнберг (р. 1933) работал над своими космологическими теориями во время просмотра телевизионных мыльных опер. Он абсолютно не мог обходиться без «As the World Turns», но у него были и другие любимые сериалы.

Хотя мы часто воображаем, что математик просто сидит и думает, в действительности все не так. Математики гуляют, играют в настольный теннис, поднимают тяжести, медитируют, разговаривают, читают лекции, участвуют в совещаниях и спорят. Они показывают свои незаконченные доказательства недоделанных утверждений в надежде получить помощь и довести результат до настоящей теоремы. Они прорабатывают идеи со своими студентами. Они ведут семинары, делают записи, публикуют планы исследований. Они ездят на конференции и разбрасываются идеями. Они слушают лекции[1] коллег, читают и рыщут в Интернете. Они экспериментируют и вычисляют. Одни математики строят замысловатые компьютерные модели, а другие — физические. Мой учитель Фред

[1] Как-то раз я смог решить задачу, которая давно не давала мне покоя, воспользовавшись идеей из лекции одного знаменитого французского математика, которая не была близка моей теме. Я даже не вполне могу рассказать, о чем именно была эта лекция, но один шаг в доказательстве натолкнул меня на идею.

Альмгрен любил окунать изогнутую проволоку в мыльный раствор и рассматривать, какие получаются мыльные пузыри. По-моему, годится все, что срабатывает. Если ты достигаешь цели, на самом деле не так важно, как ты туда добрался.

1.4 ОСНОВАНИЯ ЛОГИКИ

В наше время математическая логика имеет собственную ценность. Это развитая ветвь математики, как геометрия, дифференциальные уравнения или алгебра. Но для практикующих математиков логика — это краткий и доступный набор правил, которым подчинена жизнь.

Отец той логики, которую мы знаем сегодня — Аристотель (384–322 до н. э.). Его труд «Органон» заложил фундамент того, чем логика должна быть. Здесь мы рассмотрим некоторые из положений Аристотеля.

1.4.1 Закон исключенного третьего

Одно из правил логики Аристотеля заключается в том, что каждое разумное утверждение, ясное и непротиворечивое, должно быть либо истинным, либо ложным. Никакое утверждение не может быть чем-то «средним» или «с нерешенным статусом». Так, утверждение

Если на Марсе есть жизнь, то рыбы летают

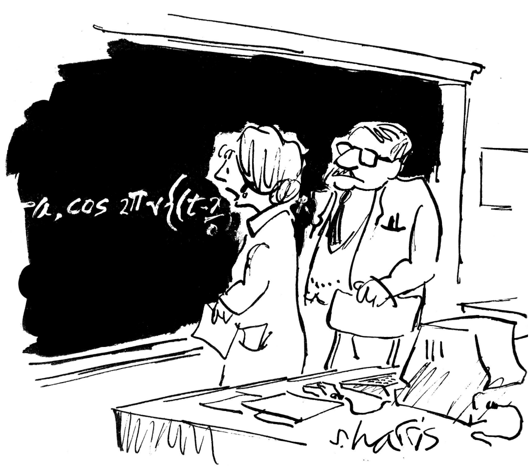


Рис. 1.8. («Это прекрасное доказательство, однако ему не хватает теплоты и чувственности» © Sidney Harris, www.sciencecartoonsplus.com)

истинно или ложно. Это утверждение может показаться легкомысленным или глупым. Нет никакой возможности проверить его, поскольку мы не знаем (и в ближайшем будущем так и не узнаем), есть ли жизнь на Марсе. Но у этого утверждения есть ясный смысл, так что оно должно быть либо истинным, либо ложным. Известно, что рыбы *не летают*[1]. Но истинность или ложность изучаемого утверждения мы установить не можем, так как не знаем, есть ли жизнь на Марсе.

Вы можете подумать: «Профессор Кранц, ваш анализ некорректен. Данному утверждению следует присвоить истинностное значение ’не решено’. Мы не знаем ничего про жизнь на Марсе, поэтому не можем определить, истинно ли утверждение. Возможно, через пару столетий что-нибудь прояснится, и нам удастся придать какое-то истинностное значение данному утверждению, но сейчас это сделать невозможно. Пока мы можем ограничиться только ярлыком ’не решено’».

Это интересное рассуждение, но в математике мы судим не с этой позиции. В математике мы считаем, что *Создателю* известно все — *Он* знает, есть ли жизнь на Марсе — и поэтому Ему, конечно, известно, истинно ли данное утверждение или ложно. То, что данный факт неизвестен нам, — лишь печальный артефакт нашей цивилизации. Но это не меняет основополагающего факта — *утверждение либо истинно, либо ложно*. Точка.

Для нас не так важно, что *существуют* версии логики, в которых допускаются функции истинности, принимающие много значений. В таких версиях утверждению может соответствовать не только одно из двух истинностных значений («истина» или «ложь»), допустимы и другие значения. Например, утверждение «Барак Обама — президент США» истинно в этот момент, когда я создаю данный текст, но оно не будет оставаться истинным вечно. Так что мы можем ввести специальное истинностное значение, которое будет фиксировать преходящую истину. В книге [KRA4] обсуждается многозначная логика. Но традиционно в математике используются только два истинностных значения: *истина* и *ложь*. Традиционная математика отвергает положение о том, что осмысленное утверждение может иметь нерешенный или преходящий истинностный статус.

1.4.2 Модус понендо поненс и его друзья

В этом месте мы хотели бы совершить с читателем краткий экскурс в терминологию и методологию математической логики. Это один из способов понять, как мыслят математики.

[1] Обычно. — *Прим. перев.*

Название «модус понендо поненс»[1] обычно применяют к одному из самых фундаментальных правил логического вывода. Оно означает: если нам известно, что из $\mathbf{A}$ следует $\mathbf{B}$, и если нам известно, что имеет место $\mathbf{A}$, то мы можем сделать вывод $\mathbf{B}$. Обычно это обозначают следующим образом:

$$[(\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B}) \wedge \mathbf{A}] \Rightarrow \mathbf{B}$$

(здесь мы используем стандартные обозначения: $\Rightarrow$ означает «следует», а $\wedge$ означает «и»).

Мы часто пользуемся этим правилом вывода в повседневной жизни. К сожалению, нередко при этом допускаются ошибки. Вы никогда не слышали рассуждений вроде следующего?

- Все *рок-звезды* завтракают.
- Мой уважаемый оппонент завтракает.
- Поэтому мой уважаемый оппонент — рок-звезда.

Вы можете смеяться, но такой тип рассуждений частенько попадается в выпусках новостей, газетах и фейсбуке. В качестве примера давайте проанализируем это рассуждение.

Пусть[2]

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(x) &\equiv x - \text{рок-звезда}, \\ \mathbf{B}(x) &\equiv x - \text{рок-звезда завтракает}, \\ o &\equiv \ \text{мой уважаемый оппонент}. \end{aligned}$$

Теперь приведенное рассуждение можно изобразить так:

$$\begin{aligned} &\mathbf{A}(x) \Rightarrow \mathbf{B}(x), \\ &\mathbf{B}(o), \\ &\text{следовательно,}\ \ \mathbf{A}(o). \end{aligned}$$

Теперь ясно, что модус понендо поненс использовался неверно: из $\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B}$ и $\mathbf{B}$ был сделан вывод $\mathbf{A}$.

Это довольно распространенная ошибка — путают обратное утверждение с контрапозицией. Давайте обсудим этот вопрос. Для данной импликации $\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B}$ *обратной* является импликация $\mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{A}$, а *контрапозицией* — $\sim \mathbf{B} \Rightarrow \sim \mathbf{A}$, знак $\sim$ означает «не». Слово «обратная» можно встретить в повседневной речи, но «контрапозиция» — почти никогда, так что эти понятия требуют обсуждения.

---

[1] В переводе с латыни это выражение означает «утверждать, утверждая».

[2] Здесь мы используем стандартное математическое обозначение: $\equiv$ означает «есть по определению».

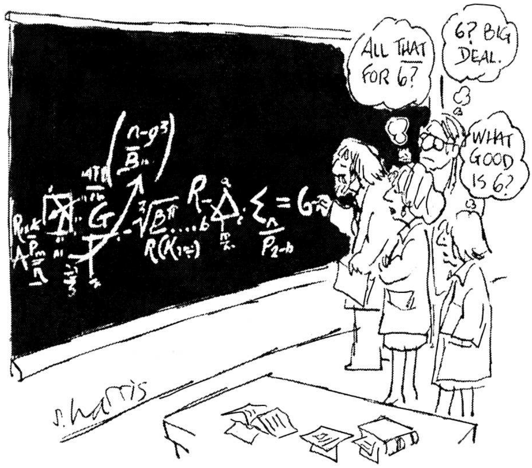


Рис. 1.9. («Все это, чтобы получить 6?», «6? Большое дело...», «Что хорошего в числе 6?» © Sidney Harris, www.sciencecartoonsplus.com)

Рассмотрим такое утверждение:

У каждой здоровой лошади четыре ноги.

Для начала его полезно упростить:

У здоровой лошади четыре ноги.

Если мы введем обозначения

$$\mathbf{A}(x) \equiv x \text{ — здоровая лошадь,}$$
$$\mathbf{B}(x) \equiv x \text{ имеет четыре ноги,}$$

то наше утверждение принимает вид

$$\mathbf{A}(x) \Rightarrow \mathbf{B}(x).$$

Обратное утверждение здесь —

$$\mathbf{B}(x) \Rightarrow \mathbf{A}(x),$$

т. е.

Объект с четырьмя ногами — здоровая лошадь.

Нетрудно видеть, что обратное утверждение построено на основе исходного утверждения о том, что у каждой здоровой лошади четыре ноги. Однако в то время, как исходное утверждение истинно, обратное ему — *ложно*. Вообще говоря, *неверно*, что нечто четырехногое — именно здоровая лошадь. Например, у многих столов по четыре ножки, однако стол не есть здоровая лошадь. И овца тоже.

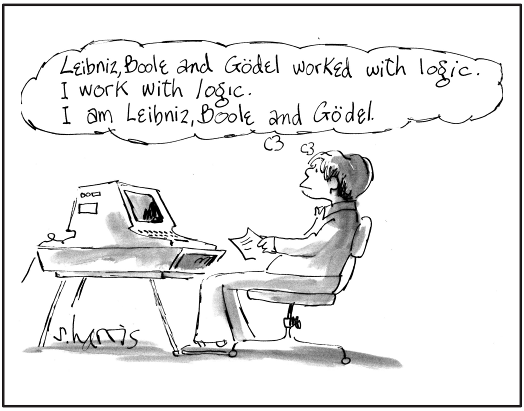


Рис. 1.10. («Лейбниц, Буль и Гёдель работали с логикой. Я работаю с логикой. Я — Лейбниц, Буль и Гёдель». © Sidney Harris, www.sciencecartoonsplus.com)

С контрапозицией все иначе. В нашем случае *контрапозиция*

$$\sim \mathbf{B} \Rightarrow \sim \mathbf{A}$$

означает, что если нечто не обладает четырьмя ногами, то не является здоровой лошадью.

Это утверждение отличается от исходного, однако является *верным*. Если мне повстречается объект, у которого нет четырех ног, я могу быть уверен, что это не лошадь в добром здравии, ведь у здоровой лошади должно быть четыре ноги. Поразмыслив, можно понять, что контрапозиция утверждает ровно то же самое, что исходное утверждение, просто несколько иными словами.

На самом деле *контрапозиция некоторой импликации всегда логически эквивалентна самой исходной импликации*, а вот про обратное утверждение этого сказать нельзя.

Вернемся к обсуждению того, следует ли называть нашего уважаемого оппонента рок-звездой. Мы начали с того, что из $\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B}$ и $\mathbf{B}$ мы сделали вывод $\mathbf{A}$. Таким образом, мы неправильно истолковали импликацию как $\mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{A}$. Другими словами, мы *неверно интерпретировали исходную импликацию как обратную ей*. Правильно было бы понимать исходную импликацию как $\sim \mathbf{B} \Rightarrow \sim \mathbf{A}$, поскольку контрапозиция логически эквивалентна исходному утверждению. Но из $\sim \mathbf{B} \Rightarrow \sim \mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ вместе взятых ничего не следует.

Правило *модус толлендо толленс*[1)] на самом деле не что иное, как переформулировка правила модус понендо поненс. Оно гласит:

$$\text{Если } ((\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B}) \text{ и } \sim \mathbf{B}), \text{ то } \sim \mathbf{A}.$$

[1)]В переводе с латыни это выражение означает «отрицать, отрицая».

После всех наших обсуждений *модус толлендо толленс* понять несложно. Утверждению **A** $\Rightarrow$ **B** эквивалентна его контрапозиция $\sim$ **B** $\Rightarrow\sim$ **A**. А если к тому же мы имеем утверждение $\sim$ **B**, то (согласно *модус понендо поненс*!) можем вывести утверждение $\sim$ **A**. А именно в этом и заключается *модус толлендо толленс*.

Для краткости принято вместо *модус понендо поненс* говорить *модус поненс*, а вместо *модус толлендо толленс*—*модус толленс*.

1.5 ИЗ ЧЕГО ЖЕ СДЕЛАНО ДОКАЗАТЕЛЬСТВО?

Большинство шагов математического доказательства — это применение правил *модус поненс* или *модус толленс*. Здесь мы, конечно, упрощаем, поскольку существует большое число техник, развитых в последние два столетия (некоторые из них подробно обсуждаются в гл. 2). Некоторые из этих методов перечислены в разд. 1.2. Все они основаны на *модус понендо поненс*.

Это действительно изящная и мощная система. *Бритва Оккама* — логический принцип, установленный в XIV в. (Уильямом Оккамским, (1288–1348)), который гласит, что система доказательства должна включать наименьший возможный набор аксиом и правил вывода. Таким образом минимизируется возможность того, что в систему встроены внутренние противоречия; это происходит за счет того, что проще отыскать источник идей. Вдохновленные как *элементами* Евклида, так и бритвой Оккама современные математики пытаются сохранить основания своей науки простыми и изящными как только возможно. Списки определений должны быть как можно короче, а наборы аксиом или постулатов — как можно точнее и элегантнее. Если открыть классический учебник по теории групп, такой как шедевр Маршалла Холла [HAL], на первой

Группы

В математике *группа* — это набор объектов, в котором задана операция, каким-то образом сочетающая эти объекты. Операция должна быть в разумной степени подобна арифметическим операциям, т. е. должна удовлетворять знакомым свойствам вроде ассоциативности ($a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$). В группе есть *тождественный элемент* e ($a \cdot e = e \cdot a = a$). У каждого элемента a группы есть *обратный* ему элемент a^{-1} ($a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$). Некоторые группы *коммутативны* ($a \cdot b = b \cdot a$); но далеко не все.

Существуют различные типы групп: группы чисел, матриц, операторов в гильбертовом пространстве. Теория групп — одна из величайших унифицирующих абстракций современной математики.

странице обнаружатся ровно три аксиомы. Вся 434-страничная книга построена только на них[1]. Или возьмите классические «Основы математического анализа» Уолтера Рудина [RUD]. В этой работе все положения науки о действительных переменных основаны всего лишь на 12 аксиомах. А в фундаментальных книгах по теории множеств, таких как [SUP] или [HRJ], ограничиваются всего восемью аксиомами.

1.6 ЦЕЛЬ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА

В естественных науках (таких как физика, биология, химия) для проверки утверждений принято ставить опыты в лаборатории. *Воспроизводимые контролируемые эксперименты* служат критерием истинности в этих науках. В своих статьях ученые кратко рассказывают о том, что они обнаружили, а затем описывают шаги соответствующих опытов. Они описывают *контроль* — стандарт, с которым сравниваются полученные результаты. Заинтересовавшиеся коллеги, ознакомившись со статьей, могут воспроизвести эксперимент в своих лабораториях. Настоящие классические, основополагающие и важные эксперименты становятся учебным материалом, их воспроизводят учащиеся по всему миру. В основном естественные науки *не выводятся* из фундаментальных принципов (таких как аксиомы). Интеллектуальный процесс протекает более эмпирично, а процедура проверки — тоже непосредственно практическая.

К теоретической физике это не относится. Такие ученые, как Стивен Хокинг, Эдвард Виттен или Роджер Пенроуз, никогда не входят в лабораторию. Они просто *размышляют* о физике. Они полагаются на экспериментаторов, которые снабжают их пищей для идей. Кроме того, экспериментаторы помогают таким ученым проверять их идеи. Но сами ученые-теоретики не участвуют в процедуре проверки на истинность[2].

Описанный процесс вполне подходит для теоретической физики, но не всегда. Эйнштейновская общая теория относительности была провозглашена в 1915 г., а эксперименты Эддингтона в 1919 г. подтвердили идею (мгновенно сделав Эйнштейна знаменитым). Но теория не была проработана вполне до 1970 г., когда появились идеи о черных дырах и квазарах. *Теория струн*, которая включает сравнительно новый набор идей и обещает объединить общую теорию относительности с квантовой

---

[1] Недавно удалось все основы теории групп уместить в *одну* аксиому, *не используя* к тому же слово «и», — см. [KUN], [HIN] и [MCU].

[2] В захватывающей статье [JAQ] обсуждается вопрос о том, следует ли математиков, как и физиков, разделить на «теоретиков» и «экспериментаторов».

механикой[1)], уже двадцать лет — увлекательная и фундаментальная часть физики. Но никаких экспериментальных подтверждении положений теории струн до сих пор *нет*. В каком-то смысле теория струн — это набор идей, ожидающих своего рождения.

Математика — это интеллектуальное явление совсем иной природы. В математике *прежде чем* куда-то двигаться, мы формулируем определения и аксиомы. В частности, *прежде чем перейти к выводу каких-либо результатов*, нужно проделать определенную подготовительную работу. Затем мы даем точные, изящные формулировки утверждений и доказываем их. Утверждение без доказательства в математике не имеет ценности[2)]. Его просто никто не примет, никто не станет использовать его в своей работе. Доказательство — окончательная проверка любой новой идеи. И когда доказательство завершено, завершаются все дискуссии. Никто никогда не найдет контрпримера или усомнится в этом отдельно взятом математическом факте.

Не следует думать, что построение математических доказательств — процесс механический, это вовсе не так. Математик, как и любой другой ученый, открывает идеи *интуитивно*. Он просто «видит» или «чувствует», что какое-то утверждение истинно, основываясь на опыте и озарении, развиваемых годами. Затем математику приходится размышлять, почему этот новый «факт» верен. Вначале может появиться только набросок, схема доказательства. Со временем обнаружатся дополнительные идеи и соберутся другие части доказательства. В конце концов все пробелы будут заполнены и результатом станет настоящее строгое доказательство, подчиняющееся неумолимому диктату логики.

В истории математики встречались области, в которых невозможно было решить, в чем заключается доказательство. Не было ни языка, ни обозначений, ни понятий, чтобы записать что-либо строго. Теория вероятностей пострадала от многих неверных шагов и сотни лет была полна противоречий и парадоксов, пока в 1930-х годах Андрей Колмогоров (1903–1987) не осознал, что правильным орудием для описания вероятностных идей должна служить теория меры. Тогда же, в 1930-х годах,

---

[1)]Теория струн довольно-таки «не от мира сего». Эта новая группа идей предназначена для описания фундаментального устройства природы трехмерного пространства, в котором мы живем. Она объясняет феномен гравитации. Но сами струны живут в десяти- или двадцатишестимерном пространстве! Убедительное описание теории струн и ее значение для нашего мира можно найти в [GRE1].

[2)]Разумеется, математики пользуются эвристиками, алгоритмической логикой и выдвигают гипотезы. Мы обсудим это позднее.

итальянские алгебраические геометры решали, в чем заключается «теорема», собираясь вместе, обсуждая тему, а затем голосуя. На самом деле все было еще хуже. Имело место заметное, интенсивное соперничество между Федериго Энрикес (1871–1946), Гидо Кастельнуово (1865–1952) и другими. Они доказывали новые результаты и объявляли о них, но отказывались представлять доказательства. Так что итальянские математики дискутировали, предлагали суждения о том, как новые результаты могли быть доказаны, а затем голосовали. Одним из недостатков такого положения вещей было то, что отсутствовал процесс проверки, не развивались методы. Сама область математики стагнировала. Корректная (как мы сейчас считаем) техника работы в алгебраической геометрии была разработана много лет спустя Андре Вейлем (1906–1998), Александром Гротендиком (р. 1928), Оскаром Зарисским (1899–1986), Жаном-Пьером Серром (р. 1926), Клодом Шевалле (1909–1984) и многими другими.

Новый поворот в нашей теме создали Гари Миллер и Михаил Рабин, разработав (в 1976) *вероятностный подход* к доказательству математических теорем. Они изучали, как доказать, является ли некоторое большое число p простым, разработав итеративную процедуру, обладающую таким свойством: каждое применение алгоритма увеличивает вероятность того, что число простое (или показывает, что это не так). При достаточном количестве итераций вероятность может быть сделана сколь угодно близка к 1. Но этот метод никогда не дает математически полной уверенности (если только результат не отрицательный). Эта работа усилила более ранние результаты Роберта Соловея и Фолькера Штрассена.

Идеи Миллера—Рабина добавили огня в один математический спор, который имел место в начале 1970-х. Математик из Ратгерского университета Рафаэль Цалер опубликовал утверждение [ZAH], а затем и его

Теория вероятностей

Теория вероятностей имеет дело с правдоподобностью осуществления того или иного события. Если бросить монетку, насколько правдоподобно, что выпадет «орел»? Насколько правдоподобно, что две карты, наугад вынутые из стандартной колоды в 52 листа, окажутся одного достоинства? В современной квантовой механике многие утверждения с необходимостью вероятностны (в частности, именно об этом говорит нам принцип неопределенности Гейзенберга). Генетическая экспертиза, которую используют в криминалистике для установления личности преступника, во многом опирается на теорию вероятностей (поскольку между миллиардами генов можно установить соответствие только с некоторой измеримой достоверностью).

Алгебраическая геометрия

Алгебраическая геометрия изучает множества нулей многочленов. Если $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_kx^k$ — многочлен, то что можно сказать о множестве чисел x таких, что $p(x) = 0$?

Вопрос становится особенно интересным для многочленов от двух или более переменных. Например, у многочлена $p(x, y) = x^2 + y^2 + 1$ нет нулей, если ограничить значения переменных x и y действительным числами. Но если рассматривать комплексные числа, то окажется, что нулевое множество этого многочлена образует поверхность в четырехмерном пространстве.

подробное доказательство [THZ], показав, что некоторая гомотопическая группа ненулевая. В то же самое время японские математики С. Ока и Х. Тода опубликовали статью [OKT], в которой утверждали, что та же самая гомотопическая группа *нулевая*.

Эксперты-математики (и не только они) изучили обе работы, чтобы разобраться, в чем проблема. Очевидно, что обе теоремы не могли быть верны одновременно. Но найти ошибку (в одном из доказательств) не получалось. Тополог Франк Адамс в своем обзоре статьи [ZAH] заявил, что он выполнил независимую проверку и подтверждает результат Цалера. В конце концов, в июле 1974 г. Ока и Тода признали свою ошибку и отозвали свое заявление. Вроде бы все хорошо.

Но не вполне. О возникшем противоречии написала статью [KOL] Джина Колата. Цитируя работу Миллера и Рабина, она высказала предположение, что если бы мы приняли вероятностные доказательства, то идеи таких работ стали бы более доступными и прозрачными, а противоречия вроде описанного не возникали бы. Тему продолжила газета New York Times, где была опубликована редакционная статья о том, что математические доказательства столь длинны и сложны, что никто больше их не понимает (и это невзирая на тот факт, что доказательство Цалера заняло всего-то 13 страниц!). История закончилась тем, что Цалер сам написал письмо редактору «Таймс» (оно было опубликовано), исправив фактические ошибки и заявив, что этот опыт так его раздражает, что он оставляет профессорскую кафедру в Ратгерском университете и переходит в медицинскую школу.

Математика (по традиции) обладает особым видом незыблемости, не присущим другим наукам[1)]. Математика целиком и полностью живет

[1)]Некоторые, правда, полагают, что приличная, строго научная компьютерная программа обладает тем же видом незыблемости, что и математика. Это так в том смысле, что программа надежна, проверяема и дает предсказуемый и воспроизводимый результат.

Теория гомотопий

Топологию обычно с некоторым преувеличением называют «резиновой геометрией». Топология имеет дело с теми свойствами геометрических объектов, которые не меняются, когда объект подвергается растяжению или деформации. Теория гомотопий изучает способы обнаружения в геометрических объектах дыр различных размерностей. Размер и сложность этих дыр измеряются с помощью специальных алгебраических конструкций. Надо понимать, что дыра внутри окружности отличается, например, от дыры внутри сферы. И обе они, в свою очередь, отличаются от дыры в спасательном круге (*торе*).

внутри аналитической системы, *созданной человеком*. Созданной так, что она надежна, ее результаты воспроизводимы и переносимы в другие области так, как это и не снилось другим наукам[1].

Одна из неотразимых черт математического доказательства — его притягательная, можно даже сказать, наркотическая природа. Биограф Джон Обри рассказывает о том, как философ Томас Гоббс (1588–1679) впервые столкнулся с этим явлением:

> Ему было уже 40 лет, когда он впервые познал геометрию. Произошло это случайно. Будучи в библиотеке одного джентльмена, где лежали «Элементы» Евклида, открытые на 47 El. libri I, он прочитал утверждение. «О Боже, — воскликнул он (время от времени он позволял себе такие слова для выразительности), — этого не может быть!» Итак, он прочел доказательство, которое ссылалось на другое утверждение, и с ним он ознакомился тоже. Там была отсылка еще далее, и он прочитал и то утверждение. Et sic deinceps, в конце концов, он доказательно убедился в истинности. Так он полюбил геометрию.

Гоббс оказался так увлечен математикой, что он принял математическую методологию в своей философии. Он пытался сформулировать математическую теорию этики, чтобы моральный выбор можно было сделать, решив уравнение. Попытка оказалась менее чем успешной.

Еще одна особенность математики в ее вневременности. Теоремы, которые тысячи лет назад доказали Евклид и Пифагор, до сих пор верны. Мы пользуемся ими с уверенностью, поскольку знаем, что они так же верны сейчас, как верны были тогда, когда впервые их открыли великие

[1] В 1919 г. Виджей Сани в Нью Джерси по одному невразумительному закону был обвинен в богохульстве. Его обвинили в том, что он утверждал, что математическую достоверность можно применять и к другим областям человеческого знания, включая религию. Об этом событии спустя 61 год рассказал его внук, который как раз изучал бесконечность в Станфордском университете.

мастера. В других науках все иначе. К медицинской или компьютерной литературе даже трехлетней давности обращаются редко, так как то, что казалось верным всего несколько лет назад, уже изменилось и преобразовалось. А математика с нами всегда. Поразительнее всего то, что, несмотря на кажущуюся искусственность процесса, математика дает прекрасные модели различных явлений (этот вопрос обсуждается в элегантном эссе [WIG]). Снова и снова, и с каждым годом все больше, математика помогает объяснять, как устроен мир вокруг нас. Достаточно нескольких примеров.

- Исаак Ньютон вывел три закона Кеплера движения планет, пользуясь одним только своим универсальным законом притяжения и анализом.
- Существует полная математическая теория преломления света (созданная Исааком Ньютоном, Уилбордом Снеллом и Пьером Ферма).
- Существует математическая теория распространения тепла.
- Существует математическая теория электромагнитных волн.
- Вся классическая теория поля из физики формулируется в математических терминах.
- Для анализа Эйнштейновских уравнений поля тоже используется математика.
- Движение падающих тел и снарядов полностью анализируется математическими методами.
- Технология обнаружения подводных лодок с использованием радаров и звуковых волн полностью основана на математике.
- Теория обработки и сжатия образов полностью основана на математике.
- Технология изготовления музыкальных компакт-дисков полностью основана на анализе Фурье и теории кодирования, а это области математики.

Этот список можно продолжать и продолжать.

Главное, что нужно понять, — *доказательство* лежит в самой сердцевине современной математики, именно оно делает ее надежной и воспроизводимой. Никакая другая наука не зависит от доказательств, и следовательно, никакая другая наука не обладает неуязвимой прочностью математики (об этом еще пойдет речь в разд. 1.10). Но *применяется* математика самыми разными способами, в широком спектре дисциплин. Приложений много, и они различаются. Другие дисциплины часто любят сводить свои теории к математике, поскольку это дает их субъекту определенное изящество и солидность, да и выглядит щегольски.

Нужно помнить про два аспекта *доказательства*. Во-первых, это наша lingua franca; это математический способ рассуждений. Эта наша испробованная методология для записи открытий в виде пошагового доказательства; она выдержит проверку временем. Доказательство — официальный сертификат истинности чего-либо. Во-вторых, а для практикующего математика в самых важных, доказательство новой теоремы может объяснять, *почему* результат верен. В конце концов, мы все ищем нового понимания, а «доказательство» дает нам этот золотой слиток. Прекрасное обсуждение этих идей можно найти в [BRE].

Можно долго рассуждать о том, что случается, когда первое положение из предыдущего абзаца выполняется, а второе нет. Предположим, некто строит доказательство **теоремы A**, и, похоже, оно верно, но никто его не понимает. Доказательство может быть создано блестящим авторитетом — у него безупречная репутация, он никогда не совершал ошибок, и мы вполне уверены, что доказательство продумано и заслуживает доверия. Но никто не может извлечь из него никакой пользы. Возможно, оно слишком техничное, слишком длинное, сложное или опирается на слишком большое количество различных идей из самых разных областей, так что никто не может разобраться в нем. Такое доказательство никому не принесет удачи, ведь никто не сможет узнать ничего нового из этого прорыва. Может быть, такая ситуация и не создается нарочно, но она приводит к «доказательству запугиванием». Компьютерные доказательства, которые мы обсудим позднее, тоже могут попадать в эту категорию.

Может случиться также, что второе положение выполняется без первого. В такой ситуации мы все верим результату, нам даже кажется, что мы его понимаем (по крайней мере эвристически), но мы осознаем, что канонизировать его еще рано. Программа геометризации Тёрстона попадала в эту категорию, существуют и другие примеры. Результаты такого типа до какой-то степени просвещают нас и даже могут вдохновить на другие открытия и доказательства, однако не вселяют того чувства уверенности, которого математики обычно добиваются. В этой книге мы уделим внимание и такой ситуации тоже.

Философы математики по-разному смотрят на вопросы уверенности в математике. Имре Лакатос в своей работе [LAK] высказывает мнение, что никакой результат в математике не может быть окончательным, что все постоянно находится в движении. В своей книге он описывает класс учащихся, пытавшихся открыть формулу Эйлера в топологии — множество попыток и фальстартов, приведших в конце концов к результату. Попутно выяснилось, что эвристики не менее важны, чем само доказательство. Не все математики придерживаются точки зрения Лакатоса, но она интересна и оказала широкое влияние.

Инженер для получения нужных результатов может пользоваться математикой эвристически. Физик для достижения своих целей может использовать аппроксимацию. Те люди, которые математикой пользуются, вообще говоря, не доказывают теорем[1]. Но они пользуются математическими идеями. И они знают, что могут полагаться на математику в силу ее внутренней непротиворечивости.

В табл. 1 мы представляем ленту времени, включающую основные события в истории математического доказательства. Все эти события в нашей книге рассматриваются.

1.7 ЛОГИЧЕСКИЕ ОСНОВАНИЯ МАТЕМАТИКИ

В конце XIX века связи между математиками разных стран заметно выросли. Отчасти благодаря этой новой открытой культуре общения появилось осознание того, что математика очень разрозненна и фрагментирована. В идеале математика должна быть изначально единым логическим построением. Она вся должна вытекать из одного набора определений и одного набора аксиом. По крайней мере, именно об этом мечтал Давид Гильберт (гл. 5, особенно разд. 5.1).

Из этого интеллектуального окружения выросла основополагающая работа Фреге об основаниях математики (позднее мы обсудим ее подробно). Еще одна веха в математической мысли той поры — «Principia Mathematica» [WRU] Расселла и Уайтхеда. Бертран Расселл, которому тогда еще только предстояло стать выдающимся философом, был студентом старшего коллеги Альфреда Норта Уайтхеда в Кембриджском университете. Они поставили задачу, пользуясь только логикой, вывести всю математику из минимального набора аксиом. Смысл в том, чтобы пользоваться только строгими правилами логического вывода и не употреблять *никаких слов*! Только символы! В результате получился массивный трехтомный труд, оказавшийся практически нечитаемым. Это было упражнение в чистой математической логике, доведенное до последней крайности. Например, после 1200 страниц упорного труда была получена теорема

$$2 + 2 = 4.$$

[1]Бывают и исключения. В инженерном журнале IEEE Transactions in Signal Processing часто публикуются статьи с математическими доказательствами. Там недавно отклонили статью одного моего друга из-за пробелов в доказательстве.

Таблица 1

Лента времени математического доказательства

Событие	Дата
Вавилонская табличка с первым доказательством.	~1800 до н. э.
Фалес использует доказательства.	~600 до н. э.
Пифагор доказывает, что число $\sqrt{2}$ иррационально.	~529 до н. э.
Протагор дает некоторые из первых формальных доказательств.	~430 до н. э.
Гиппократ изобретает доказательство от противного.	~420 до н. э.
Платон в «Республике» обсуждает понятие доказательства.	~380 до н. э.
Евдокс развивает понятие теоремы.	~368 до н. э.
Аристотель обрисовывает методы доказательства (в «Физике»).	~330 до н. э.
Евклид пишет «Элементы».	~285 до н. э.
Эратосфен изобретает решето.	~236 до н. э.
В Индии мыслители разрабатывают полную схему десятичной арифметики (включая 0).	~450
Аль-Хорезми создает алгебру.	~820
Кеплер формулирует свою гипотезу об упаковке сфер.	1611
Ферма закладывает основы дифференциального исчисления.	1637
Исаак Ньютон и Готфрид Лейбниц создают анализ.	1666
Ламберт доказывает иррациональность числа π.	1770
Гаусс доказывает основную теорему алгебры.	1801
Фурье публикует свой труд «Аналитическая теория тепла».	1822
Абель доказывает неразрешимость уравнения пятой степени.	1824
Галуа записывает идеи теории Галуа (включая группы).	1832
Бэббидж разрабатывает аналитическую машину.	1833
Риман формулирует гипотезу Римана.	1859
Джевонс конструирует логическое пианино.	1869
Кантор публикует свои идеи о кардинальности и бесконечности.	1873
Линдеманн доказывает трансцендентность числа π.	1882
Адамар и де ла Валле Пуссен доказывают теорему о простых числах.	1896
Гильберт публикует «Основания геометрии».	1899
Гильберт читает лекцию с 23 проблемами.	1900
Ден решает третью проблему Гильберта.	1900
Создается парадокс Расселла.	1902
Фреге публикует «Основания арифметики».	1903
Пуанкаре формулирует свою гипотезу о сферах.	1904
Брауэр основывает движение интуиционистов.	1908
Уайтхед и Расселл пишут Principia Mathematica.	1910
Создается корпорация International Business Machines (IBM).	1911
Разрешается парадокс Банаха—Тарского.	1924
Гёдель публикует теорему о неполноте.	1931
Выходит из печати первая книга Бурбаки.	1939
Эрдёш и Сельберг дают элементарное доказательство теоремы о простых числах.	1949

Таблица 1 (*окончание*)

Событие	Дата
Фон Нейман и Голдстин создают программируемый компьютер.	1952
Ньюэлл и Саймон разрабатывают Logic Theory Machine.	1955
Гелернтер создает геометрическую машину.	1959
Гилмор, Ванг и Правиц создают машину, доказывающую теоремы.	1960
Работает доказыватель теорем SAM V.	1966
Робинсон изобретает нестандартный анализ.	1966
Бишоп публикует «Основания конструктивного анализа».	1967
Де Брейн изобретает систему проверки доказательств Automath.	1967
Кук вводит NP-полноту.	1971
Овербик создает доказыватель теорем Aura.	1972
Гиллауд и Буйер вычисляют 1 000 000 знаков числа π.	1973
Аппель и Хакен дают компьютерное доказательство теоремы о четырех красках.	1976
Джобс и Возняк создают персональный компьютер для массового потребителя.	1977
Тёрстон формулирует программу геометризации.	1980
Кнут создает $\TeX$.	1984
Де Бранж доказывает гипотезу Бибербаха.	1984
Шанкар дает автоматизированное доказательство теоремы Гёделя о неполноте.	1986
Паульсон и Нипков создают доказыватель теорем Isabelle.	1988
Гордон создает доказыватель теорем HOL.	1988
Канада и Тамура вычисляют 1 000 000 000 знаков числа π.	1989
Хоффман, Хоффман и Миикс используют компьютер для порождения вложенных минимальных поверхностей.	1990
Трайбулек создает доказыватель теорем Mizar.	1992
Хорган публикует «Смерть доказательства?»	1993
Хсианг публикует «решение» задачи Кеплера.	1993
Эндрю Уайлс доказывает Великую теорему Ферма.	1994
Проводится классификация конечных простых групп.	1994
МакКьюн создает программное обеспечение для доказательства теорем Otter.	1994
МакКьюн с его помощью доказывает гипотезу Роббинса.	1997
Альмгрен пишет 1728-страничную статью по регулярности.	1997
Хсианг публикует книгу с «решающим» доказательством задачи Кеплера.	2001
Канада, Уширо и Курода вычисляют 1 000 000 000 000 знаков числа π.	2002
Перельман объявляет о доказательстве гипотезы Пуанкаре.	2004
Хейлс и Фергюсон представляют компьютерное решение задачи Кеплера.	2006

В своей автобиографии Расселл признался, что он «никогда вполне не избавился от напряжения», потребовавшегося для написания этого монументального труда. После того как он был закончен, Расселл прекратил занятия математикой и стал чистым философом.

В наше время есть не так много людей — даже среди математиков, — которые изучают книгу Уайтхеда и Расселла. Но она стала важным шагом в развитии математической строгости, в понимании того, каким должно быть доказательство. Сейчас создано программное обеспечение, такое как Isabelle, которое на входе получает математическое доказательство (в таком виде, как современные математики используют в публикуемых статьях) и переводит его в формальное доказательство, в духе Уайтхеда и Расселла или аксиом теории множеств Цермело—Френкеля.

Наверное, надо подчеркнуть, что Уайтхед и Расселл стремились дать *строго формальное* построение математики. Их цель была вовсе не в том, чтобы создать что-то читаемое или понятное или хотя бы обучающее[1]. Они поставили цель создать архив математики, пользуясь правилами формальной логики. Сегодня математическая статья, написанная в духе Уайтхеда и Расселла, не будет опубликована. Ни один журнал не станет ее рассматривать, ведь такой способ выражения никак нельзя отнести к эффективной математической коммуникации.

Математические доказательства, как мы их *публикуем* сегодня, конечно же, менее формальны, чем в модели Уайтхеда—Расселла. Хотя мы и привержены строгим правилам рассуждения, некоторые шаги мы опускаем, иногда мы немного перескакиваем и оставляем подробности читателю, потому что хотим передавать свои идеи наиболее эффективным и изящным способом. Обычно публикация представляет собой набор орудий, с помощью которых читатель может самостоятельно построить свое собственное доказательство.

Примерно так же действуют химики: публикуют статью с описанием того, как проводился некоторый эксперимент (и какие выводы можно сделать), так что заинтересованный читатель может такой эксперимент воспроизвести. Часто бывает так, что важная химическая статья, описывающая годы напряженной работы десятков человек, содержит всего лишь несколько страниц. Это крайнее применение бритвы Оккама: записываются только ключевые идеи, так что другие ученые при необходимости могут воспроизвести эксперимент.

---

[1] На самом деле — и это представляется поразительным, если учесть, сколь важна их работа — им с трудом удалось опубликовать «Principia Mathematica». Им даже пришлось взять часть расходов по публикации на себя!

1.8 ПЛАТОНИЗМ ИЛИ КАНТИАНСТВО

Вопрос, который занимал философов математики много столетий, и особенно рьяно последние годы, звучит так: к какому виду следует отнести математическую деятельность — к платоническому или кантианскому? Как это понимать?

Платонический подход к миру заключается в том, что математические факты существуют независимо, сами по себе, как, собственно, классические идеалы Платона, а практикующие математики *открывают* эти факты примерно так же, как Колумб открыл Америку или Джонас Солк открыл вакцину от полиомиелита.

С кантианской точки зрения математики сами создают свой предмет. Идеи множества, группы или псевдовыпуклости — творение человеческого разума. Сами по себе они в природе не существуют. Мы (математическое сообщество) *создали* их.

Согласно моей собственной точке зрения, обе эти парадигмы имеют право на существование, и обе играют определенную роль в жизни любого математика. Одни математики обычно отправляются в свои офисы, сидят и размышляют или проверяют математические идеи, которые уже родились и их уже описали в журналах другие математики. А другие создают вещи с чистого листа: возможно, создают новые системы аксиоматики или определяют новые понятия, формулируют новые гипотезы. Эти два вида деятельности ни в коей мере не исключают друг друга, и оба дают свой вклад в плавильный котел математики.

Кантианская позиция поднимает интересный эпистемологический вопрос. Считаем ли мы, что математика создается заново каждым индивидуумом? Если это так, то найдутся сотни, если не тысячи разных индивидуумов, творящих математику изнутри. Как они могут общаться и делиться своими идеями? Или кантианский подход предполагает, что математика создается некоторым общим сознанием, агрегированным из всех математиков, а после этого каждому отдельному индивидууму остается только «открыть» то, что создает это агрегированное сознание? Это уже звучит очень платонически.

Платоническая точка зрения на действительность, как кажется, исходит из теизма. Если математические истины имеют независимое существование, обитая где-то там в вечности, то кто их создал? И как? Это какая-то высшая сила, с которой нам всем следует познакомиться поближе? Можно считать, что как только математическое понятие или система аксиоматизированы, все дальнейшие результаты платонически уже существуют, математикам остается только *открыть* их и их доказательства.

Кантианская точка зрения исчезает где-то за горизонтом. Искусство математики заключается в том, чтобы понять, какие системы, теоремы и доказательства интересны.

Платонический подход отчасти превращает нас в физиков. Для физика нет большого смысла в том, чтобы изучать предмет, просто создавая понятия путем чистого измышления. На самом-то деле предполагается, что физик описывает окружающий мир. Физик вроде Стивена Хокинга, с творческой жилкой и воображением, способен выдумывать идеи вроде «черных дыр», «супергравитации» и «червоточин», но только с целью объяснить устройство вселенной. Все же это не сочинение сказок.

У всего сказанного есть философские следствия. Физики не считают делом чести доказывать то, что утверждают в своих исследовательских статьях. Они часто прибегают к другим способам рассуждения — от описания и аналогии до эксперимента и вычислений. Если мы, математики — платоники, описывающие мир, который «уже есть», то почему нам нельзя пользоваться теми же методами, которые применяют физики? Почему мы обречены доказывать?

Очень глубокое и вдохновенное обсуждение этих вопросов можно найти в [MAZ]. Потребуется некоторое время, чтобы получить ответы на вопросы, поднятые в этой работе.

1.9 ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ПРИРОДА МАТЕМАТИКИ

Все, что было сказано в последних двух разделах, — точно и довольно полно, но не вполне правдиво. На самом деле экспериментированием математики занимаются. Как оно вписывается в строгую аксиоматическую методологию, которую мы описали? На самом деле до сих пор мы обсуждали, как в математике *записывают* результаты. Мы используем аксиоматический метод и *доказательство* с целью хранить наши идеи так, чтобы предмет изучения оставался надежным, воспроизводимым и безупречным. Математические идеи хорошо путешествуют и переносят проверку временем именно потому, что записываются в виде пошаговых доказательств. Но *открытие* математических фактов происходит совсем иначе. Практикующие математики делают открытия *методом проб и ошибок*: они работают над примерами, разговаривают с коллегами, выдвигают гипотезы, читают лекции, пытаются сформулировать результаты, меняют доказательства, выводят частичные результаты и ошибаются[1]. Не удаются,

[1] Есть такая старая шутка: математика дешево содержать, поскольку все, что ему нужно, — бумага, карандаш и мусорная корзина. Философ же обходится еще дешевле — ему даже мусорная корзина не нужна.

наверное, первые десять попыток сформулировать новую теорему. Посылки приходится модифицировать и иногда усиливать. Выводы тоже могут быть изменены или ослаблены. К теореме подбираются, осознают ее и формулируют методом проб и ошибок. Часто случается так, что опытный математик *понимает*, что нечто верно, может описать это в целом, но не может сформулировать точно. Практически невозможно сразу же записать строгую формулировку теоремы.

Между прочим, это одно из самых поразительных замечаний о профессиональных математиках. Целую жизнь можно провести, совершая ошибки и пытаясь на них учиться. Вряд ли есть какая-нибудь другая профессия, где можно позволить себе такое. Математик в попытках овладеть очередным святым граалем — новой теоремой, новой теорией или новой идеей — легко может потратить два-три года или даже больше, экспериментируя, пробуя, терпя неудачи и начиная все заново.

Но вот в чем дело. Как только математик добирается до сути, а затем приходит наконец к строгой формулировке и доказательству новой идеи, тут-то и приходит черед аксиоматического метода. Ключевая идея состоит в том, что методология

$$\text{Определения} \Rightarrow \text{Аксиомы} \Rightarrow \text{Доказательства}$$

это способ записи математических результатов. Это способ, гарантирующий постоянство наших идей, их способность путешествовать по миру и быть понятными следующим поколениям. Но это *не есть* путь, на котором происходит открытие математики.

Существует замечательный математический журнал под названием Experimental Mathematics. Этот журнал, самым конструктивным образом, идет вразрез со всей математической традицией. Традиция, восходящая к Евклиду, велит записывать математические идеи в строгой, формализованной аксиоматической манере. Это делается так, что ничто *не указывает* на то, как идея возникла, или какие неудачные попытки ей предшествовали, какие могли бы быть частичные результаты. Короче говоря, опубликованная математическая работа напоминает сияющий хрустальный шар, всему остальному миру остается только им любоваться[1)].

[1)] В математике существует старинная традиция — *не оставлять* никаких следов, по которым читатель мог бы догадаться о том, каким образом математический материал был получен и развит. Вместо этого считается, что читатель разберется с этим самостоятельно. В результате, словно по Дарвину, выживает сильнейший: только обладатели настоящего математического таланта могут пробиться через тернии ученичества. Как уже было сказано, Гаусс любил замечать, что архитектор не должен сохранять строительные леса для того, чтобы мы знали, как было построено здание.

Журнал Experimental Mathematics переворачивает этот архетип с ног на голову. Издание поощряет сообщения о неполных результатах, описания данных, полученных в ходе компьютерных экспериментов, идеи, полученные из графических изображений, оценку числовых данных и анализ физических экспериментов. Зеленый свет получают умозрительные рассуждения, сообщения о неполных или частичных результатах. Здесь публикуются в основном статьи, которые другие традиционные математические журналы даже рассматривать не будут. Можно сказать, что этот журнал — решительный шаг в признании той части математического процесса, который никогда формально не был принят. Таким образом, создается весомый и долговременный вклад в математическую литературу.

Журнал Experimental Mathematics выпускается издательством Клауса и Алисы Петерс (A K Peters). И Клаус, и Алиса получили математическую подготовку, они проникли в процесс зарождения математических идей, и этот журнал — одна из их инноваций.

1.10 РОЛЬ ГИПОТЕЗ

Самая высокая и рафинированная форма наставничества, которую математик может предложить математическому сообществу и студентам, — доказать великую теорему. Это каждому дает пищу для размышлений, указывает на новые направления исследований и поднимает еще больше вопросов, которые поступают на общую математическую кухню. Но есть и другие способы послужить общему благу, оказать определенное влияние и изменить направление исследований. Примером такого типа деятельности служит формулирование гипотез.

Математик, который проработал в определенной области несколько лет, получает очень сильное ощущение того, насколько идеи согласуются друг с другом, какие концепции важны, какие вопросы служат направляющими принципами в данной области. *Если* такой математик — признанный лидер или провидец в своей области, мнения которого имеют определенный вес, *если* такой человек считается одним из создателей в этой области, то у него есть *прерогатива* высказать одну или более гипотез (которые другие математики воспримут очень серьезно).

Гипотеза — это заявление о том, что какой-то результат должен быть верным (или наоборот, ложным). Обычный способ объявить гипотезу — написать хорошую статью, в заключительной части которой сказать что-то вроде «Я думаю, что развитие этой области должно идти именно в этом направлении. По-видимому, верно следующее». А затем формально объявить результат. Это результат, который доказать пока не удается, хотя, возможно, существуют правдоподобные доводы в его пользу или доказательство частного случая, или по крайней мере какие-то соображения «за». Такая гипотеза может значительно повлиять на развитие определенной области и заставить многих хороших людей изменить направление своих исследований.

Хотя академически в субъекте математики правил немного и хотя всегда есть место для того, чтобы цвели тысячи цветов, в нашей дисциплине принято, что гипотезы выдвигают персоны с определенным весом. Если бы все вокруг принялись носиться со своими гипотезами, то субъект изучения превратился бы в хаотический водоворот, никто бы не знал, что истинно, а что ложно, все бы запутались, и прогресс бы замедлился. Так что *негласно* подразумевается, что не все люди выдвигают гипотезы, а только некоторые. Математик Саундерс Маклейн провозгласил этот принцип таким образом:

> *Гипотеза* в математике существует и занимает почетное место с давних пор, но есть ясная традиция. Если математик действительно изучил предмет и продвинулся в нем, то он может сформулировать свою догадку в виде гипотезы, которая обычно принимает форму специально сформулированной теоремы…Но следующим шагом должно стать доказательство, а не дальнейшие спекуляции.
>
> — Саундерс Маклейн

Иногда если выдающийся математик полагает, что он доказал значительный результат, а потом в доказательстве обнаруживается ошибка, то математическое сообщество может выказать свое почтение, назвав результат гипотезой, носящей имя автора. Так случилось с гипотезой Пуанкаре, мы обсудим ее позднее. Пуанкаре полагал, что доказал ее, но какое-то время спустя нашлась ошибка. Так что позднее математики — вслед за Анри Пуанкаре — склонны были верить в истинность этого результата, назвав его гипотезой Пуанкаре. Не так давно Григорию Перельману наконец-то удалось ее доказать (разд. 10.5).

Еще один пример математической гипотезы — гипотеза Римана. В своей статье [RIE] Риман ввел базовые идеи, связанные с дзета-функцией Римана. У него были соображения по расположению нулей этой функции (именно об этом идет речь в гипотезе Римана). Затем он сказал, что было бы желательно получить доказательства представленных утверждений, а в заключение отметил, что его собственные попытки доказательства оказались безуспешны. Он заявил, что не будет заниматься этими вопросами, так как они далеки от его основной цели (доказать теорему о простых числах). К сожалению, Риман умер, не успев выполнить свою миссию.

1.10.1 Прикладная математика

Приблизительно до 1960 г. подавляющее большинство математических работ в Соединенных Штатах относилось к чистой математике. В Европе была иная традиция. Исаак Ньютон и Пьер Ферма изучали оптику, Ньютон и Софья Ковалевская — небесную механику, Джордж Грин изучал математическую физику, Лаплас — небесную механику, Пуанкаре — механику жидкостей и специальную теорию относительности. Гаусс работал в геодезии и астрофизике, Тьюринг — в криптографии, а Коши даже помогал развивать оборудование портов, участвуя в подготовке Наполеоновского флота к вторжению в Англию. В истории математики есть и другие примеры того, как выдающиеся ученые интересовались также физикой и инженерными науками.

Но до 1960-х годов в Соединенных Штатах почти не было математических кафедр, сотрудники которых взаимодействовали бы с физическими или инженерными отделениями. В те дни математики довольствовались тем, что сидели в своих офисах и доказывали теоремы чистой математики. Иногда они развлекались болтовней с коллегами своего же *математического отделения*. Но сотрудничество тогда было скорее исключением, чем правилом, так что большинство математиков были аскетичными одинокими волками.

С начала 1970-х годов произошел значительный сдвиг в понимании того, какой должна быть современная математика. Правительственные фонды начали оказывать давление на университеты и отделения математики, чтобы те развивали «прикладную математику». *Прикладной называют математику*, которая используется для решения практических задач. Мы, математики, всегда говорили, что вся математика может стать прикладной; но этот процесс иногда затягивается, и не наше дело беспокоиться о том, на что годится математика, которой мы занимаемся, или как долго будут развиваться приложения[1]. Нам приятно перечислить все многочисленные приложения математики Исаака Ньютона, всю пользу, которую принесла математика Джорджа Грина, Уильяма Гамильтона и Артура Кэли. Всем известно, что Институт математических наук Куранта в Нью-Йорке — источник прекрасной прикладной математики. Этого должно быть достаточно для всей науки.

---

[1] В своей очаровательной автобиографии [HAR] британский математик Г. Х. Харди хвалился, что он никогда не делал ничего полезного и никогда не будет делать.

Однако это не так. Теперь у нас новый идеал — каждое отделение математики в Соединенных Штатах должно иметь прикладных математиков. Это должны быть люди, которые взаимодействуют с исследователями других отделений, которые могут научить студентов, как математика применяется для изучения природных явлений. Это новая миссия, поддержанная финансированием (или опасениями его лишиться), привела к заметному смятению в профессорских кругах. Где нам взять этих прикладных математиков? Кто они такие? И как распознать выдающуюся работу в прикладной математике? Какие важные задачи есть в прикладной математике? Как над ними работают? И как определить, что прикладной математик нашел решение?

Можно сказать, что на протяжении пятнадцати или двадцати лет большинство математических отделений в стране решали эти вопросы. Со всей определенностью Институт Куранта играл значительную роль в предоставлении правильно обученных математиков, которые так были нужны. Великобритания, старинный бастион практической науки[1)], тоже давала специалистов в прикладной математике. Но математическим отделениям пришлось изменить сам способ работы. Преподавательский контракт в прикладной математике совсем не обязательно похож на преподавательский контракт в чистой. Работы публикуются в разных журналах, и для оценки результатов применяются другие критерии. Прикладному математику необязательно провозглашать и доказывать новые с иголочки теоремы; вместо этого он может быть экспертом в анализе численных данных или создании графических изображений физических явлений. Прикладной математик может создать новый компьютерный язык высокого уровня (так Джон Кемени принимал участие в создании языка BASIC) или сотрудничать с инженерами, физиками, медиками или социологами.

Теперь после стольких усилий вполне можно сказать, что американское математическое сообщество приняло прикладную математику. В некоторых университетах отделения чистой математики и прикладной разделены. Чистые математики могут оставаться чистыми, а прикладные могут делать что им вздумается. Но в большинстве университетов отделение математики только одно и чистые математики сосуществуют с прикладными. В университете, где работает автор этой книги, в колледже наук и искусств только одно отделение математики, почти все, кто там подвизаются, получили классическое чисто математическое образование. Но

[1)] Классический образчик британского ученого «от сохи» — Эрнест Резерфорд (1871–1937). Он так и не принял, например, теории относительности.

многие имеют развитые интересы и в прикладной математике. Двое, изначально специализировавшиеся в теории групп и гармоническом анализе, сейчас изучают статистику. Они сотрудничают с членами медицинской школы и школы социальных работ. Один, тот самый, что занимался гармоническим анализом, сейчас является экспертом в вейвлет-алгоритмах для сжатия изображений и обработки сигналов. Он контактирует с инженерными фирмами и профессорами инженерных и медицинских наук. Другой (автор этой книги) сотрудничает с пластическими хирургами. Еще один работает с инженерами-химиками.

Именно такой симбиоз правительство и администрация университетов пытались установить тридцать лет назад. Это удалось. Хорошая новость — мы разрабатываем новые курсы и программы обучения, соответствующие этим изменениям. Студентам предлагают изучать не только чистую, традиционную математику, но и то, как эта математика применяется. Мы — отделения математики, студенты, правительство и администрация университетов — можем с гордостью сказать, как математика влияет на наш мир:

- математики разработали карбюраторную систему для автомобилей Вольво;
- на математической теории основан принцип работы сотового телефона;
- благодаря математике достигается американское превосходство в радарных и сканирующих технологиях;
- технология изготовления музыкальных и видео компакт-дисков основана на математике;
- именно математика составляет подоплеку теории очередей, теории кодирования, структуры и безопасности сети Интернет;
- вся теоретическая база криптографии — математика;
- математика становится публичной благодаря олимпиадам (международным математическим соревнованиям), фильмам «Умница Уилл Хантинг» и «Игры разума», телешоу «Числа» и пьесе «Доказательство».

Список вполне можно продолжить.

Можно сказать, что сегодня чистая и прикладная математики сосуществуют во взаимно полезном симбиозе. Они не просто терпят друг друга по соседству; они снабжают друг друга идеями и импульсами к развитию. Создается плодотворная рабочая атмосфера, она продолжает развиваться и расти.

Выше уже было сказано, что традиционно математик — волк-одиночка; в офисе или дома он в уединении обдумывает свои мысли и доказывает теоремы. До 1960 г. почти у всех опубликованных работ по математике был только один автор. Сейчас все иначе. В последние

15 лет подавляющее большинство математических работ было написано в сотрудничестве; математик, трудящийся в одиночку, — это, скорее, исключение. Почему так произошло?

Во-первых, симбиоз между чистым и прикладным мирами привел к тому, что люди стали больше *общаться* друг с другом. Автор этой книги занят в исследовательском проекте с пластическими хирургами. Они не разбираются в математике, а я не разбираюсь в пластической хирургии, так что сотрудничество просто необходимо. Мои коллеги работают с инженерами-химиками или физиками точно так же и по тем же причинам.

Нет никаких сомнений в том, что сотрудничество значительно возросло даже среди чистых математиков. Причина в том, что математика как целое стала гораздо сложнее. За последние сорок лет мы узнали о большом числе связей между различными областями математики. Поэтому у тополога все больше причин беседовать со специалистом по анализу, а у геометра — с экспертом в дифференциальных уравнениях. Следствием стал расцвет совместных работ, обогативших и углубивших нашу науку.

У математического сотрудничества есть также социологические и психологические следствия. Работа в одиночку у некоторых математиков вызывает трудности и даже депрессию. Сложные задачи иногда обескураживают и тогда легко возникает глубокое чувство изоляции, глубокой депрессии и неудачи. А хороший коллега может вернуть к жизни, приободрить и дать импульс работе. Мы как профессионалы познали ценность — профессиональную и эмоциональную — совместной работы и чувства локтя. Это хорошо для всех включенных в процесс. В книгах [KRA2] и [KRA3] обсуждается природа сотрудничества в математике.

1.11 МАТЕМАТИЧЕСКАЯ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬ

В этом разделе мы углубимся еще в один аспект, в котором не были искренни до конца. Хотя во многих отношениях математика — самый надежный, безупречный и воспроизводимый набор идей среди когда-либо разработанных, в ней есть некоторые ловушки (см. [KLN]). В частности, в двадцатом столетии математике досталось пинков. Мы обсудим некоторые из них.

Начнем с основ. Когда мы записываем доказательство, так что его можно отправить в журнал, где его изучат, а главное (как мы надеемся) напечатают, мы полагаем, что в целом (математический) мир прочтет, оценит это доказательство и примет его. Это важная составная часть того процесса, который мы называем математикой: именно сообщество профессионалов в целом решает, что корректно и приемлемо, что полезно, интересно и значимо. Создатель новой математической идеи несет ответственность за то, чтобы представить ее математическому сообществу; и уже само сообщество решает, включать работу в канон или нет.

Написать математическую работу — пройти по узкой дорожке. Риторика современной математики подчиняется строгим правилам. С одной стороны, требуется следовать формальным правилам логики. Статья не должна содержать утверждений, принимаемых на веру, догадок или небрежностей. С другой стороны, если автор *действительно* будет включать каждый шаг, *действительно* упоминать каждое используемое правило логического вывода, *не оставляя* никаких пропусков, то даже самое простое рассуждение будет растянуто на несколько страниц, а для *доказательства* существенной математической теоремы их потребуются сотни. Это просто не пройдет. Большинство математических журналов не станут публиковать так много материала, с которым может ознакомиться так мало читателей. Так что на практике некоторые шаги опускаются. Как правило, это мелкие шаги (по крайней мере так считает автор), но для математика не редкость провести пару часов, восстанавливая шаги в длинной статье, в которой автор оставил что-то недосказанным[1)].

Подытожим: *обычно* в доказательстве мы опускаем многие шаги. В принципе читатель может их восполнить. Обычно математики считают неприемлемым оставлять следы, по которым читатель может увидеть, как произошло открытие идеи. И мы твердо верим в пропущенные «очевидные шаги». Мы оставляем много подробностей читателю. Мы демонстрируем конечный продукт, изящный и сияющий. Для нас вовсе необязательно рассказывать читателю, как мы добрались до финишной прямой.

Введем несколько терминов. В математике *множество* — это набор объектов. Это пример математического определения — такого, что описывает новое понятие (а именно, «множество») повседневным языком. Обычно мы обозначаем множество прописной латинской буквой, например S, T или U. Существует целая ветвь математики под названием «теория множеств», она лежит в основании большинства других областей математики. Отцом современной теории множеств обычно считают Георга Кантора (1845–1918). Ее основание относится к концу девятнадцатого и началу двадцатого века.

[1)] Описанная здесь ситуация в какой-то мере напоминает то, что происходит в лабораторных науках. Когда химик выполняет важный эксперимент и описывает его для публикации, это делается в телеграфном стиле. Смысл в том, чтобы в достаточной мере дать читателю понять, как был проведен эксперимент, чтобы при желании его можно было воспроизвести.

Хотя в этой книге не место излагать введение в теорию множеств, мы определим некоторые термины, полезные для дальнейшего обсуждения. Пусть S — множество. Мы говорим, что x является *элементом* множества S и записываем $x \in S$, если x — один из объектов, входящих в множество S. В качестве примера рассмотрим множество S положительных целых чисел:

$$S = \{1, 2, 3, \ldots\}.$$

Тогда 1 — элемент множества S. А также 2 — элемент множества S и 3 тоже и так далее. В таком случае мы записываем $1 \in S$, $2 \in S$, $3 \in S$ и так далее. Отметим, что π не является элементом множества S. Раз $\pi = 3,14159265\ldots$ не является целым числом, оно не является и объектом из S. Записывают это так: $\pi \notin S$.

Теперь можно вернуться к обсуждению саги о теории множеств. В 1902 г. Готтлоб Фреге (1848–1925) радовался тому, что второй том его значительного труда «Основные законы арифметики» [FRE2] находился в печати, когда получил вежливое и скромное письмо от Бертрана Расселла, предложившего такой парадокс[1]:

> Пусть S — набор всех множеств, которые не являются элементом себя. Может ли S быть элементом множества S?

Что здесь парадоксального[2]?

Проблема вот в чем. Если $S \in S$, то по определению множества S оно не является элементом множества S. А если S *не является элементом* множества S, то, согласно тому же определению, S — *элемент* множества S. В любом случае обнаруживается противоречие.

Сейчас самое время вспомнить Архимедов закон исключенного третьего. *Должно* выполняться что-то одно: или $S \in S$, или $S \notin S$, но на самом деле в обоих случаях ситуация приводит к противоречию. В этом и состоит парадокс Расселла. Фреге пришлось еще раз обдумать свою книгу и сделать заметные поправки, чтобы справиться с вопросами, поднятыми парадоксом Расселла[3].

---

[1] Этот парадокс был шоком для Фреге.

[2] Вдумчивый читатель может задаться вопросом: а возможно ли для множества быть элементом самого себя? Здесь есть что-то от жонглирования словами, и выглядит оно сомнительно. Однако рассмотрим такое множество S:

> Набор всех множеств, которые можно описать менее чем пятьюдесятью словами.

Заметьте, что S — множество и его можно описать менее чем пятьюдесятью словами. Ага! Тогда да, конечно же, S — элемент самого себя.

[3] Имеется популярная версия парадокса Расселла. В некотором городе по договору парикмахер (подразумевается мужчина) бреет каждого мужчину, который не бреется сам.

После интенсивной переписки с Расселлом Фреге модифицировал одну из своих аксиом и добавил приложение, объясняющее, как эта модификация учитывает вопросы, поднятые парадоксом Расселла. К несчастью, эта модификация отменяла некоторые результаты из первого тома работы Фреге — уже опубликованного. Второй том в конце концов *появился на свет* ([FRE2]). Но Фреге был до того обескуражен этой историей, что продуктивность его исследований заметно снизилась. Третий том так и не вышел.

Уже после смерти Фреге Лесневский доказал, что обновленная система аксиом, вышедшая из печати, несовместна. Тем не менее Фреге считается одной из самых важных фигур в основаниях математики. Он был одним из первых на пути формализации правил, по которым живет математика, и в этом смысле он был настоящим пионером. Многие соглашаются, что его более ранняя работа «Begriffsschrift und andere Aufsätze» [FRE1] — самая важная из когда-либо написанных работ по логике. Она закладывает фундамент современной логики. Пол Коэн, один из самых выдающихся логиков двадцатого века, так описывает вклад Фреге:

> После публикации эпической работы Фреге «Begriffsschrift» в 1879 г. понятие формальной системы получило ясную форму. Важная работа такого рода была проделана Булем и Пирсом, позднее Пеано продемонстрировал подобный подход, но только с работой Фреге, впервые в истории человеческой мысли, понятие логического вывода получило полную точную формулировку. Работа Фреге включает не только описание языка (теперь мы можем называть его «машинным языком»), но и описание правил работы на этом языке; сейчас мы называем его исчислением предикатов…Но это была веха на пути. Впервые стало можно точно говорить о доказательствах и аксиоматических системах. Работа широко воспроизводилась другими авторами, например Расселом и Уайтхедом, которые дали свои формулировки обозначения, и даже Гильбертом были сделаны попытки переформулировать основные понятия формальной системы.

В более новой (1995 г.) статье Булоса [BOO] были предприняты значительные усилия по спасению большей части оригинальной программы Фреге, изложенной в двухтомнике [FRE2]. У нас был почти век, чтобы поразмышлять над парадоксом Расселла, мы понимаем, что он учит нас тому, что нельзя позволять *множествам* быть *слишком большими*. Множество S, описанное в парадоксе Расселла, непозволительно велико.

Парикмахер не соглашается прикасаться ни к одному мужчине, который когда-либо брился сам. Кто бреет парикмахера? Если он бреется сам, то по договоренности он относится к тем, кого парикмахер не бреет. А если парикмахер не бреется сам, то относится к тем, кого парикмахер брить должен. В любом случае получается противоречие. Такой парикмахер не может существовать.

Теория множеств

Теория множеств имеет дело с наборами объектов. Такой набор называется *множеством*, а объекты, которые в него входят, — *элементами* этого множества. Разумеется, математика имеет дело с множествами различных размеров и видов. Бывают множества точек, множества чисел, множества треугольников и многих других вещей. Особый интерес представляют очень большие множества — *множества*, в которых *бесконечно много элементов*.

В строгом построении теории множеств существуют очень специфические правила, которые определяют, какие множества можно рассматривать, а какие нельзя. В частности, современная теория множеств не разрешает рассматривать множества, которые являются элементом себя. В детали мы не будем здесь углубляться.

Оказалось, что парадокс Расселла — только верхушка айсберга. Никто и не догадывался, чему через тридцать лет научит нас Курт Гёдель (1906–1978).

Говоря неформально, Гёдель показал нам, что в любой достаточно сложной логической системе (т. е. сложной по крайней мере как арифметика) найдется разумное верное утверждение, которое нельзя доказать, исходя из самой этой системы[1]. В этом состоит теорема Гёделя о неполноте. Она появилась как неразорвавшаяся бомба и полностью изменила наше представление о том, чем мы занимаемся[2]. Надо подчеркнуть, что утверждение, к которому пришел Гёдель, нельзя назвать *совсем недоказуемым*. Если оставить специфическую логическую систему и вместо этого перейти к более широкой и мощной, то *можно* предложить доказательство утверждения Гёделя.

То, что он сделал, — невероятно мощно и элегантно. Он нашел способ сопоставить натуральное число (т. е. положительное целое число) каждому утверждению заданной логической системы. Это число носит название *числа Гёделя*. Оказывается, в логической системе утверждения о натуральных числах — на самом деле утверждения о самих утверждениях. Поэтому Гёдель смог сформулировать утверждение U внутри логической системы, а это просто *утверждение о натуральных числах*, которое

[1] Гёдель пошел даже дальше и показал, что невозможно доказать совместность самой арифметики. Арифметика — самая фундаментальная и широко принятая часть оснований математики. Понимание того, что мы никогда не сможем быть уверены, что она не приводит к противоречию, действительно обескураживает.

[2] На самом деле утверждение Гёделя было порождено той самой логической системой, в которой мы работаем.

означает, что «U гласит, что U недоказуемо». Это представляет собой проблему. Ведь если U ложно, то его можно доказать (а этого не может быть, ведь тогда U было бы истинным). А если U истинно, то его нельзя доказать. Мы пришли к истинному утверждению, которое нельзя доказать, *исходя только из самой системы*. Увлекательное и доступное обсуждение идей Гёделя можно найти в книгах [SMU1], [SMU2].

Точно так же квантовая механика учит нас, что природа не вполне детерминистическая — мы не можем знать о физической системе все, даже если нам доступен полный список всех ее начальных условий — так же Гёдель учит нас, что в математике всегда будут утверждения, которые «недоказуемы» или «неразрешимы».

Идеи Гёделя пошатнули фундамент математики. Они оказали глубокое влияние на аналитическую базу нашей науки, на наши ожидания от нее. Имеются также серьезные последствия для теоретических компьютерных наук именно потому, что компьютерные специалисты хотят знать, куда приведет данный язык программирования (они, конечно же, являются системой рассуждения), и что он может дать.

Хорошая новость в том, что следствия из теоремы Гёделя о неполноте редко возникают в повседневной математике. «Утверждение Гёделя» больше комбинаторное, чем аналитическое.

Мы не встречаем такие утверждения в анализе. Но иногда они могут возникать в алгебре, теории чисел и дискретной математике[1]. В теории чисел существовали очень желательные результаты, которые многие пытались установить, но которые оказались неразрешимыми (яркий пример — решение десятой проблемы Гильберта). И конечно же, идеи Гёделя играют важную роль в математической логике.

1.12 ПУБЛИКАЦИЯ И РАСПРОСТРАНЕНИЕ МАТЕМАТИКИ

Пять столетий тому назад ученые часто соблюдали секретность. Они стремились сохранить свои результаты и научные открытия для себя. Даже если другой коллега запрашивал какие-то определенные данные или интересовался определенной идеей, эти ученые уклонялись от ответа. Почему серьезные исследователи поступали подобным образом?

Мы должны понимать, что в те дни мир был другим. Академических постов было мало. Многие ученые занимались своими исследованиями как личным хобби. Кому-то везло — они обзаводились богатыми патронами, которые субсидировали их работу. Понятно, что в такой ситуации легко

[1] Следует сказать, однако, что последнее десятилетие отмечено взаимообогащающим сотрудничеством анализа и комбинаторики. Все сказанное может скоро устареть.

развивались подозрительность и зависть. Во времена Иоганна Кеплера (1571–1630) не было национальных научных фондов или национальных институтов здоровья. Многие известные ученые годами дожидались академической вакансии. Чтобы получить профессорский пост, требовалось решать различные вопросы с патроном, придерживаться верной политики в академических и неакадемических кругах. Даже Риман получил кафедру в Геттингене лишь незадолго до своей кончины.

Один из самых знаменитых ученых, хранивших свою работу в строгом секрете, — Исаак Ньютон. Многие считают его величайшим ученым всех времен; он произвел мириады идей, революционизировавших научную мысль. Он был вспыльчивым, импульсивным человеком, подверженным сменам настроения, друзей у него было очень мало. Как-то раз его статья, которую он представил для публикации, со стороны Роберта Гука (1635–1703) подверглась критике, которую Ньютон встретил очень плохо. После этого он довольно долго ничего не публиковал. Нежелание Ньютона публиковаться означало, что многие ключевые идеи анализа были скрыты за семью печатями. В то же самое время Готфрид Вильгельм фон Лейбниц независимо развивал идеи анализа на своем собственном языке. Лейбниц не страдал сдержанностью в вопросах публикации. И распространение идей Лейбница очень взволновало Ньютона и его последователей. Им показалось, что Лейбниц пытался улизнуть с идеями, которые были впервые созданы Ньютоном. Можно было возразить, что Ньютону следовало опубликовать свои идеи вовремя. Это сняло бы всякие сомнения о том, кто первым создал анализ.

В середине XVII века активным членом различных научных сообществ был Генри Ольденбург. В силу своих личных качеств и связей Ольденбург стал своего рода посредником среди современных ему ученых. Если он знал, что ученый A нуждался в идеях ученого B, то устраивал так, чтобы сблизиться с B и попросить его поделиться этими идеями. Обычно Ольденбургу удавалось отплатить за такую щедрость. Книги в те времена были редки и дороги, а Ольденбург обычно мог предложить научную книгу в обмен на некоторые идеи.

За несколько лет такой деятельности Ольденбург и его тактика стали в каком-то роде признанным установлением. Это позволило ему создать первый реферированный научный журнал в 1665 г. Ольденбург стал редактором-основателем журнала The Philosophical Transactions Королевского лондонского общества. В то время это было отважное и очень нужное предприятие, которое вытеснило полусекретные методы научного общения, одновременно контрпродуктивные и ненадежные. В наши дни журналы — часть структуры нашей профессиональной жизни. Большинство научных исследований публикуются в журналах разного рода.

Современные журналы стали средством нашего профессионального выживания. Любой ученый, который хочет заслужить репутацию, должен публиковаться. Чтобы занять пост, требуется наработать значительный объем научных работ. Это означает, что человек создаст какие-то заметные новые идеи в своей области, прочитает о них лекции и опубликует записи своих размышлений. Этот динамичный круг стал широко известен как девиз publish or perish. По-видимому, такой девиз говорит нам об академических умах.

В последнее время, а особенно после установления грантов Национального научного фонда (NSF) мы живем под девизом publish or perish. Смысл этого выражения в том, что, если ты относишься к академическим кругам и хочешь занять пост, продвинуться в карьере, получить грант, приглашение на конференцию, прибавку к жалованью или добиться уважения и восхищения коллег, ты должен опубликовать оригинальную работу в признанных журналах или книгах. Иначе останешься там, где и был. Кто выдумал девиз publish or perish?

Можно подумать, что президент Гарварда. Или высокопоставленное официальное лицо в NSF. Или декан в Калтехе. В частной беседе один самопровозглашенный эксперт по цитатам высказал предположение, что это был Бенджамин Франклин! А вот и нет, это был социолог Логан Уилсон, написавший в 1942 г. книгу The Academic Man, A Study in the Sociology of a Profession [WILS]. Он писал: «Превалирующий прагматизм требует от академических сообществ, чтобы их члены что-то писали и печатали. Ситуационный императив диктует кредо publish or perish на всех уровнях».

Уилсон был президентом Университета Техаса, а также (ранее) в Гарварде учеником замечательного социолога Роберта К. Мертона. Без сомнения он знал, о чем говорит.

Иногда фразу publish or perish приписывают Маршаллу МакЛугану; возможно, именно он сделал ее популярной. В письме Эзре Паунду от 22 июня 1951 г. он писал (называя университет излюбленным словечком Паунда «тошниловка»):

> Тошниловки поставлены на колени перед этими господами (администрацией фонда). Смотрят на них как на Санта Клауса. Они проведут «исследование чего угодно», если это одобрит Санта Клаус. Они будут думать его мыслями, пока он будет оплачивать счета, чтобы у них была возможность публиковаться. Publish or perish — девиз тошниловки.

1.13 ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ РАЗМЫШЛЕНИЯ

Цель этого раздела — дать читателю представление о динамике математического прогресса и познакомить его с основными принципами математического мышления. Оставшаяся часть книги — очерк истории математики и *анализ* математического мышления. Чем занимается математик? Чего он пытается достичь? И каким методом?

Важен следующий эпистемологический аспект: прежде чем вы сможете убедить кого-то еще, что ваша теорема верна (путем доказательства или чего-то похожего), вы должны быть убеждены в этом сами. Как это происходит? На первых порах мы пользуемся интуицией. Опытный математик просто *уверен* в истинности чего-то, потому что обдумывал это «что-то» на протяжении долгого времени и теперь ясно *видит*, что оно верно. Следующий этап — что-то записать. Здесь под «что-то» математик подразумевает последовательность шагов, очень напоминающую строгое доказательство. После этого уверенность работающего математика достигает определенной степени. Он может захотеть обсудить свою работу.

Но окончательное суждение о том, что истинно, что верно, — это записать корректное рассуждение по строгим правилам математического вывода. Это может потребовать многих месяцев напряженной работы (хотя исходной догадке может быть достаточно нескольких дней или недель). Такова уж природа этого зверя. Математика взыскательна и пленных не берет. Дело математика — записать доказательство так, чтобы другие могли прочитать его, проверить и подтвердить.

Для математика-теоретика приемлемая методология — это *доказательство*. Математик открывает новые идеи или теории, находит способ их сформулировать, а затем должен проверить их. Механизм, который позволяет это сделать, — доказательство в классическом понимании. В следующих главах мы изучим, как возникло понятие доказательства, как оно развивалось, как стало общепринятой методологией предмета и как менялось со временем.

Глава 2

АНТИЧНОСТЬ

Предпочтет договориться, поступиться чем-нибудь.
И лишь изредка, отбросив все сомненья заодно,
Действием поставит точку там, где следует оно.

— Редьярд Киплинг

Для могущественных чар
Нам дадут густой навар.
Жарко, жарко, пламя ярко!
Хороша в котле заварка!

— У. Шекспир, «Макбет»

…Вы возражаете по самому малейшему поводу, отчего я сам себе кажусь глупым животным. Так что мне придется поступить так, как в свое время Сфинкс…

— Огастес де Морган

Мы обычно думаем, что все истинное истинно по каким-то причинам. Я обнаружил математические истины, верные без всяких на то причин. Эти математические истины не подвластны математическим рассуждениям, поскольку они случайны и хаотичны.

— Грегори Хайтин

Я хотел бы задать тот же вопрос, что и Декарт. Вы предлагаете логической правильности дать строгое определение так, чтобы оно соответствовало моему интуитивному ее восприятию. Но как вы собираетесь показать, что получается одно и то же? …Среднему математику нельзя забывать о том, что высшая инстанция — это интуиция.

— Баркли Россер

2.1 ЕВДОКС И КОНЦЕПЦИЯ ТЕОРЕМЫ

По-видимому, первое в истории письменное математическое доказательство, дошедшее до нас, принадлежит вавилонянам. Похоже, что теорема Пифагора (ниже мы обсудим ее подробно) была им, как и китайцам, известна задолго до самого Пифагора[1]. У вавилонян были рисунки, указывающие на то, почему теорема Пифагора верна; были также найдены таблички, подтверждающие этот факт[2]. Ими были разработаны

[1]Однако следует подчеркнуть, что у них не было пифагорейского чувства структуры математики и природы формального доказательства; строгость для них была не важна.

[2]Это знаменитая табличка Плимптон 322 (рис. 2.1).

Рис. 2.1. Табличка Плимптон 322

методы, позволяющие вычислять пифагоровы тройки, т. е. тройки целых чисел a, b, c, удовлетворяющих условию

$$a^2 + b^2 = c^2,$$

которое появляется в теореме Пифагора.

Вавилоняне значительно продвинулись в различных областях математики. Еще в 1200 до н. э. они вычислили значение $\sqrt{2}$ с точностью (как мы теперь говорим) до шести знаков после запятой[1]. Они не «доказывали» теорем в том смысле, который мы вкладываем в это слово сегодня, но у них имелись значительно развитые математические (а не только арифметические) идеи.

Великую традицию организации математики в теоремы[2] начал греческий мыслитель Евдокс (408–355 до н. э.). Евдокс был одним из первых, кто начал использовать это слово в математике. Хотя Евдокс многого достиг в строгости и точности своих математических формулировок, он ничего не доказывал. Формальное доказательство еще не стало традицией в математике. Как мы уже замечали, в те далекие дни математика была по большей части эвристической и эмпирической областью знания. Никому и никогда не приходило в голову, что что-то нужно доказывать. Если вы задаетесь вопросом, войдет ли некоторый стол в вашу столовую[3], вам нет нужды доказывать теорему: вы просто проверяете. Если вам интересно, хватит ли длины изгороди для вашего пастбища, вы не ищете строгих доводов; вы просто устанавливаете изгородь и выясняете, достигнута ли цель. В те далекие дни математики тесно работали с задачами такого типа. Поэтому математическое мышление было почти неотделимо от практического. Именно так его приверженцы смотрели на математические факты. Они были просто практической информацией, а их принятие и проверка — строго прагматичным делом.

[1] Эти вычисления можно найти в табличке YBC 7289. Разумеется, десятичной записью вавилоняне *не пользовались*.

[2] Слово *теорема* греческого происхождения, оно означает «рассуждение».

[3] Уильям Феллер (1906–1970), работавший в Принстонском университете, был блестящим математиком. Он один из создателей современной теории вероятностей. Однажды Феллер и его жена пытались передвинуть большой круглый стол из гостиной в столовую. Они толкали и тащили, поворачивали и разворачивали, но никак не могли продвинуть стол в дверной проем. Было похоже, что стол застрял намертво. Устав и отчаявшись, Феллер с карандашом и бумагой разработал математическую модель ситуации. Через несколько минут ему удалось доказать, что их попытки обречены на неудачу. Пока Уильям был занят этими махинациями, его жена не оставляла стараний, и ей удалось-таки передвинуть стол в столовую.

2.2 ГЕОМЕТР ЕВКЛИД

Евклид (325–265 до н. э.) считается первым ученым, который систематически организовал математику (точнее, существенную часть той математики, которая появилась до него), сформулировал определения и аксиомы, а также доказывал теоремы. Это был монументальный и совершенно оригинальный труд.

Не так знаменит Евклид (по сравнению с Архимедом и Пифагором) за свои оригинальные и глубокие прозрения, хотя некоторые важные теоремы и идеи носят его имя. Он оказал неизмеримое влияние на человеческую мысль. В конце концов, Евклид написал труд (включающий 13 книг), который дошел до нас под названием «Элементы» и к которому постоянно обращались на протяжении более 2000 лет, и который переиздавался много много раз. Его до сих пор подробно изучают, и он продолжает оказывать значительное влияние на наши представления о математике.

О жизни Евклида известно не так много, хотя можно быть уверенным, что у него была своя школа в Александрии. В то время имя Евклид было довольно обыкновенным, и в разных рассказах о математике Евклиде его путают с другими Евклидами (один из них — выдающийся философ). До наших дней дошла похвала Евклиду от Прокла, одного из последних греческих философов:

> Не намного младше их [учеников Платона] Евклид, который собрал вместе «Элементы», упорядочив многие теоремы Евдокса, улучшив многие теоремы Теэтета, а также составив неопровержимые доказательства вещей, которые были не вполне доказаны его предшественниками. Этот человек жил во времена первого Птолемея; Архимед, который последовал сразу за первым Птолемеем, упоминает о Евклиде, а кроме того, говорят, что Птолемей однажды спросил его, существует ли способ выучить геометрию короче, чем его «Элементы», на что он ответил, что «в геометрии нет царского пути». Значит, он моложе окружения Платона, но старше Эратосфена и Архимеда; эти последние были современниками, как об этом где-то упоминает Эратосфен. По своим целям он был платоником, симпатизируя их философии, отчего он и включил в конце «Элементов» конструкцию так называемых платоновых тел.

Как это часто бывает с учеными, художниками и исследователями, достигшими значительных успехов, имеется несогласие и даже некоторые споры о том, кем или чем был Евклид в действительности. Существуют три версии:

- Евклид был историческим персонажем, одним человеком, который действительно написал «Элементы» и другие научные работы, которые обыкновенно ему приписывают;

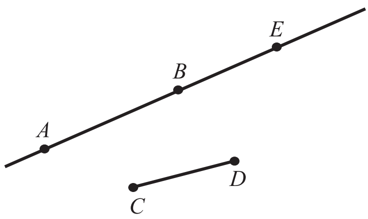


Рис. 2.2. Второй постулат Евклида

- Евклид был лидером команды математиков, работавших в Александрии. Все они внесли свой вклад в создание тех трудов, которые теперь приписывают Евклиду. Они продолжали писать и распространять книги под именем Евклида даже после его смерти;
- Евклида как исторического персонажа никогда не существовало. Евклид *был псевдонимом* группы математиков, работавших в Александрии. Они черпали свое вдохновение от Евклида Мегарского (он-то *был* исторической фигурой), выдающегося философа, который жил приблизительно за сто лет до того периода, к которому принято относить жизнь Евклида.

Большинство исследователей сегодня придерживаются первой версии, что Евклид — один человек, создавший «Элементы». Но следует признать, что существуют доводы и в пользу других двух сценариев. Почти наверное у Евклида была серьезная математическая школа в Александрии, и вряд ли стоит сомневаться, что его ученики участвовали в его изысканиях.

Считается, что Евклид должен был учиться в Афинской академии Платона (430–349 до н. э.), так как в то время вряд ли могло найтись другое место, где можно было узнать о геометрии Евдокса и Теэтета, на которой основаны «Элементы».

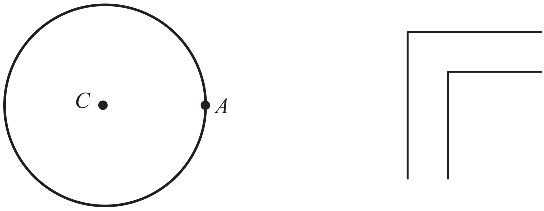
Есть еще одна знаменитая история[1)] про Евклида: один ученик его школы в Александрии пришел к Евклиду, изучив первое утверждение из геометрии «Элементов». Он хотел знать, что получит в результате напряженного учения, выполнив всю необходимую работу и выучив все теоремы геометрии. На это Евклид подозвал своего раба и сказал ему: «Дай ему три драхмы, раз он хочет извлекать прибыль из учебы».

В Евклидовых «Элементах» важна созданная в них парадигма того, как математику следует изучать и записывать. Евклид начал с некоторых определений терминов и идей геометрии, а затем записал пять постулатов (или аксиом). По одной из версий постулаты выглядят так:

P1. Через любую пару различных точек проходит прямая.

P2. Для любого отрезка $\overline{AB}$ и любого отрезка $\overline{CD}$ существует единственная точка E (на прямой, определенной точками A и B) такая, что B лежит между A и E, а отрезок $\overline{CD}$ конгруэнтен отрезку $\overline{BE}$ (рис. 2.2).

[1)] Похожую историю рассказывают и про Платона.



а *б*

Рис. 2.3. Окружность и прямой угол

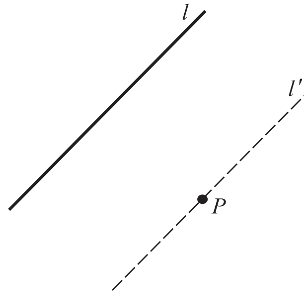


Рис. 2.4. Постулат о параллельных

P3. Для любой точки C и любой точки A, отличной от C, существует окружность с центром C и радиусом CA (рис. 2.3, *а*).

P4. Все прямые углы конгруэнтны (рис. 2.3, *б*).

Это стандартные аксиомы, которые выражают наше понимание евклидовой геометрии. Пятая аксиома — предмет интенсивного изучения на протяжении 2000 лет — это так называемый постулат о параллельных (мы даем его в формулировке Плейфэра):

P5. Для каждой прямой l и каждой точки P, не лежащей на l, существует единственная прямая l', проходящая через P и такая, что l' параллельна l (рис. 2.4).

Перед тем как провозгласить знаменитые пять аксиом, Евклид определил точку, прямую, окружность и другие термины, которые он использует. Хотя Евклид спокойно делал заимствования у более ранних и современных ему математиков, считается, что постулат о параллельных, т. е. постулат P5, — его личное творение.

Однако следует отметить, что «Элементы» — не просто изложение геометрии на плоскости. На самом деле книги VII–IX посвящены теории чисел, там Евклид доказал свой знаменитый результат о том, что простых чисел бесконечно много (мы с ним еще встретимся), а также разработал знаменитый «алгоритм Евклида» деления с остатком. В книге X идет речь об иррациональных числах, а книги XI–XIII посвящены геометрии трехмерного пространства. Короче говоря, «Элементы» Евклида — исчерпывающее собрание большей части математики, известной к тому времени. Она представлена в строгой, точной, аксиоматической манере, которая задала канон — так математика записывается и изучается и в наши дни. «Элементы» Евклида замечательны ясностью, с которой формулируются и доказываются теоремы. Стандарты строгости, которые установил Евклид, стали моделью для создателей анализа почти 2000 лет спустя.

Теория чисел

Теория чисел имеет дело со свойствами целых чисел 1, 2, 3, … . Правда ли, что простых чисел бесконечно много? Как они распределены? Можно ли любое число больше 4 записать в виде суммы двух нечетных простых? Если N — большое положительное число, то сколько найдется простых чисел, которые меньше или равны N?

Это серьезные, классические вопросы. На некоторые из них ответ уже получен, на другие — нет. В наши дни теория чисел играет жизненно важную роль в криптографии. Более 2000 математиков с научной степенью работают в этой области на The National Security Agency, Washington, D. C.

Знаменитый алгебраист Б. Л. ван дер Варден (1903–1996) описывает влияние «Элементов» Евклида следующим образом:

> С момента написания и почти до настоящего времени «Элементы» оказывали непрерывное и мощное влияние на человеческую деятельность. Это был главный источник геометрического вывода, теорем и методов по крайней мере до изобретения неевклидовой геометрии в XIX в. Иногда говорят, что после Библии «Элементы» — наиболее переводимая, публикуемая и изучаемая книга западного мира.

И правда, «Элементы» Евклида выдержали более 1000 изданий. Можно усомниться в том, что Евклид был и до сих пор остается самым важным и самым влиятельным учителем геометрии всех времен. Остается лишь добавить, что до нас дошло еще несколько книг Евклида. Это «Данные» (где изучаются геометрические свойства фигур), «О делении» (где изучается деление геометрических фигур на более мелкие с заданным отношением площадей), «Оптика» (это первый греческий труд о перспективе) и «Явления» (представляет собой элементарное введение в математическую астрономию). Некоторые книги Евклида, включая «Поверхностные места», «Поризмы», «Конические сечения», «Псевдария» и «Деление канона», утеряны.

2.2.1 Специалист в теории чисел Евклид

Для большинства из нас евклидовы «Элементы» — геометрический труд. А на самом-то деле книги VII–IX посвящены теории чисел. Один из результатов, представленных там, выдержал проверку временем, и его доказательство в наши дни изучают все студенты-математики. Сейчас мы его обсудим.

Напомним, что простое число — это положительное целое число, у которого нет делителей, кроме единицы и самого себя. По традиции число 1 не считается простым. Так что к простым относятся числа

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, \ldots .$$

Все числа, которые непросты и больше 1, называются *составными*. Например, 126 — составное число. Действительно,

$$126 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7.$$

Это явно *не простое* число. Любое составное число единственным образом можно разложить в произведение простых делителей. Это утверждает *основная теорема арифметики*.

Евклид задался таким вопросом (в отличие от многих других результатов в «Элементах» этот, по-видимому, принадлежит самому Евклиду): конечно или бесконечно количество простых чисел? Драматический ответ Евклида — да.

Теорема. *Простых чисел бесконечно много.*

Чтобы доказать эту теорему, предположим обратное. Пусть простых чисел конечное количество. Обозначим их p_1, p_2, ..., p_N. А теперь рассмотрим число $P = (p_1 \cdot p_2 \cdot \cdots \cdot p_N) + 1$. Что это за число? Простое или составное? Если мы разделим его на p_1, то получим в остатке 1 (поскольку на p_1 делится произведение $p_1 \cdot p_2 \cdot \cdots \cdot p_N$). Кроме того, если мы разделим P на p_2, в остатке опять получится 1. То же самое произойдет, если разделить P на p_3. Если бы число P было составным, оно бы делилось нацело на какое-нибудь простое. Но мы только что показали, что это не имеет места, — мы делили P на все известные простые числа и каждый раз получали ненулевой остаток. Остается только сделать вывод, что P — еще одно простое число, которое, конечно же, больше любого простого числа из исходного списка. Мы пришли к противоречию. Поэтому простых чисел обязательно бесконечно много. Их должно быть бесконечно много.

Это доказательство Евклида — один из первых примеров доказательства от противного[1]. Этот важный метод формального доказательства действительно был довольно-таки противоречивым на протяжении многих лет. Мы обсудим его довольно подробно позднее.

2.3 ПИФАГОР

Пифагор (569–500 до н. э.) — это и человек, и общество (т. е. *пифагорейцы*). Еще он был политическим деятелем и мистиком. Кроме всего

[1] Существует много других способов доказать результат Евклида, включая прямое доказательство и индукцию. Иначе говоря, *не обязательно* было прибегать к доказательству от противного.

прочего, он выделялся из современников еще и тем, что включал в свою работу женщин наравне с мужчинами. Один критик охарактеризовал его таким словами: «На одну десятую гениальности, а на девять десятых чистого вздора». По легенде, Пифагор умер в пламени своей собственной школы, которую подожгли его политические и религиозные противники. Они восстанавливали народные массы против просвещения, которое жаждал принести Пифагор.

Пифагорейское общество было по природе очень математическим, но заодно еще квазирелигиозным. Среди его заповедей (в соответствии с [RUS]) были такие:

- воздерживайся от бобов;
- не поднимай то, что упало;
- не касайся белого петуха;
- не преломляй хлебы;
- не перешагивай через поперечину;
- не мешай огонь железом;
- не откусывай от целого хлеба;
- не трогай венки;
- не сиди на мере емкостью в одну кварту;
- не ешь сердца;
- не ходи по широкому пути;
- не позволяй ласточкам вить гнездо на крыше;
- если снимаешь горшок с огня, не оставляй следа на золе, но размешай ее;
- не смотри в зеркало возле света;
- когда встаешь ото сна, сверни постель и не оставляй отпечатка тела.

Пифагорейцы создали дух страсти, который мы сразу же замечаем:

> Благослови нас, божественное Число, Ты, кто рождаешь богов и людей.

и еще:

> Миром правит число.

Пифагорейцев помнят за два монументальных вклада в математику. Во-первых, за признание важности и необходимости *доказательств* в математике: пифагорейцы считали, что математические утверждения, в особенности геометрические, должны быть установлены путем строгого доказательства. До Пифагора геометрические идеи представляли собой эмпирически выведенные правила, полученные обычно путем наблюдения и (изредка) измерения. Кроме того, Пифагор ввел в обиход представление о том, что большая область математики (такая как геометрия) может быть выведена из малого числа постулатов. Очевидно, Пифагор оказал влияние на Евклида.

Второй важный вклад Пифагора — открытие и доказательство того факта, что не все числа соизмеримы. Следует уточнить: до Пифагора греки верили с глубокой страстью, что все построено на целых числах. Дроби возникают очень конкретно: как отношения сторон треугольника с целыми длинами (и потому они *соизмеримы*; в наше время вместо этого употребляется термин «рациональны», рис. 2.5).

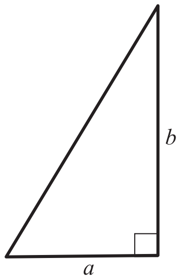


Рис. 2.5. Дробь $\frac{b}{a}$

Пифагор доказал результат, который мы называем *теоремой Пифагора*. Она гласит, что катеты a, b и гипотенуза c прямоугольного треугольника (рис. 2.6) связаны формулой

$$a^2 + b^2 = c^2. \qquad (*)$$

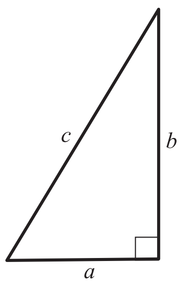


Рис. 2.6. Теорема Пифагора

Возможно, что у этой теоремы имеется доказательств больше, чем у любого другого математического результата — более 50. На самом деле это одно из древнейших математических открытий. По-видимому, оно было известно в Древнем Вавилоне и Китае по крайней мере за пять столетий до Пифагора.

Как это ни удивительно, одно из доказательств теоремы Пифагора было построено американским президентом Джеймсом Гарфилдом (1831–1881). Мы же сейчас приведем одно из простейших рассуждений, ставшее классическим.

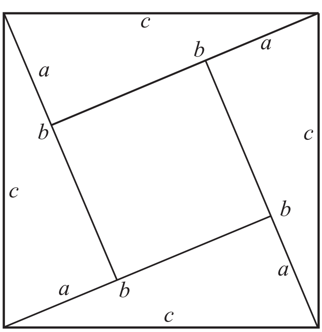


Рис. 2.7. Доказательство теоремы Пифагора

Доказательство теоремы Пифагора. Рассмотрим рис. 2.7. Заметим, что большой квадрат состоит из четырех прямоугольных треугольников и меньшего квадрата. Катеты каждого треугольника равны a и b, а гипотенуза равна c, как в теореме Пифагора. С одной стороны, площадь большого квадрата равна c^2. С другой стороны, площадь большого квадрата равна сумме площадей составляющих его фигур.

Итак, мы можем записать:

$$c^2 = (\text{площадь большого квадрата}) =$$

$$= (\text{площадь треугольника}) + (\text{площадь треугольника}) +$$

$$+ (\text{площадь треугольника}) + (\text{площадь треугольника}) +$$
$$+ (\text{площадь малого квадрата}) =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot ab + \frac{1}{2} \cdot ab + \frac{1}{2} \cdot ab + \frac{1}{2} \cdot ab + (b - a)^2 =$$
$$= 2ab + (a^2 - 2ab + b^2) = a^2 + b^2.$$

Доказательство закончено. ■

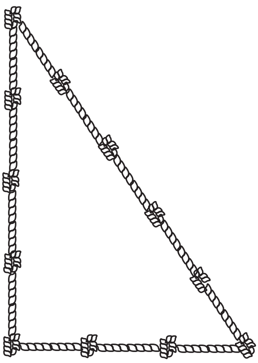


Рис. 2.8. Пифагорова веревка египтян

Согласно одной из легенд, у древних египтян обыкновенно использовался такой инструмент — веревка, на которой через 12 равных промежутков были завязаны узлы. Такая веревка предназначалась для того, чтобы отмерять треугольник со сторонами 3, 4, 5 (рис. 2.8). Так египтяне пользовались теоремой Пифагора для построения прямых углов.

Пифагор заметил, что если $a = 1$ и $b = 1$, то $c^2 = 2$; он поставил вопрос: существует ли рациональное число c, удовлетворяющее последнему равенству. Результат был поразительным.

Теорема. *Не существует рационального числа c такого, что $c^2 = 2$.*

Пифагор утверждает, что гипотенуза прямоугольного треугольника с единичными катетами иррациональна. Это глубокое и тревожное наблюдение!

Доказательство теоремы. Предположим, что утверждение ложно. Тогда существует рациональное число $c = \frac{\alpha}{\beta}$, записанное в виде несократимой дроби (т. е. α и β — целые числа, не имеющие общих делителей) такое, что $c^2 = 2$. Это можно записать еще так:

$$\frac{\alpha^2}{\beta^2} = 2$$

или

$$\alpha^2 = 2\beta^2.$$

Видно, что в правой части стоит четное число; значит, в левой части тоже. Раз α четно, $\alpha = 2m$ для некоторого целого m. А тогда

$$(2m)^2 = 2\beta^2$$

или

$$2m^2 = \beta^2.$$

Теперь четна левая часть, а значит, и β^2. Следовательно, четно число β. В таком случае четны оба числа α и β; у них есть общий делитель — 2. Это противоречит предположению о том, что α и β не имеют общих делителей, так что c не может быть рациональным числом. Значит, оно иррациональное. ■

Апостолом было найдено и чисто геометрическое доказательство иррациональности числа $\sqrt{2}$, см. [BAB1, с. 73]. Пифагорейцы осознавали глубину и потенциальную социальную важность этого открытия. К тому времени в сознании греков укоренилось убеждение в том, что все числа рациональны. Провозгласить обратное было почти ересью. Какое-то время пифагорейцы хранили новое открытие в секрете. В конце концов, по крайней мере так гласит легенда, невежественными ордами мародеров пифагорейцы были уничтожены. Но их универсальные идеи живут и сейчас.

Глава 3

СРЕДНИЕ ВЕКА И АКЦЕНТ НА ВЫЧИСЛЕНИЯХ

В каждой естественной науке заключено столько истины, сколько в ней есть математики.

— Иммануил Кант

Ибо, как с обширными пространствами современной математики могут сравниться жалкие лоскуты, — отдельные неполные и бессвязные результаты, полученные интуиционистами?

— Давид Гильберт

Последовательность для понимания математики может быть такой:

интуиция, **пробы** и **ошибки**, **размышления**, **гипотезы**, **доказательство**.

Комбинация и последовательность этих событий отличаются в разных областях, но принято считать, что конечный продукт — это строгое доказательство, которое мы знаем и можем одобрить без формального совета логиков.

— Саундерс Маклейн

Действительно, каждый математик знает, что доказательство осталось «не понятым», если все, что сделано, — это пошаговая проверка правильности умозаключений, из которых оно состоит, и не предпринято никаких попыток получить ясное представление об идеях, которые привели к построению именно этой, а не иной цепочки рассуждений.

— Николя Бурбаки

3.1 ВЛИЯНИЕ ИСЛАМА НА МАТЕМАТИКУ

История Ближнего Востока и мусульманства сложна и запутанна, в ней много белых пятен. Религия ислама зародилась в Аравии и сохраняется там до сих пор. То, что одни называют «арабской математикой», другие назвали бы «исламской» или «мусульманской» математикой. Одна из важнейших фигур, которые мы будем обсуждать, — Мухаммад ибн Муса аль-Хорезми. Насколько известно, он родился в Багдаде около 780 г. Так что мы не очень промахнемся, если назовем его арабом, но чаще его относят к исламским математикам или персидским математикам. По-видимому, мусульманская культура была движущей силой многих прорывов средневековья. Так что мы будем придерживаться названия «исламская математика».

В начале седьмого века мусульмане образовывали небольшую гонимую секту. Но к концу того же века под предводительством Мухаммада они завоевали земли от Индии до Испании, включая Северную Африку и Южную Италию. Считается, что когда арабские завоеватели основывали новые города, они стали подвержены болезням, с которыми не сталкивались раньше, когда жили в пустыне. В те дни медициной занимались преимущественно греки и иудеи. Поощряемые калифами (так назывались лидеры исламского мира), эти доктора селились в Багдаде, Дамаске и других городах. Это пример того, как чисто социальная ситуация привела к контактам двух различных культур, что в конце концов привело к передаче математических знаний.

Около 800 г. калиф Гарун Аль-Рашид заказал перевод на арабский язык многих трудов Гиппократа, Аристотеля и Галена. Спустя долгое время в XII в. эти арабские переводы были переведены еще раз, теперь уже на латынь, чтобы сделать их доступными европейцам. Сегодня мы благодарим мусульман за сохранение великой греческой традиции в математике и естественных науках. Без их усилий многие классические труды были бы утеряны.

3.2 РАЗВИТИЕ АЛГЕБРЫ

3.2.1 Аль-Хорезми и основания алгебры

Принято считать, что зачатки алгебры появились у индусов. В частности, Арья-Бхата в пятом веке и Брахмагупта в шестом и седьмом веках сыграли важную роль в развитии алгебраических идей. Среди достижений этих математиков следует упомянуть суммирование первых N положительных целых чисел, а заодно их квадратов и кубов (мы будем обсуждать это в гл. 12).

Но исламская экспансия два века спустя привела к распространению этих идей в исламскую империю, и их развитию посодействовало множество новых талантов. Возможно, самым ярким и самым знаменитым исламским математиком был Мухаммад ибн Муса аль-Хорезми (780–850). В 830 г. этот ученый написал алгебраический текст, который стал прорывом в этой теме.

Эта книга называется «Китаб аль-джебр ва-ль-мукабала» (переводится как «Краткая книга восполнения и противопоставления»). Именно здесь появился хорошо нам известный термин «алгебра» (от «аль-джебр»). Слово «джебр» относится к равновесию, которое сохраняется в уравнении, если к обеим его частям прибавить одно и то же число (выражение «аль-джебр» также получило значение «костоправ»)[1]; слово «мукабала» относится к сокращению равных количеств из обеих сторон уравнения.

[1] В 1895 г. в России вышел новый перевод знаменитого романа про Дон-Кихота. В конце XV главы рыцарь Зеркал и его оруженосец со страшным носом имели счастье найти алгебриста, который и перевязал раны несчастного побежденного рыцаря. Переводчику пришлось объяснять значение слова «алгебрист» в примечании: «Слово *algebrista* происходитъ отъ *algebrar* и по Коваррубiасу означало въ прежнiя времена искусство

Еще одна книга аль-Хорезми, «Искусство индийского счета» вводит систему нумерации, которую мы называем арабской: 1, 2, 3, 4, ... Современное слово «алгоритм» происходит от одного варианта произношения аль-Хорезми, и некоторые из его идей стали вкладом в это понятие.

Стоит отметить, что хорошие математические обозначения могут составить разницу между ясной идеей и запутанной. Арабы, как и их предшественники, страдали от недостатка символики. Когда они выполняли алгебраические операции и решали задачи, они все описывали *словами*. Ученые, изучающие тот период, любят говорить, что арабские обозначения были «риторическими», без каких бы то ни было символов. Например, обычно мы обозначаем неизвестное в алгебраическом уравнении буквой x, но арабы называли это неизвестное «нечто».

Более того, арабы обычно выполняли решения алгебраических задач используя геометрические фигуры. У них не было эффективного метода записывания решений, какими мы пользуемся сейчас. Ясно, что аль-Хорезми очень четко формулировал идеи об алгоритмах решения полиномиальных уравнений. Но у него не было обозначений, чтобы записать эти решения так, как это делаем мы. У него не было интеллектуального оборудования (формализма и языка), чтобы формулировать и доказывать теоремы.

3.3 ИССЛЕДОВАНИЯ НУЛЯ

У понятия нуля — длинная яркая история. Еще в 600 до н. э. в арифметике вавилонян был символ для обозначения нуля. Но совершенно ясно, что у них были сомнения насчет того, что же «нуль» в действительности обозначает. Разве можно использовать определенный и явный символ для ничего?

Несколько позднее древних греков занимал вопрос существования материи и сущности бытия. Понятие нуля претило грекам.

В средние века нуль получил религиозные обертоны. Казалось, что понятие «ничто» связано с душой и духовностью. Во многих ситуациях нуль было запрещено даже обсуждать. Люди опасались впасть в ересь И только в XVI в. нуль стал приносить пользу в коммерции. Иногда ведь случается, что купец распродает все единицы товара A. И тогда бывает полезно записать, что «на складе осталось нуль единиц товара A». Мало-помалу идея нуля была включена в обычную математическую речь. Возражения отпали сами собой.

вправлять сломанныя кости. И теперь еще на нѣкоторыхъ вывѣскахъ цирюльниковъ-хирурговъ можно видѣть надпись: *algebrista y sangrador*.» — *Прим. перев.*

Можно быть почти уверенным, согласно авторитетному источнику [IFR], что концепцию нуля придумали индусы в раннем средневековье. Приведенная схема (ее сообщил мне Давид Г. Бэйли) дает представление о процессе рождения нуля и связанных с этим идей.

Появилась «Локавибага», текст о космологии Джэйна, в котором встречается нуль как значащая цифра.	458
Ариабхата изобретает метод записи чисел, используя нуль как значащую цифру.	510
Астроном и астролог Варахамихра использует позиционную запись чисел на санскрите.	575
Арифметик Джинабхадра Гани использует числовые выражения с позиционной записью.	590
В записях о приношении меди Дадды II Санкхедского из Гуджарата встречаются девять чисел, записанных в позиционной системе.	594
В камбоджийских записях на санскрите встречаются словесные обозначения, использующие позиционную систему.	598
Исламский математик аль-Хорезми использует арабские числа, включая нуль.	820
Герберт Аурильякский изучает «арабскую систему» позиционной записи в исламской Испании.	980
Герберт Аурильякский вводит арабские числа в Европе в Реймсе.	990

Так что именно Герберт Аурильякский ввел арабские цифры и позиционную запись чисел в Европе. Его усилия встретили яростное сопротивление. Тому были и культурные, и религиозные причины; христиане строго придерживались романской традиции, включая римские цифры. Уже после смерти Герберта его все еще обвиняли в том, что он был алхимик, волшебник и продал душу Люциферу.

Крестовые походы Ричарда Львиное Сердце во многом способствовали возвращению культурных достижений из Святой Земли в Европу, они таким образом завершили многое из того, чего не удалось достичь вдохновению и энергии Герберта. Леонардо Пизанский (1170–1250), больше известный как Фибоначчи, посетил исламские Северную Африку и Средний Восток. Там он познакомился с арабской арифметикой, техникой вычислений, правилами алгебры и основными идеями арабской геометрии. В книге Фибоначчи «Liber Abaci» (Книга Абака) многие из этих ключевых идей изложены для европейского читателя. В те времена многие признанные авторитеты пользовались в своем ремесле абаком[1] —

[1] История абака и вычислительных машин описана в разд. 7.1.

все они были приверженцами традиционных римских цифр — и отчасти название книги было выбрано из политических соображений, чтобы не ссориться с абацистами.

Арабы называли нуль *сифр*, что означает «пустой». Это перевод санскритского слова «шунья». Когда понятие добралось до Европы, стал использоваться омофон *зефир*, что означало «западный ветер». В «Книге Абака» Фибоначчи использует термин *зефирум*, итальянский вариант этого слова — *зефиро*. Именно он привел к современному *зеро*.

Наконец, после Французской революции абак был запрещен в школах, и окончательно утвердилась арабская позиционная система записи чисел.

Легко сообразить, что похожими и еще более резкими возражениями были встречены отрицательные числа. Однако со временем стало понятно, что отрицательные числа могут быть полезны в коммерции (выражая долг), так что они тоже постепенно были включены в математический канон.

Нам сегодня пользоваться нулем и отрицательными числами легко и приятно. Мы можем *сконструировать* числовые системы, включающие 0 и -5, так что нет никакой тайны в том, откуда эти числа берутся. Религиозный аспект в этих вопросах сошел на нет, так что остается немного возражений против расширенного понятия числа.

Можно сказать, что математические абстракции и *доказательство* действительно помогли принять концепции нуля и отрицательных чисел. В средние века, когда было неясно, как возникают эти загадочные числа или что они точно означают, они были окружены мистической аурой. Мысль того времени испытывала большое влияние со стороны религии, а люди того времени опасались, что непонятные им вещи могут оказаться дьявольским творением. Символ, призванный обозначать ничто, подозревали в том, что он несет на себе знак зла и служит сатанинскому делу. В разные времена разные люди действительно *запрещали* явно упоминать нуль или отрицательные числа. Иногда в печати их просто называли «запрещенными» или «дьявольскими». История нуля ярко обрисована в книге [KAP1]. Авторы демонстрируют, что нуль — действительно важное и иногда противоречивое понятие, значительно повлиявшее на человеческую мысль.

Как мы уже сказали, математическая теория помещает нуль на прочное основание. Возможно использовать теорию классов эквивалентности (см. [KRA5]), чтобы *построить* систему целых чисел, а на самом деле *доказать*, что она существует и обладает всеми ожидаемыми свойствами. Теперь ясно, что эта система — порождение человеческого разума, а не дьявольской или другой какой злобной силы[1]. Поскольку конструкция возникает исключительно мысленно и следует проверенным временем правилам логики, что типично для математического метода, налицо процесс, который делает результат приемлемым и неугрожающим. Это триумф математики и ее культуры.

3.4 ИДЕЯ БЕСКОНЕЧНОСТИ

В исторической перспективе затруднения с бесконечностью были еще более острыми и устрашающими, чем затруднения с нулем. Опять возникли религиозные причины. Многие полагали, что мысли о бесконечности восходят к мыслям о Творце. Считалось, что если кто-то осмеливался *манипулировать* с бесконечностью как с математическим объектом, подобно тому как мы работаем с числами, переменными и другими математическими конструктами, то этим он выказывает крайнее неуважение и панибратское отношение к Божественному. Даже высокообразованные люди опасались обвинения в ереси и святотатстве.

Многие известные математики XIX в. строго запрещали всякие дискуссии о бесконечности. Рассуждения о бесконечном были полны парадоксов и явных противоречий, наводивших на мысль о серьезных пробелах в основаниях математики. Такие идеи только усугубляли опасения и неуверенность. В наши дни принят изощренный взгляд на нашу науку. Мы больше разбираемся в основаниях математики, у нас есть методы обращения с (видимыми) парадоксами и несоответствиями. В XIX в. у математиков не было такой экипировки. Они были беспомощны, когда в математике обнаруживались парадоксы, лакуны или путаница, так что им приходилось просто избегать запутанных явлений. Понятие бесконечного как раз и было источником многих недопониманий и заблуждений. Этой темы избегали чаще всего. А боязнь религиозных нарушений давала удобный повод придерживаться такого курса.

В конце XIX в. математику Георгу Кантору (1845–1918) удалось, наконец, приручить понятие бесконечности. Он показал, что существует много «уровней» или «степеней» бесконечности. Кантор смог доказать несколько поразительных результатов в классических областях, таких как трансцендентные числа[2], опираясь на свои идеи о бесконечности.

---

[1] Стоит поразмыслить к каким идеям относится идея нуля: к платоновым или кантовым; см. разд. 1.7.

[2] Действительное число называется *алгебраическим*, если оно является корнем полиномиального уравнения с целыми коэффициентами. В противном случае, оно называется *трансцендентным*. Например, число $\sqrt{2}$ — алгебраическое, поскольку служит

Кантор страдал от неистовых и злобных нападок — даже со стороны своего старшего коллеги Леопольда Кронекера (1823–1891) — на идеи о бесконечности. Отношения Кантора и Кронекера были очень сложными, и до сих пор не вполне ясно, какую роль сыграл Кронекер в проблемах Кантора. Сегодня мы знаем, что Кантор страдал от биполярной депрессии. Кроме того, Кронекер умер на 27 лет раньше Кантора.

Кантор провел значительное время в психиатрической лечебнице в попытке справиться с клеветой и постоянной депрессией. Под конец жизни Кантор разочаровался в математике, значительную часть своих последних дней он затратил на то, чтобы доказать, что автором пьес Шекспира был Френсис Бэкон.

Канторовы понятия о бесконечности — его концепция *кардинальности* и метод наслоения бесконечных множеств различных порядков или мощностей — вошли в ряд самых глубоких и оригинальных идей, когда-либо созданных в математике. Эти идеи сегодня стали общепринятыми и служат составной частью фундамента математики. Но во времена самого Кантора эти идеи вызвали много возражений. Оригинальность дается не даром, и Кантор столкнулся с жесткой предубежденностью и страхами, коренящимися в религиозной догме. Некоторые упирали на то, что Кантор был евреем, и многие нападки были бесстыдно антисемитскими, хотя на самом деле иудеем Кантор *не был*. Ничего удивительного нет в том, что Кантор был подвержен депрессии, отчаянию и нежеланию двигаться дальше.

В конце его жизни появился Кронекер и стал поддерживать Кантора и его идеи. Другие влиятельные математики тоже начали прозревать и поддерживать программу изучения бесконечного. Но они опоздали (по крайней мере для несчастливого Георга Кантора). Кантор был сломлен. Он сполна получил признание за свои идеи только после смерти; при жизни ему пришлось испытать много страданий.

корнем полиномиального уравнения $x^2 - 2 = 0$. Число π — *не* алгебраическое (и значит, трансцендентное), так как не является корнем никакого полиномиального уравнения с целыми коэффициентами. Это последнее утверждение довольно сложно доказать.

Глава 4

ЗАРЯ НОВОГО ВРЕМЕНИ

У каждой эпохи свои мифы. Их называют высшими истинами.

— Аноним

Я решил оставить только абстрактную геометрию, т. е. вопросы, которые служат лишь для упражнения ума, с целью изучить другую геометрию, которая служит для объяснения явлений природы.

— Рене Декарт

В физике открывать больше нечего. Все, что нам осталось, — все более и более точные измерения.

— Лорд Кельвин

В настоящее время очевидно, что концепция общепризнанного, неопровержимого свода логических рассуждений — величественная математика 1800-х гг. и предмет гордости человечества — это грандиозная иллюзия. Неопределенность и сомнения относительно будущего математики пришли на смену уверенности и беспечности прошлого. Разногласия об основах «самой определенной» науки одновременно поражают и, мягко говоря, вводят в замешательство. Нынешнее состояние математики — это насмешка над глубоко укоренившимися и широко известными истинами и логическим совершенством математики.

— Морис Клайн

Хорошее доказательство то, которое делает нас умнее.

— Юрий Манин

4.1 ЭЙЛЕР И ГЛУБИНА ИНТУИЦИИ

Леонард Эйлер (1707–1783) — один из величайших в мире математиков. А также один из самых плодотворных. Собрание его сочинений занимает более 70 томов, их изучают до сих пор. Эйлер работал во всех областях математики, а также механики, физики и других естественных наук. Математикой он занимался почти без усилий, иногда между другими делами, *качая* на коленке внука. К концу жизни он отчасти потерял зрение, но заявил, что это позволяет ему концентрироваться эффективнее; и действительно, его научная производительность даже *возросла*.

Эйлер демонстрировал замечательное сочетание математической строгости и математической интуиции. У него были глубочайшие в истории математики прозрения и самые грубые промахи. Один из них — вычисление бесконечной суммы

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$$

Чтобы проанализировать эту сумму, нужно правильно складывать первые несколько членов и смотреть, нет ли какой закономерности. Примерно так:

$$1 - 1 = 0;$$
$$1 - 1 + 1 = 1;$$
$$1 - 1 + 1 - 1 = 0;$$
$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 = 1;$$

и так далее. Эти суммы начальных слагаемых называются *частичными суммами*. Если частичные суммы образуют какую-то закономерность и стремятся к некоторому пределу, то говорят, что исходная сумма (или *ряд*) сходится. В противном случае, он расходится. Мы видим, что частичные суммы для этого конкретного ряда поочередно принимают значения 0 и 1. Они не стремятся ни какому пределу. Так что ряд расходится.

Но Эйлер (и никто другой в его время) не знал, как правильно исследовать ряды. Он рассуждал так:

Если сгруппировать члены ряда в виде

$$(1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \ldots,$$

то сумма, очевидно, равна $0+0+0+\cdots = 0$. Но если группировку провести иначе:

$$1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \ldots,$$

то сумма, очевидно, равна $1 + 0 + 0 + 0 + \cdots = 1$. Эйлер заключил, что в этой ситуации имеет место парадокс[1)].

Сегодня Эйлера помнят за глубокий вклад в теорию чисел, геометрию, вариационное исчисление, комплексный анализ и дюжину других областей математики и физики. Все его промахи забыты. Именно его решимость рисковать и ошибаться сделала его столь эффективным математиком.

И над этими словами стоит подумать. Математик по природе — исследователь, и обыкновенно исследователь, который не представляет, что ему искать. Часть повседневной жизни математика — ошибаться, тратить дни на вычисления, не приводящие ни к какому выводу, идти по пути, который, как потом выясняется, не ведет никуда. Но если продолжать анализировать и критически мыслить и безжалостно взирать на все эти

[1)] Можно отметить еще, что Эйлер использовал изощренную аргументацию, чтобы показать, что $1 + 2 + 4 + 8 + \cdots = -1$.

попытки, то, возможно, удастся сделать разумный вывод. В конце концов, можно сформулировать теорему. А затем, проделав еще раз большую работу, эту теорему можно доказать. Это фантастическое приключение, в нем бывают свои западни, тупики и ловушки. Это и есть жизнь математика.

4.2 ДИРИХЛЕ И ЭВРИСТИЧЕСКИЙ БАЗИС СТРОГОГО ДОКАЗАТЕЛЬСТВА

Петер Густав Лежен Дирихле (1805–1859) — один из величайших специалистов в теории чисел XIX в. Его отца звали Лежен, это имя происходит от прозвища «Le jeune de Richelet», по-русски — «молодой человек из Ришле». Семья Дирихле — выходцы из бельгийского города Льежа. Отец был почтмейстером в Дюрене, в этом городе и родился Питер. Страсть к математике он проявил еще в очень молодом возрасте; на книги по математике он тратил свои карманные деньги. В 12 лет он поступил в гимназию в Бонне[1)], зарекомендовал себя примерным учеником, выказав в равной мере интерес к истории и математике.

После двух лет обучения в *гимназии* родители Дирихле решили, что предпочли бы видеть его в иезуитском колледже Кельна. Там он попал к выдающемуся ученому Георгу Ому (1787–1854). К шестнадцати годам Дирихле закончил школьное обучение и был готов к поступлению в университет. В то время университеты Германии были не так хороши, стандарты обучения в них высокими назвать было никак нельзя, и Дирихле решил продолжить обучение в Париже. Стоит отметить, что через несколько лет университеты Германии получили мировое признание как образцовые; сам Дирихле в значительной мере способствовал тому, чтобы установить их превосходство.

Дирихле всюду носил с собой экземпляр «Disquisitiones arithmeticae» (блестящий труд Гаусса по теории чисел), книгу, которую он высоко чтил. Так другие не расстаются с Библией. Итак, Дирихле приехал на учебу в Париж, но вскоре заболел. Он не позволил болезни помешать ему посещать лекции в Collège de France и на факультете наук. Дирихле посчастливилось заниматься под руководством таких ведущих ученых

[1)] Здесь следует сделать пояснение. В Соединенных Штатах *гимназия* — это место, где играют в баскетбол и занимаются на гимнастических снарядах. В Германии *гимназия* — это классическая старшая или средняя школа для одаренных учеников. Они поступают в гимназию в возрасте 10 или 11 лет и (в Западной Германии) обучаются там 9 лет. Последний год обучения в гимназии сравним с первым годом обучения в колледже.

того времени, как Био, Фурье, Франкер, Ашетт, Лаплас, Лакруа, Лежандр и Пуассон.

В начале лета 1823 г. Дирихле жил в доме отставного генерала Максимиллиана Себастьяна Фуа, обучая немецкому языку жену и детей генерала. Семья генерала очень хорошо относилась к Дирихле, и у него оставалось время еще и на занятия математикой[1]. Именно в тот период он опубликовал свою первую статью, которая мгновенно его прославила. Речь в ней шла о Великой теореме Ферма. Она утверждает, что у диофантова[2] уравнения

$$x^n + y^n = z^n$$

нет целых решений x, y, z, когда n — положительное целое число больше 2. Случаи $n = 3$ и $n = 4$ уже были рассмотрены Эйлером и самим Ферма. Дирихле решил сразиться со случаем $n = 5$. Он разбивается на два подслучая, и Дирихле удалось справиться с подслучаем 1. Рецензентом статьи стал Лежандр; ознакомившись с ней, он смог справиться и с подслучаем 2. После этого в 1925 г. была опубликована статься, в которой полностью был решен случай $n = 5$ Великой теоремы Ферма. Впоследствии Дирихле построил собственное доказательство для подслучая 2, обобщив свой метод, использованный в подслучае 1. Еще позднее Дирихле рассмотрел еще и случай $n = 14$.

В ноябре 1825 г. генерал Фуа умер, и Дирихле решил вернуться в Германию. Однако, несмотря на поддержку Александра фон Гумбольдта, он не смог занять пост ни в одном германском университете, так как не подал *требуемую* работу. Математические достижения Дирихле были достаточны для такой диссертации, но ему не позволили ее подать, так как а) у него не было докторской степени и б) он не владел латынью. К счастью, Кельнский университет наградил Дирихле докторской степенью. Он подал диссертацию по многочленам с простыми делителями и занял пост в университете Бреслау. Но назначение Дирихле все равно многим казалось неоднозначным, и на факультете было много толков о том, насколько оно было заслуженным.

Но уровень университета Бреслау был довольно низким и Дирихле все равно оставался недоволен. Ему удалось, опять с помощью Гумбольдта, перевестись в Военный колледж в Берлине. У него также была договоренность, что ему позволят преподавать в Берлинском университете — одном из лучших учебных заведений тех дней. Со временем Дирихле получил

---

[1] Кроме того, Фуа представил Дирихле известному математику Фурье, видимо, тогда и возникло увлечение рядами Фурье, которое не оставляло Дирихле всю жизнь.

[2] Диофантовым уравнением называется уравнение, для которого требуется отыскать целые решения.

Диофантовы уравнения

Диофантовым уравнением называется уравнение (обычно с целыми коэффициентами), для которого требуется найти целочисленные решения. Возможно, самое известное диофантово уравнение всех времен — уравнение Пифагора

$$x^2 + y^2 = z^2.$$

В этой книге мы обсуждаем, как это уравнение возникает при изучении прямоугольных треугольников. Существует бесконечно много троек — решений этого уравнения. Еще одно известное диофантово уравнение — это уравнение Ферма

$$x^k + y^k = z^k,$$

где k — целое число больше 2. Ферма утверждал, что умеет изящно доказывать несуществование корней этого уравнения, но на самом деле еще более трех столетий спустя не было известно ни одного доказательства этого факта. И наконец, в конце XX в. Эндрю Уайлс и его ученик Ричард Тейлор доказали, что у этого диофантова уравнения корней действительно нет. Они использовали современные методы, которые никак не могли быть известны Ферма.

там должность профессора и преподавал до 1855 г. Поскольку он оставил за собой должность в Военном колледже, у него было чрезвычайно много преподавательских и административных обязанностей.

Кроме того, в 1831 г. Дирихле удостоился приглашения в Берлинскую академию. Он поправил свои финансовые обстоятельства, что позволило ему жениться на Ребекке Мендельсон, сестре знаменитого композитора Феликса Мендельсона. В Берлинском университете Дирихле получил полуторагодовой отпуск и провел это время в Италии в обществе Карла Якоби (тот находился там с целью поправить здоровье).

В 1845 г. Дирихле вернулся к своим обязанностям в Берлинском университете и в Военном колледже. Работа в двух учреждениях по-прежнему доставляла ему много хлопот, о чем он жаловался своему ученику Кронекеру. Так что, когда в 1855 г. умер Гаусс и Дирихле предложили наследовать почетную кафедру в университете Геттингена, это стало настоящим облегчением.

Дирихле попытался воспользоваться новым предложением как способом получить лучшие условия в Берлине, но это не сложилось, и он переехал в Геттинген. Там он наслаждался спокойной жизнью и обществом нескольких выдающихся учеников. К несчастью, эти новые благословенные условия радовали его недолго. В 1858 г. Дирихле не пережил инфаркта, а вскоре от удара скончалась и его жена.

Вклад Дирихле в математику монументален. Мы уже рассказали о его работе над Великой теоремой Ферма. Кроме того, Дирихле приложил руку к изучению гауссова квадратичного закона взаимности. Можно сказать, что Дирихле был отцом аналитической теории чисел. В частности, он доказал первые результаты о простых числах в арифметической прогрессии[1].

У Дирихле была мощная интуиция, которая решительно направляла его мысли, когда он занимался математикой. Однако строгость его работ была широко признана. Сам Карл Якоби (1804–1851) как-то сказал:

> Если Гаусс утверждает, что доказал какой-то факт, мне кажется это вполне вероятным. Если такое утверждает Коши, то это может быть правдой, а может и не быть, но если это говорит Дирихле, так оно и есть.

Дирихле продвинулся в области, которая позднее стала называться (с легкой руки Эмми Нетер) *теорией идеалов*. Он придумал *ряды Дирихле*; сегодня они являются мощным средством специалистов по аналитической теории чисел. А еще он сделал вклад в основания *теории полей классов* (позднее ее развил Эмиль Артин).

Мы помним Дирихле за одно из первых строгих определений понятия функции. Кроме того, он был одним из первых, кто строго сформулировал, по крайней мере для рядов Фурье, как следует понимать выражение «ряд *сходится*» (несколько раньше этим вопросом занимался Коши). Мы помним его и как одного из создателей теории рядов Фурье.

У Дирихле было несколько учеников, оставивших след в истории математики, включая Кронекера и Римана. Риман продолжил дело учителя, совершив определяющие достижения в теории комплексного переменного, рядах Фурье и геометрии.

---

[1] Лишь недавно в работе [GRT] Бенджамин Грин и Теренс Тао доказали, что существуют сколь угодно длинные арифметические прогрессии, состоящие из одних только простых чисел. Арифметическая прогрессия — это последовательность чисел, разделенных равными промежутками. Например

$$3; \quad 5; \quad 7$$

— последовательность трех простых чисел, следующих друг за другом через промежутки длины 2. Это арифметическая прогрессия *длины* 3, состоящая из простых чисел. Еще один пример:

$$11; \quad 17; \quad 23; \quad 29$$

— последовательность из четырех простых чисел, следующих друг за другом через промежутки длины 6. Это арифметическая прогрессия *длины* 4. Сумеете ли вы отыскать арифметическую прогрессию длины 5, состоящую из простых чисел? Отметим, что Грин и Тао использовали очень абстрактные методы, чтобы установить существование арифметических прогрессий произвольной длины, состоящих из простых чисел.

4.2.1 Принцип Дирихле

В наши дни комбинаторика, теория чисел и конечная математика относятся к увлекательнейшим дисциплинам. Криптография, теория кодирования, теория очередей и математические основы программирования — все они опираются на технику подсчетов. Но сама идея «подсчета» как науки сравнительно нова.

Дирихле был одним из величайших творцов теории чисел. Многие теоремы и идеи в этой области носят его имя. Но на самом деле он терпеть не мог тратить время на поиски строгих доказательств своих новых открытий. Обычно он руководствовался изощренной интуицией и глубоким проникновением в глубины основных идей. Строгие доказательства полученных результатов он оставлял коллегам и будущим поколениям.

Дирихле был одним из первых мастеров в теории подсчетов. Особенно знаменит один из его важнейших принципов подсчета, изначально известный под названием «Dirichletscher Schubfachschluss» или «Dirichletscher Schubfachprincip» (Принцип ящиков Дирихле, или просто принцип Дирихле). У этой необыкновенно простой идеи есть глубокие следствия. Само утверждение заключается в следующем:

> Если разложить $n+1$ писем в n почтовых ящиков, то в каком-то из ящиков окажется по меньшей мере два письма.

Это совсем простая идея (хотя ее *можно* математически строго доказать, см. гл. 12). Согласно ей, например, можно положить 101 письмо в 100 ящиков, и тогда в каком-то из ящиков окажется по меньшей мере два письма. Утверждение хорошо согласуется с интуицией. Этот принцип оказывается весьма продуктивным математическим методом. Например, если в одной комнате собираются 13 человек, хотя бы у двух из них дни рождения приходятся на один месяц. Почему? Представьте себе, что месяцы — это ящики, а дни рождения — письма.

Дирихле применял свой принцип, чтобы доказывать глубокие и значительные факты из теории чисел. Вот один важный результат, носящий его имя и очень часто цитируемый и по сей день:

Теорема. *Пусть ξ — действительное число. Если $n > 0$ — целое, то существуют целые p и q такие, что $0 < q \leqslant n$ и*

$$\left|\frac{p}{q} - \xi\right| < \frac{1}{nq}.$$

Ключевая идея в теории чисел состоит в том, что иррациональные и трансцендентные числа могут быть охарактеризованы скоростью, с которой их можно аппроксимировать рациональными числами. Весь этот круг идей рождается теоремой Дирихле, а она, в свою очередь, основана на очень простом и вместе с тем очень глубоком принципе Дирихле.

4.3 ЗОЛОТАЯ ПОРА ДЕВЯТНАДЦАТОГО СТОЛЕТИЯ

Европа XIX в. — настоящий рай для блестящей математики. Много важных идей современной математики выросли из концепций того времени. Перечислим хотя бы несколько:

- Жан Батист Жозеф Фурье (1768–1830) развил основополагающие идеи в области рядов Фурье и построил первую формулу разложения произвольной функции в тригонометрический ряд. Кроме того, он развил приложения для теории тепла;
- Эварист Галуа (1812–1832) и Огюстен Луи Коши заложили основания абстрактной алгебры, изобретя теорию групп;
- Бернхард Риман (1826–1866) создал предмет дифференциальной геометрии, определил вид интеграла, которым мы пользуемся сегодня, и сделал глубокий вклад в теорию комплексного переменного и анализ Фурье;
- Огюстен Луи Коши заложил основы действительного анализа, теории комплексного переменного и дифференциальных уравнений в частных производных. Он также стоял у истоков геометрического анализа;
- Карл Якоби (1804–1851), Эрнст Куммер (1810–1893), Нильс Хенрик Абель (1802–1829) и многие другие математики из разных стран развили теорию чисел;
- Жозеф Луи Лагранж (1736–1813), Коши и другие заложили фундамент вариационного исчисления, классической механики, теоремы о неявной функции и многих других важных идей современного геометрического анализа;
- Карл Вейерштрасс (1815–1897) заложил основания строгого анализа, приведя большое число примеров и теорем. Его вклад в действительный и комплексный анализ неоценим.

Этот список можно значительно расширить. Девятнадцатый век — золотое время европейской математики, и общение в среде математиков было как никогда высоко. Выпускались несколько знаменитых математических журналов, важные труды широко распространялись. Большинство университетов в Италии, Франции, Германии и Англии (английские направлялись еще и физиками) имели серьезные математические программы, по которым обучалось много студентов. В это время закладывались основания современной математики.

В это время были посеяны семена строгости в рассуждениях. Язык, терминология и обозначения еще не стали вполне универсальными, определения не были вполне проработаны, и даже методы доказательства еще только развивались. Но основы методологии уже были заложены, и математика того времени перемещалась из страны в страну, в двадцатое столетие и дальше. Ниже мы увидим, как Бурбаки и Гильберт задали тон строгости в математике XX в. Но этим пионерам проложила путь работа гениев XIX в.

Глава 5

ГИЛЬБЕРТ И ДВАДЦАТЫЙ ВЕК

Ни в одном вероисповедании нет такого злоупотребления метафизическими выражениями, как в математике.

— Людвиг Витгенштейн

Математика необязательно характеризуется строгими доказательствами. Много примеров эвристических статей, написанных видными математиками, приведены в [JAQ], есть и много других работ этого рода. И везде речь идет о математических объектах, имеющих строгое определение.

— Альберт Шварц

Самый мучительный вопрос …как передать озарение. В отличие от большинства экспериментальных наук в математике не разработан словарь для передачи сконцентрированных данных и озарений. Как и в большинстве физических экспериментов, количество необработанных данных, полученных в результате эксперимента математического, будет слишком велико, чтобы их осознать. Собранные данные следует сжать и сгруппировать.

— Дж. Борвейн, П. Борвейн, Р. Гиргенсон, С. Парнс

Мы доказываем при помощи логики, но делаем открытия благодаря интуиции.

— Анри Пуанкаре

5.1 ДАВИД ГИЛЬБЕРТ

Как Анри Пуанкаре (1854–1912) во Франции, так Давид Гильберт (1862–1943) в Германии был глашатаем математики начала XX в. Считается, что Гильберт был одним из последних математиков, кто имел представление о всем предмете — от дифференциальных уравнений до анализа, от геометрии до алгебры и логики. Он оказал значительное влияние на все области математики и написал основополагающие тексты во многих из них. У Гильберта было значительное и глубокое провидение строгого построения математики (того, что позднее возникло в работах Бертрана Расселла, Курта Гёделя и других), и он задал тон манере, в которой математика практикуется и записывается в наше время.

У Гильберта было много знаменитых учеников, назовем лишь некоторых: Рихард Курант (1888–1972), Теодор фон Карман (1881–1963) (отец современной аэронавтики), Гуго Штейнгауз (1887–1972), Герман Вейль (1885–1955). Его влияние чувствовалось повсюду, не только в Германии,

Абстрактная алгебра

В этой книге мы уже встречались с понятием «группа». Это одна из многих структур абстрактной алгебры, которая описывает определенные отношения между объектами. Кольцо — это набор объектов, над которыми заданы две операции, обычно это умножение и сложение. Бывают кольца чисел, кольца матриц, кольца операторов в гильбертовом пространстве и многие другие. *Поле* — это кольцо, в котором определено деление. Абстрактные алгебраисты изучают эти различные алгебраические структуры и отношения между ними. В наше время у абстрактной алгебры существуют приложения в различных областях математики, физики и инженерных наук.

но и везде в мире. Именно благодаря его усилиям Геттинген стал одним из мировых математических центров, его значение сохраняется до сих пор.

Одним из прорывов Гильберта стало изучение алгебраических инвариантов. В качестве простого примера рассмотрим квадратный трехчлен

$$p(x) = ax^2 + bx + c.$$

Одним из самых базовых инвариантов такого трехчлена является *дискриминант*

$$d = b^2 - 4ac.$$

Если переменную x подвергнуть линейному преобразованию, то с точностью до коэффициента масштаба дискриминант не изменится. Было бы неплохо классифицировать все алгебраические инварианты.

В конце XIX в. было затрачено много усилий на то, чтобы явно выписать все инварианты различных типов. Многие математики посвящали этому всю свою карьеру. Но был и другой подход — попытаться записать *базис* инвариантов[1)]. Гильберт решил задачу неконструктивно, проведя доказательство от противного. В то время этот результат казался весьма противоречивым, несмотря даже на то, что доказательство от противного было принято многими математиками, начиная с Евклида. Работа Гильберта оставила многих математиков без дела и позиционировала его как силу, которой надо сопротивляться. Его идеи создали объект изучения абстрактной алгебры. Сегодня мы помним Гильберта за многие новации в математике, одна из которых *теорема о нулях* — один из ключевых алгебраических методов, развитых им для изучения инвариантов.

[1)]Базис — минимальное порождающее множество алгебраической системы.

5.2 БИРКГОФФ, ВИНЕР И РАЗВИТИЕ АМЕРИКАНСКОЙ МАТЕМАТИКИ

В конце XIX в. и начале XX в. у американской математики было что-то вроде комплекса. В США проводилось не так много настоящих (абстрактных и строгих) математических исследований, и значительные европейские математики — лидеры в своей области — свысока смотрели на жалкие усилия американцев. Нам всем приходится расти на той грядке, где нас посадили, и американская интеллектуальная жизнь была продуктом своих условий. Тогда, как и сейчас, Америка была знаменита практичным, эмпиричным, брутальным даже подходом, готовностью воспринимать все новое — что бы это ни было. Америка гордится своим обществом «без барьеров», в котором высока социальная мобильность и мало, если они вообще имеются, препятствий прогрессу. Интеллектуальная жизнь в Соединенных Штатах отражала эти ценности. Университетское образование было конкретным и практическим, основанным на частных задачах, пришедших из инженерных наук или потребностей общества.

Ярким образчиком ученого в такой ситуации может быть Уильям Шовене (1820–1870) — один из интеллектуальных лидеров в американской математике XIX в. Он был одним из основателей Морской академии США в Аннаполисе, а затем перебрался в университет Вашингтона в Сент-Луисе (родной город автора этой книги). В те дни в большинстве американских университетов не было отделений математики. Как правило, математикой занимались на отделениях астрономии. Это складывалось само собой, из практических потребностей, поскольку в астрономии требовалось много вычислений и математических ухищрений. Шовене однако убедил администрацию университета Вашингтона учредить особое математическое отделение и стал первым его деканом. Затем Шовене стал ректором университета Вашингтона и играл решающую роль в процессе становления этого учреждения.

Какими же видами математических исследований занимались ученые вроде Шовене? Больше всего его помнят за то, что он выполнил все вычисления для постройки моста Идса, до сих пор связывающего берега Миссисипи в Сент-Луисе. Мост Идса — прекрасный пример классического арочного дизайна, он до сих пор действует и используется в наши дни и пешеходами, и автомобилистами.

Ведущие математики Европы — Риман, Вейерштрасс, Дирихле и Гаусс в Германии, Коши, Лиувилль, Адамар и Пуанкаре во Франции — посвящали свое время развитию основ действительного анализа, комплексного анализа, дифференциальной геометрии, абстрактной алгебры и других фундаментальных составляющих современной математики. Нельзя даже вообразить, чтобы они выполняли какие-то расчеты для постройки мостов[1]. Разрыв между европейской и американской математиками действительно существовал.

Одним из тех, кто связывал две разные математические культуры, был Дж. Дж. Сильвестр. Случилось так, что университет Джона Хопкинса в Балтиморе искал нового математического руководителя, и внимание администрации обратилось к британскому математику Сильвестру. Эта история началась, когда гарвардский математик Бенджамин Пирс (1809–1880) узнал, что в Балтиморе будет основан университет Джона Хопкинса; он написал в 1875 г. письмо его новому президенту Даниэлю Койту Гилману (1831–1908):

> Узнав, что вы находитесь в Англии, я взял на себя смелость написать вам по вопросу назначения в вашем новом университете, которое может послужить к пользе нашей страны и американской науки, если нам удастся его устроить. Речь идет об одном из двух величайших геометров Англии Дж. Дж. Сильвестре. Если вы наведете о нем справки, вы узнаете, что его гений общепризнан, но его способности к преподаванию, скорее всего, отнесут к его слабым местам. В наше время для тех, кто понимает, нет более яркого светила, чем Сильвестр, при условии, что слушатель переживает период ясного сознания. Но раз курица неспособна понять полет орла, только орленку может быть польза от учения орла... Рано или поздно среди ваших учеников найдется кто-то, у кого есть геометрический талант. Он станет особенным учеником Сильвестра — учеником, который сможет взять у своего учителя знания и энтузиазм, и этот ученик сделает больше для репутации вашего учреждения, чем те десять тысяч, которые будут жаловаться на непонятность Сильвестра и для которых вы найдете преподавателей другого уровня. Я надеюсь, что в вашем сердце вы найдете — его собственная страна не смогла этого сделать — место для него, и придет время, когда весь мир будет аплодировать мудрости вашего решения.

Сильвестр (1814–1897) получил образование в Англии. Еще в молодости он получил должность профессора в вирджинском университете. Однажды молодой студент, выступление которого в классе Сильвестр раскритиковал, был очень уязвлен видным ученым. Он подготовил засаду

[1] Справедливости ради следует сказать, что Гаусс, особенно на закате своей карьеры, уделял больше внимания самым разным практическим задачам. Многие другие европейские математики, известные своей абстрактной интеллектуальной деятельностью, тоже решали значительные прикладные задачи. Но все же их корни и их цели лежали в области чистой математики. Именно эта их работа выдержала проверку временем, именно за это их до сих пор помнят.

и напал на Сильвестра с тяжелой тростью[1]. У Сильвестра при себе тоже оказалась трость с *вкладной шпагой*, и он ударил студента в ответ. Ранение было нетяжелым, но профессор счел разумным оставить свою должность и на ближайшем корабле отправился в Англию, где получил место в военной академии. Там он работал долго и успешно, но через какое-то время уволился и принял предложение университета Джона Хопкинса. Тогда Сильвестру было уже под шестьдесят. Через год он основал Американский математический журнал и стал ведущим американским математиком того времени.

Х. Ф. Бейкер (1866–1956) рассказывает такую историю про Сильвестра и университет Джона Хопкинса:

> В 1875 г. в Балтиморе был основан университет Джона Хопкинса. Письмо Сильвестру от знаменитого Джозефа Генри (1797–1878), датированное 25 августа 1875 г., указывает на то, что Сильвестр выражал по меньшей мере готовность участвовать в формировании стиля молодого университета; руководство, казалось, чувствовало, что профессор математики и профессор классики могли бы начать работу университета без дорогих зданий и продвинутой аппаратуры. В конце концов было решено, что Сильвестр будет получать, помимо расходов на поездки, годовую стипендию в 5000 долларов, «выплачиваемую золотом». Итак, в возрасте 61 года, полный огня и энтузиазма … он опять пересек Атлантику и занимал свой пост 8 лет, до 1883 г. Это был эксперимент по методике преподавания. Сильвестр был волен преподавать, что желает, и таким образом, каким сочтет нужным; если цель университета — зажечь пламя интеллектуальных интересов, то, как говорят сохранившиеся записи, это был триумфальный успех. Причуды Сильвестра, конечно же, были забавны; его недостатки как лектора были источником горькой печали для студентов, которые надеялись вести сбалансированные записи, полезные в будущем, но моральный эффект от честности … должен быть огромным.

Сильвестр однажды заметил, что Артур Кэли был намного удачливее его; «что они оба прибыли в Лондон холостяками, но Кэли женился и осел для тихой и мирной жизни в Кембридже; в то время как он [Сильвестр] не женился никогда, и всю свою жизнь сражался с этим миром». Те, кто понимают, считают, что это честный рассказ об их жизни.

Преподавание — важная миссия, и оно по-своему вознаграждается. Занятия наукой тоже. Но то и другое могут идти рука об руку; тогда получается целое, которое больше, чем сумма составляющих

---

[1] В наше время профессора иногда жалуются на грубое поведение своих студентов. Но они не часто рассказывают о нападениях студентов, вооруженных тростью.

частей. Сильвестр, которого можно назвать педагогом по меньшей мере эксцентричным, описывает процесс преподавания так:

> Но ради настойчивости одного из студентов этого университета в убеждении меня в его желании изучать под моим руководством современную алгебру я никогда бы не занялся этим исследованием; новые факты и принципы (я считаю их важными), открытые мною, оставались бы, насколько я понимаю, скрытыми в истоках времен. Напрасно я объяснял этому любознательному студенту, что ему следовало бы заняться чем-то другим, что лежит в стороне от проторенных путей, чем-нибудь из анализа эллиптических функций или теории подстановок или еще чем-то иным. Он был непреклонен, исполнен вежливости и непоколебимо настойчив в своем упорстве. Он желал новой алгебры (один только Господь знает, где он про нее слышал, ведь она почти неизвестна на этом континенте [Америка]), только ее и ничего иного. Мне пришлось согласиться, и что же из этого вышло? Пытаясь пролить свет на туманные объяснения из нашего учебника, я загорелся, я нырнул с головой с небывалым рвением в предмет, который забросил годы тому назад, и обнаружил пищу для ума, которая привлекла мое внимание на значительное время и, по-видимому, будет занимать все мои силы на ближайшие несколько месяцев.

Однажды Сильвестр выступил с речью по случаю начала учебного года в университете Джона Хопкинса. Начал он с того, что математики не сильны в публичных выступлениях, поскольку язык математики не подходит для обычной коммуникации. Математика точна: можно выразить страницы мыслей с помощью всего нескольких символов. Поэтому, раз уж он привык изъясняться математически, его выступление будет огорчительно кратким. Спустя три часа он закончил свою речь.

Однажды Сильвестр направил в Лондонское математическое общество статью для публикации. Как положено, он приложил краткую аннотацию, в которой утверждалось, что изложенные результаты — самые важные в этой области за последние 20 лет. Секретарь ответил, что совершенно согласен с Сильвестром, но что на самом деле тот уже опубликовал этот результат в журнале Лондонского математического общества пять лет назад.

Нелишне будет сказать, что Сильвестр был самым мощным игроком на поле американской математики в течение многих лет. Он установил высокие стандарты для занятий математикой, был влиятельным педагогом и многого достиг. Но это был не конец.

С точки зрения американской математики, следующим большим событием было появление Дж. Биркгоффа (1884–1944). Получив образование в Гарварде, он остался там и начал преподавательскую деятельность. Он был первым коренным американцем, кто доказал теорему, заслужившую внимание и уважение со стороны европейских патриархов. Это была последняя теорема Пуанкаре (доказательство самого Пуанкаре считалось неудовлетворительным, а сама по себе теорема — очень важной). Кроме того, значительный интерес привлекло его доказательство общей эргодической теоремы; эта задача вызывала широкое и интенсивное внимание на протяжении многих лет. Биркгофф щелкнул этот орешек, и таким образом заявил о себе, Гарварде и американской математике. Сейчас Америка — полноценный игрок на большом математическом поле.

Но одного человека недостаточно, чтобы заслужить непоколебимый авторитет и восхищение довольно косных европейских математиков. Так что мы должны благодарить судьбу за то, что на сцене появился Норберт Винер (1894–1964). Ребенком Винер был вундеркиндом; обучал его очень требовательный отец (который сам относился к академическому кругу). Норберт родился в кампусе университета Миссури в Колумбии, где его отец преподавал языки. Старший Винер относился к проигравшей стороне в одном политическом споре, поэтому ему пришлось оставить работу в Миссури. Кончилось тем, что семья переехала в Бостон. После некоторых колебаний Винер-отец оказался в Гарварде и оставался там до конца своей карьеры.

Молодой Норберт, получивший быстрый старт в своем образовании благодаря неусыпному отцовскому вниманию, начал учебу в Тафтском университете в одиннадцать лет. В то время он был самым молодым американским студентом, когда-либо посещавшим колледж. Этому событию значительное внимание уделила пресса, и Норберт сразу же стал знаменитостью. В возрасте семнадцати лет Норберт узнал, что он был евреем (до этого его отец утверждал обратное). Эту новость он принял тяжело, и всю жизнь страдал от того, что ему трудно было смириться со своим еврейством. Он чувствовал, что антисемитские силы (среди них в особенности Дж. Биркгофф) были сильны в американской математике. Так что в начале своей математической карьеры Винер жил в Англии, где ситуация ему казалась честной. В конце концов, ему удалось, аккуратно лавируя, получить работу в MIT. Всю оставшуюся профессиональную жизнь Винер провел в Кембридже, штат Массачусетс.

Винер был низеньким, пухленьким и ужасно близоруким; он обращал на себя внимание, бродя по кампусу MIT. Но он был очень знаменит благодаря необыкновенной мощи своего интеллекта. Для его лекций приходилось выделять большие аудитории, так как туда стекались люди из Бостона и окрестностей. Ходили слухи, что зарплата у Винера была больше, чем у самого президента MIT.

Винер сделал серьезную заявку о MIT, американской математике в целом (и, конечно же, о себе). Его работы в анализе Фурье, стохастических интегралах и кибернетике (этот термин, как и предмет этой науки, он создал сам) были прорывом, а его теоремы до сих пор изучают, на них ссылаются и сегодня.

По отношению к доказательству Норберт Винер (как Сильвестр и Биркгофф) был классицистом. Он формулировал теоремы в традиционной манере и строго их доказывал, вооружившись пером и бумагой. Но Винер выказывал значительный интерес и к *приложениям* математики, к способам общения ученых и общества. Его глубоко обеспокоило использование атомной бомбы в Японии в конце Второй мировой войны. Он организовал кампанию против ученых, предоставляющих свой интеллект для поддержки военных.

Норберт Винер был одним из основателей современной *теории стохастических процессов*. Это ветвь теории вероятностей, которая аналитически описывает случайные процессы, такие как броуновское движение. В конце 1940-х и начале 1950-х гг. все интересы Норберта Винера сошлись в одном направлении, так что он изобрел совершенно новое направление человеческой мысли. Винер назвал его «кибернетикой»[1].

Кибернетика изучает, как человек взаимодействует с машинами (особенно, но не исключительно, с компьютерами). Она рассматривает вопросы вроде «Может ли машина мыслить». Оказывается, что это не просто темы для философских рассуждений. Винер смог анализировать их, опираясь на свои идеи из стохастических процессов. Он написал сложные технические статьи по кибернетике и путешествовал по миру, благовествуя. В 1950-х гг. на этом можно было заработать. У Винера были приверженцы, а в MIT он руководил лабораторией кибернетики, где вместе с ним работали несколько ведущих ученых.

Именно Дж. Биркгофф и Норберт Винер были ключевыми фигурами среди тех, кому в XX в. удалось продвинуть американскую математику на лидирующие позиции. У них обоих были важные и влиятельные ученики: у Биркгоффа — Марстон Морс (1892–1977), Хасслер Уитни (1907–1989) и Маршалл Стоун (1903–1989); у Винера — Амар Боуз (создатель корпорации Bose), Норман Левинсон и Эйб Джелбарт.

Начало XX в. — золотые дни американской математики и американской науки в целом. Открытие Принстонского института высших исследований в 1930 г., где засияло целое созвездие математиков мирового класса (и конечно же, суперзвезда — Нобелевский лауреат физик Альберт Эйнштейн), дало фору американской математике. Университет Чикаго, основанный в 1890 г. на средства Джона Д. Рокфеллера (занятия там

[1] Слово «кибернетика» происходит от греческого $\kappa\upsilon\beta\epsilon\rho\nu\eta\tau\eta\varsigma$, что означает «штурман», или «рулевой».

начались в 1892 г.), тоже стал твердыней американской математики. За ним вскоре последовали Принстон и Гарвард, а позднее MIT (благодаря личному примеру и значительным усилиям Норберта Винера).

Сегодня Америка — несомненно, один из мировых лидеров в математике. Тому есть несколько причин. Во-первых, в Америке много первоклассных университетов. Во-вторых, на математические исследования выделяются значительные правительственные субсидии (от национального научного фонда, министерства обороны, министерства энергетики и других учреждений). Но стоит отметить, что в развитии математики сыграла значительную роль и американская манера вести дела. В Америке упорный и удачливый математик может действительно продвинуться вперед. Если, стартовав с невзрачной степени Ph. D. и скромного поста, вы докажете важные теоремы, вам предложат лучшую работу. Вполне реально продвигаться все выше и выше через более и более престижные посты и элитные университеты к большей зарплате, интересной работе и привилегиям. У лучших математиков Соединенных Штатов крайне высокие зарплаты, большие фонды, взвод помощников (аспиранты, ассистенты и другие сотрудники) и много других привилегий.

В большинстве других стран дела обстоят не совсем так, и даже совсем не так. Во многих ведущих европейских странах все образование централизовано. В Италии все решения поступают из Рима, а во Франции — из Парижа. В этом есть свои плюсы — для формирования национальных стандартов и качества одного уровня, но есть и свои минусы — система становится неповоротливой и негибкой. Когда швед Ларс Хёрмандер получил в 1962 г. медаль Филдса, в Швеции для него не нашлось работы и даже не удалось создать должность специально для него. Как это могло случиться? В Швеции общее число профессоров математики — величина постоянная, на сегодняшний день она составляет 20. Но в 1960 г. было только 19. Каждое из возможных 19 мест кто-либо занимал, и никто не желал сделать шаг вниз и отказаться от должности, чтобы ее мог занять Хёрмандер. Между прочим, Исаак Барроу, учитель Исаака Ньютона, в свое время отказался от кафедры математики, чтобы ее мог занять юный Ньютон[1)]. Но в *социалистической* Швеции в 1962 г. ничего подобного не произошло. Так что Хёрмандер, которого никак нельзя было назвать перекати-полем, покинул Швецию и перебрался в институт высших исследований в Принстоне, штат Нью-

[1)] У Барроу был еще один мотив для широкого жеста: он стремился занять место при дворе. Как бы то ни было, его отказ открыл перед Ньютоном возможности, в которых тот нуждался.

Джерси. Возможно, это одно из самых престижных мест работы для математика, с потрясающей зарплатой и фантастическими привилегиями. На новом месте Хёрмандер расцвел. Через несколько лет Швеция осознала потерю. Как-то раз вдохновенный политик предстал перед национальным парламентом и заявил: «Я считаю трагичным, что самый блестящий математик в истории Швеции не может найти подходящей работы на родине. Он переехал в Соединенные Штаты». Поэтому шведский парламент создал вакансию еще для одного профессора — сакральное число 19 выросло до 20 — так что Хёрмандер смог занять пост в Швеции. И исполненный чувства долга, Хёрмандер вернулся в Швецию. Почти 40 лет он проработал в университете Лунда.

Но надо сказать, что работа Хёрмандера в Лунде (теперь он на пенсии) не представляла ничего особенного. Он потерял более половины доходов, вернувшись в Швецию; его зарплата была почти такой же, как у остальных профессоров. А все потому, что такие вопросы, как зарплата профессора, регулируются из центра, а такая система регулирования не учитывает исключительных личностей вроде Ларса Хёрмандера.

Американская система более соревновательна — академический мир представляет собой рынок, и, возможно, именно это побуждает людей работать упорнее и стремиться к более высоким целям[1]. Для сравнения: один немецкий ученый как-то раз сказал мне, что он знает, какая у него будет зарплата через 5 лет, через 10 и через 20, так как правительство опубликовало книгу, в которой все это расписано. Если он получит предложение извне или перейдет в другой университет, не изменится ничего — все регулируется из центра.

Один из главных принципов американского образования — местный контроль над школами. У него есть свои достоинства и недостатки; образование в сельскохозяйственном штате Миссисипи очень отличается от образования в Бостоне. Но зато американская система создает более соревновательную атмосферу. Американскому университету (особенно частному) ничего не стоит создать специальную должность для ученого уровня Ларса Хёрмандера. И она будет совсем не такой, как у других профессоров университета. Ректор и проректор могут скроить позицию, которая будет соответствовать достижениям и престижу нужного человека. Они назначат

---

[1] Правда, надо отметить, что до недавнего времени русская и румынская системы тоже производили большое впечатление, взрастив огромное число первоклассных математиков и дав великие теоремы. При коммунистическом режиме русская система рыночной никак *не была*. Но русская культура имеет много особенностей, и в игру вступали другие силы.

любую зарплату и любые привилегии, какие сочтут нужным. У выдающегося профессора может быть личный секретарь, лимузин или еще что-то, что может сделать его счастливым и преданным своему университету[1].

Кроме того, американская система не такая кастовая, как это принято в Европе и Азии. Ее структура не такая жесткая, в ней гораздо больше мобильности. Совершенно естественно, если профессора, ассистенты и помощники дружат. Американские профессора шутят с секретаршами и обедают с аспирантами. В зарубежных университетах такое поведение встречается реже. По-видимому, свободная и открытая природа нашей системы способствует ее успеху.

Надо сказать, что один из ключей успеха американской академической системы — не что иное, как деньги. Высшее образование затратно, а у американских университетов доступ к ресурсам больше, чем у европейских. Существует много правительственных и частных фондов, и в американских университетах давно утвердилась традиция пожертвований от выпускников (в отличие, скажем, от английских). Активы Гарвардского университета превышают 26 млрд долларов, и большая часть этой суммы идет от таких пожертвований. Нет ничего необычного в том, что какой-либо богатый жертвователь обращается в американский университет с предложением внести 10 млн долларов на обеспечение пяти академических позиций[2]. Это особая академическая позиция, с внушительной зарплатой и многими привилегиями, предназначенная для привлечения и удержания лучших ученых. В Европе не бывает ничего подобного.

Многие блестящие ученые покидают Европу, чтобы работать в американских университетах, где зарплаты гораздо выше (и к тому же условия труда позволяют добиться большей продуктивности). В то же время они часто возвращаются на родину после завершения карьеры.

---

[1] Сейчас в университете Лос-Анджелеса звезда математического факультета — Теренс Тао. Он завоевал медаль Филдса, стипендию Мак-Артура, премию Уотермена, премию Бешера и много других *наград*. Университет стремится выказать ему должное почтение, так что для него создана особая кафедра с особой зарплатой. И ему купили дом в Бел Эр, одной из *фешенебельных* частей города.

[2] Такая ситуация возникла, например, в 1986 г. в Пенсильванском университете. Богатый меценат Роберт Эберли пожертвовал деньги каждому из естественно-научных факультетов — биологии, химии, астрономии и физики, чтобы обеспечить одну кафедру. Он отказался выделить деньги для математики, так как ни один математический курс в университете Пенсильвании ему не понравился. Но у университета было достаточно собственных фондов, чтобы исправить эту ситуацию.

5.3 Л. Э. Я. БРАУЭР И ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОТ ПРОТИВНОГО

Датский математик Л. Э. Я. Брауэр (1881–1966) с молодых лет интересовался преимущественно топологией. В те дни (начало XX в.) топология только-только появилась на свет, и у нее было красивое имя: *резиновая геометрия*. Она имеет дело с геометрическими свойствами поверхностей и тел, которые сохраняются при непрерывных деформациях (например, изгибание, растяжение, скручивание). Брауэр создал себе репутацию, сделав значительный вклад в изучение теоремы о жордановой кривой (очевидное, но удивительно тонкое утверждение о том, что замкнутая кривая без самопересечений на плоскости разбивает плоскость на две области — внутреннюю и внешнюю по отношению к кривой). Продолжая работу в быстро развивающейся новой области, Брауэр получил смелый новый результат и смог его доказать.

Суть этой *теоремы Брауэра о неподвижной точке* может быть понятна и неспециалисту. Рассмотрим на плоскости замкнутый диск единичного радиуса $\overline{D}$, он изображен на рис. 5.1. Он представляет собой окружность и ее внутреннюю область. Теперь представим себе, что задана функция $\varphi : \overline{D} \to \overline{D}$, непрерывно отображающая диск на себя, как показано на рис. 5.2. Теорема Брауэра заключается в том, что у отображения φ должна существовать неподвижная точка. Другими словами, должна существовать точка $P \in \overline{D}$ такая, что $\varphi(P) = P$ (рис. 5.3).

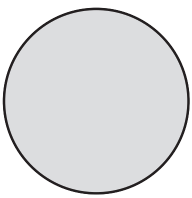


Рис. 5.1. Замкнутый диск

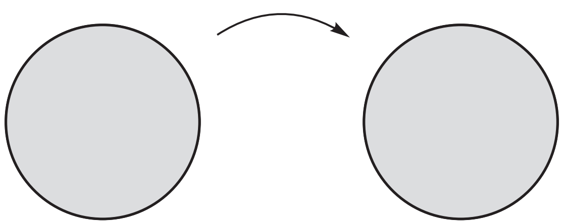


Рис. 5.2. Непрерывное отображение диска на себя

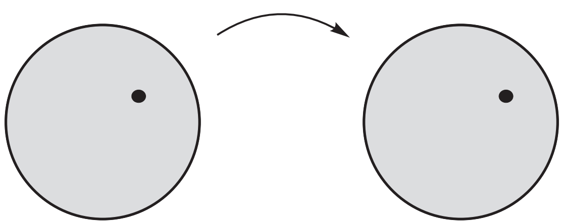


Рис. 5.3. Неподвижная точка

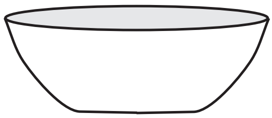


Рис. 5.4. Тарелка супа

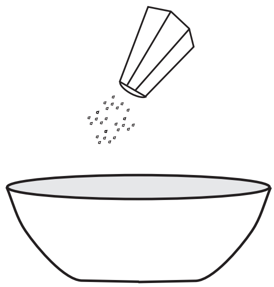


Рис. 5.5. Тертый сыр на поверхности супа

Это математический результат, его строгое доказательство опирается на такие глубокие понятия, как гомотопия. Но он допускает естественные эвристические объяснения, понятные и дилетанту. Вот одна из популярных интерпретаций. Представьте, что вы обедаете и перед вами тарелка с супом (рис. 5.4). Поверхность супа вы равномерно посыпаете тертым сыром (рис. 5.5), а затем размешиваете. Вообразите, что вы размешиваете суп так, как принято в светском обществе, и весь сыр остается на поверхности (рис. 5.6). Тогда некоторая частица сыра остается на месте (рис. 5.7).

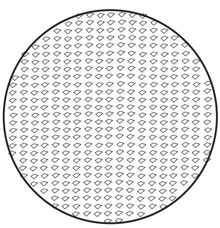


Рис. 5.6. Замкнутый диск

Кулинарная аналогия позволяет нам лучше понять теорему Брауэра о неподвижной точке. И формулировка, и доказательство этой теоремы в 1909 г. были волнующими. Сейчас известно, что теорема верна для диска любой размерности (сам Брауэр доказал ее только для размерности 2). Мы обсудим этот результат ниже.

Теорема Браэура о неподвижной точке — одна из важнейших и захватывающих теорем математики XX в. Доказательство этой теоремы сделало Брауэра одним из ведущих топологов того времени. Но он отказывался читать лекции на эту тему и даже, в конце концов,

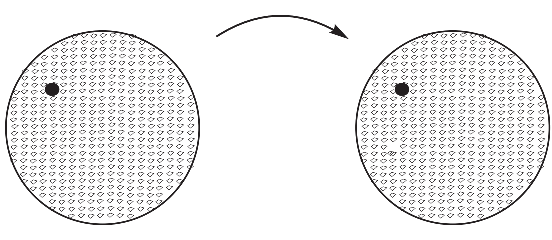


Рис. 5.7. Неподвижная частица сыра

отверг эту (свою собственную!) работу. Причиной такого странного поведения стало то, что Л. Э. Я. Брауэр обратился в *конструктивизм* (или *интуиционизм*). Он отказался от аристотелевской диалектики (что утверждение может быть либо истинным, либо ложным, и третьего не дано) и поэтому отверг и понятие «доказательства от противного». Брауэр полагал, что когда речь идет о бесконечных множествах, верным может быть только такое доказательство *существования* математического объекта (такого как неподвижная точка!), когда нужный объект *конструируется* явно[1]. Брауэровская школа получила название «интуиционизм», оставив яркий след в истории математики XX в. Сам серый кардинал Герман Вейль подписывался под некоторыми идеями философии интуиционизма, а Эррет Бишоп (см. ниже) защищал ее страстно.

Как мы увидим ниже, теорема Брауэра о неподвижной точке утверждает существование «неподвижной точки» для непрерывного отображения. Доказывают существование неподвижной точки, предполагая, что она не существует, и приходя к противоречию. Таким и был брауэровский метод с самого начала, но он не выдержал столкновения с интуиционизмом, к которому Брауэр позднее пришел.

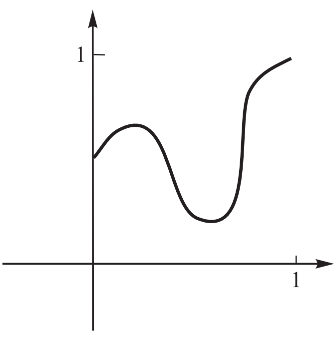


Рис. 5.8. Функция, непрерывная на единичном отрезке

Мы начнем с обсуждения общей идеи теоремы Брауэра о неподвижной точке в ее «игрушечном» — одномерном варианте. Рассмотрим непрерывную функцию f, отображающую отрезок $[0,1]$ на себя. На рис. 5.8 изображен график такой функции.

Отметим, что *непрерывной* называют функцию, у графика которой нет разрывов. Иногда говорят, что график непрерывной функции «можно изобразить, не отрывая карандаша от бумаги». Существуют и более строгие определения понятия непрерывности, но нам для наших целей хватит и этого. Вопрос в том, найдется ли такая точка $p \in [0,1]$, что $f(p) = p$. Такая точка f называется *неподвижной точкой* функции f. На рис. 5.9 вы видите, насколько сложной может быть непрерывная функция, отображающая отрезок $[0,1]$ на себя. В каждом конкретном случае может быть не вполне очевидно, существует неподвижная точка у такого отображения

[1]Для конструктивистов выражение «существует» имеет строгий смысл, отличный от того, что принят в обычной формальной логике.

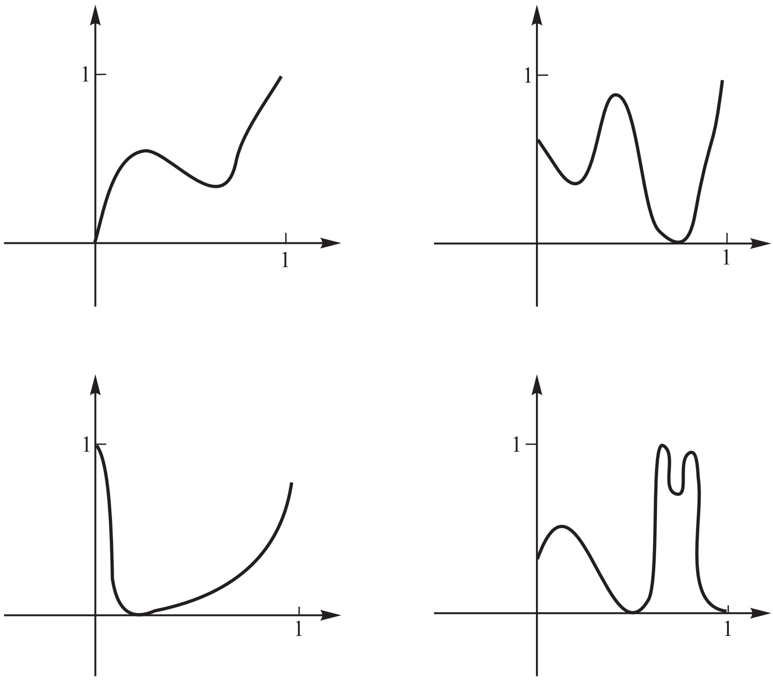


Рис. 5.9. Сложность непрерывной функции

или нет. Однако на рис. 5.10 отмечены неподвижные точки для каждого случая.

Нарисовать несколько картинок вовсе не то же самое, что установить раз и навсегда, что какой бы ни была непрерывная функция $f : [0, 1] \to [0, 1]$, для нее обязательно найдется неподвижная точка p. Здесь требуется *математическое доказательство*. Мы строго сформулируем и докажем этот результат.

Теорема 5.3.1. *Пусть* $f : [0, 1] \to [0, 1]$ — *непрерывная функция. Тогда существует точка* $p \in [0, 1]$ *такая, что* $f(p) = p$.

Доказательство. Мы можем считать, что $f(0) \neq 0$ (в противном случае, 0 и есть неподвижная точка, мы ее уже нашли). Поэтому $f(0) > 0$. Кроме того, мы можем считать, что $f(1) \neq 1$ (в противном случае неподвижной точкой является 1, — мы нашли то, что нужно). Значит, $f(1) < 1$.

Рассмотрим теперь вспомогательную функцию $g(x) = f(x) - x$. Как мы видели в предыдущем абзаце, $g(0) > 0$ и $g(1) < 0$. Посмотрим на рис. 5.11. Мы видим, что для непрерывной функции, обладающей

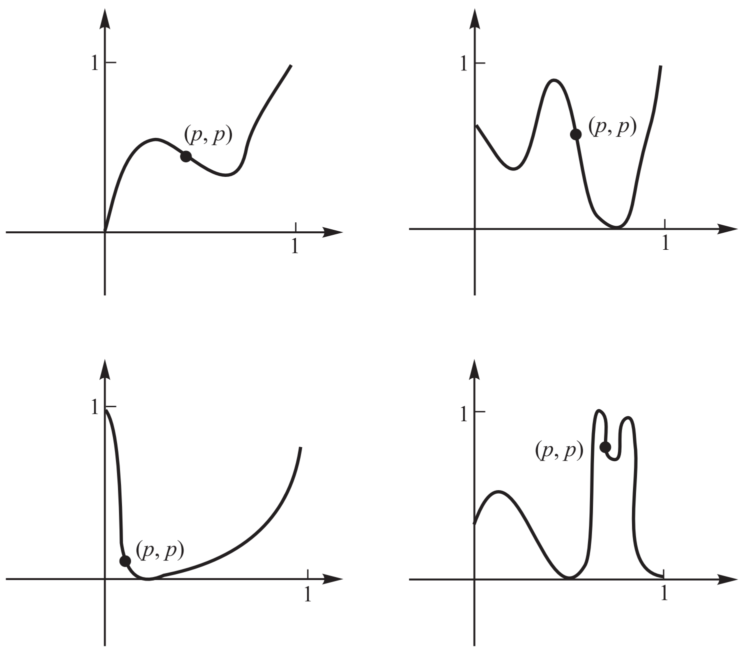


Рис. 5.10. Неподвижная точка каждой непрерывной функции

такими свойствами, должна найтись точка p между 0 и 1 такая, что $g(p) = 0$. А это и означает[1], что $f(p) = p$. ■

Теперь обратимся к многомерному, в частности двумерному, варианту теоремы Брауэра о неподвижной точке. Именно в этой формулировке она вызвала интерес и даже воодушевление, когда Брауэр впервые доказал ее сто лет тому назад.

Но вначале мы должны установить один вспомогательный топологический факт. Для этого мы воспользуемся *теорией гомотопий Пуанкаре*.

Лемма 5.3.2. *Пусть U, V — геометрические фигуры, а $g : U \to V$ — непрерывная функция. Если γ — замкнутая кривая в U, которая может быть непрерывной деформацией стянута в точку, то $g(\gamma)$ — подмножество V, которое тоже является замкнутой кривой, которая может быть непрерывно деформирована в точку.*

---

[1]Мы здесь пользуемся важной теоремой о промежуточном значении непрерывной функции. Эта теорема гласит, что если непрерывная функция принимает значения α и β, где $\alpha < \beta$, то она принимает и все промежуточные значения. Этот ключевой факт связан с аксиомами системы действительных чисел и полнотой этой системы. Тщательное изложение можно найти, например в работах [KRA5] и [KRA7].

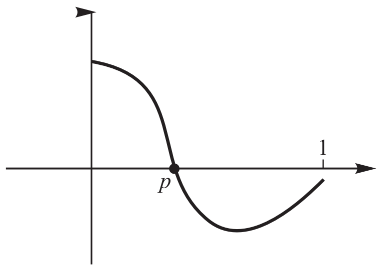


Рис. 5.11. Теорема о промежуточном значении

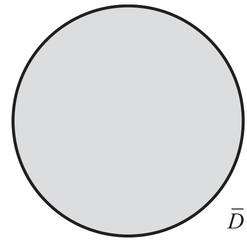


Рис. 5.12. Замкнутый единичный диск

Это утверждение должно быть интуитивно ясно. Очевидно, непрерывная функция не может взять замкнутую кривую и перевести ее в *незамкнутую*; это противоречит самому понятию непрерывности. И если представить себе поток кривых, первая из которых — γ, а последняя — одна точка в U, то их образы, которые порождает функция g, образуют другой поток кривых в V, которые стягиваются в точку в V.

Определение 5.3.3. *Пусть $\overline{D}$ — замкнутый единичный диск (т. е. круг вместе со своей границей) такой, как изображен на рис. 5.12. Обозначим C границу круга $\overline{D}$. Непрерывная функция $h : \overline{D} \to C$, которая оставляет неподвижной все точки C, называется ретракцией $\overline{D}$ на C (рис. 5.13).*

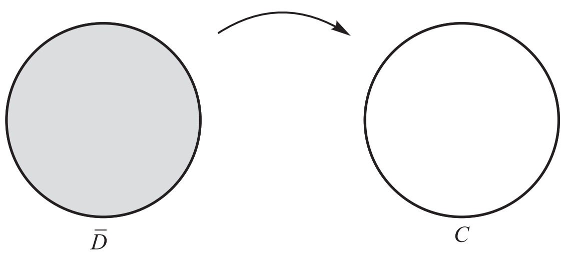


Рис. 5.13. Ретракция

Утверждение 5.3.4. *Не существует ретракции $\overline{D}$ на C.*

Доказательство этого утверждения опирается на сложные идеи из теории гомотопий — части алгебраической топологии, развитой Пуанкаре более 100 лет тому назад. Мы не можем рассмотреть ее здесь подробно.

Знаменитая теорема Брауэра формулируется так:

Теорема 5.3.5. *Пусть $\overline{D}$ — замкнутый единичный диск, а $f : \overline{D} \to \overline{D}$ — непрерывная функция. Тогда существует точка $P \in \overline{D}$ такая, что $f(P) = P$.*

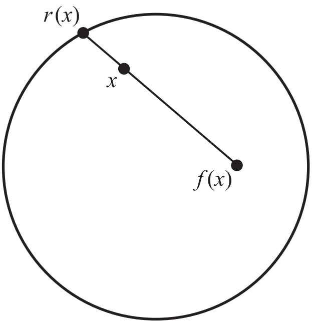


Рис. 5.14. Построение ретракции

Доказательство. Рискуя огорчить самого Брауэра, мы дадим доказательство от противного. Предположим, что существует отображение f, у которого *нет* неподвижной точки. При этом $f(x) \neq x$ для любой точки $x \in \overline{D}$. Тогда мы сможем использовать отображение f, чтобы построить ретракцию $\overline{D}$ на C следующим образом. Рассмотрим рис. 5.14. Отрезок, который начинается в $f(x)$, проходит через точку x, а заканчивается в некоторой точке $r(x)$ на C, дает нам отображение r:

$$x \mapsto r(x) \in C = \partial D.$$

Здесь ∂ — стандартное математическое обозначение для *границы* множества. Отметим, что область определения этого отображения — те точки x, которые мы отображаем, совпадает с $\overline{D}$, это множество точек диска вместе с его границей. А образ — область значений отображения — это окружность C, т. е. граница диска. Разумеется, это отображение непрерывно, так как малое изменение x дает малое изменение $f(x)$, а значит, и $r(x)$. Более того, отображение r переводит каждую точку границы C в себя. Таким образом, r — *ретракция* $\overline{D}$ на C. Обратите внимание: мы смогли построить эту ретракцию на основании того, что $f(x) \neq x$; именно в силу этого неравенства мы знаем, как провести отрезок, определяющий точку $r(x)$. Но ведь нам известно из предположения, что ретракция невозможна. Поэтому не может случиться так, что $f(x) \neq x$ для всех x. Таким образом, некоторая точка P остается неподвижной относительно отображения f. На этом доказательство заканчивается. Мы установили истинность теоремы Брауэра о неподвижной точке, опираясь на теорию гомотопии Пуанкаре. ■

5.4 ОБОБЩЕННАЯ ТЕОРЕМА О БУТЕРБРОДЕ

5.4.1 Классический бутерброд с ветчиной

В этом разделе мы собираемся обсудить далеко идущее обобщение теоремы Брауэра о неподвижной точке. При этом мы будем опираться в основном на интуицию, как и должно быть. Наша цель — показать, что математические идеи не стагнируют. Любое настоящее озарение дает толчок дальнейшим исследованиям и открытиям. К ним относится «обобщенная теорема о бутерброде».

Следует сказать: в этом разделе мы опишем обобщение *философии* и *методологии* теоремы Брауэра о неподвижной точке, а не обобщение самой теоремы. Это иллюстрация важной части собственного течения

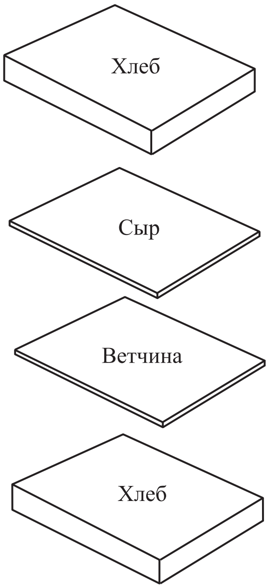


Рис. 5.15. Классический бутерброд с ветчиной

математики. Математика в действительности — это *процесс*, а процесс не всегда аккуратно разделяется на теоремы и доказательства. Можно многому научиться с точки зрения, принятой в теореме, а затем предпринять свое путешествие и доказать свою собственную теорему.

Начнем с определения *классического бутерброда с ветчиной*. Бутерброд состоит из двух квадратных ломтиков хлеба, одного квадратного кусочка ветчины (мы считаем, что нам досталась стандартно упакованная ветчина) и одного квадратного кусочка сыра (сыр тоже в стандартных упаковках). Вы видите схему бутерброда на рис. 5.15.

Легко видеть, что одним взмахом ножа можно разрезать бутерброд так, что

- весь хлеб (каждый ломтик) делится пополам;
- сыр делится пополам;
- ветчина тоже делится пополам.

На рис. 5.16 изображен один из таких разрезов, на рис. 5.17 — еще один. На самом деле существует бесконечно много способов провести плоское сечение бутерброда так, что на две равные половинки будут разрезаны оба ломтика хлеба, сыр и ветчина. В следующем разделе мы определим «обобщенный бутерброд с ветчиной» и обсудим аналогичный, но куда более поразительный результат.

5.4.2 Обобщенный бутерброд с ветчиной

Обобщенный бутерброд с ветчиной тоже состоит из *ветчины*, *хлеба* и *сыра*. Однако теперь ветчины может быть несколько кусочков произвольной формы. То же самое относится к хлебу и сыру. Такой обобщенный бутерброд изображен на рис. 5.18.

Не забудем, что этот бутерброд существует в трехмерном пространстве. Обобщенный бутерброд на рис. 5.20 — трехмерный. Каждый кусочек ветчины, сыра или хлеба — объемный трехмерный объект.

Вот мы и добрались до такой удивительной теоремы:

Теорема 5.4.1. *Пусть S — обобщенный бутерброд с ветчиной в трехмерном пространстве. Тогда можно осуществить такой плоский разрез ножом, что:*

- *хлеб делится пополам;*
- *сыр делится пополам;*
- *ветчина тоже делится пополам.*

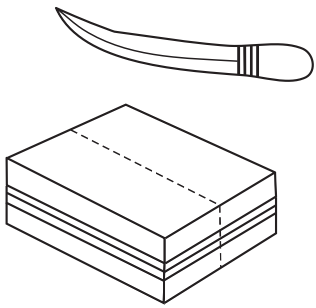


Рис. 5.16. Один разрез классического бутерброда

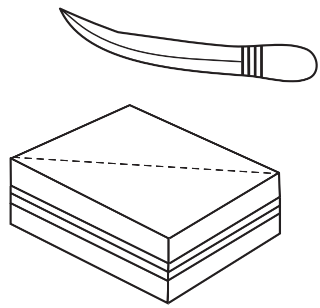


Рис. 5.17. Другой разрез классического бутерброда

Эту теорему иллюстрирует рис. 5.19. Доказательство, которое слишком сложно, чтобы его здесь привести, обобщает свойство среднего значения, использованное при доказательстве теоремы о неподвижной точке в одномерном пространстве.

В эту тему стоит углубиться еще немного. Рассмотрим обобщенную теорему о бутерброде в двумерном пространстве. Здесь мы не можем позволить бутерброду состоять из трех ингредиентов. В пространстве размерности 2 бутерброд можно делать только из хлеба и ветчины. Никакого сыра. Вот тогда результат остается в силе: один линейный

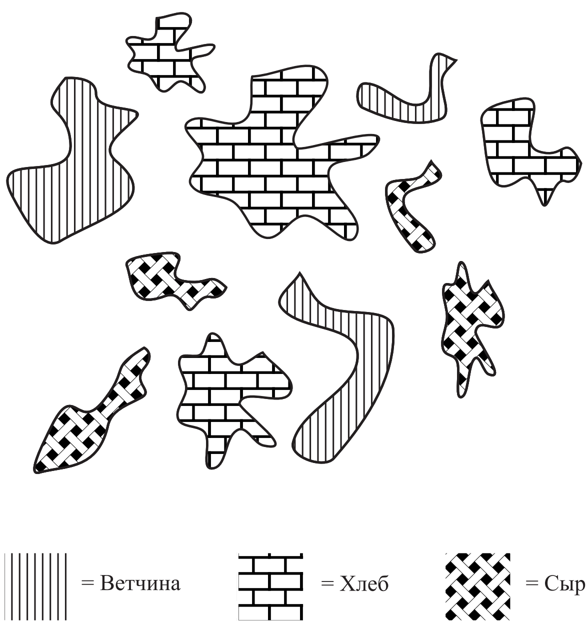


Рис. 5.18. Обобщенный бутерброд с ветчиной

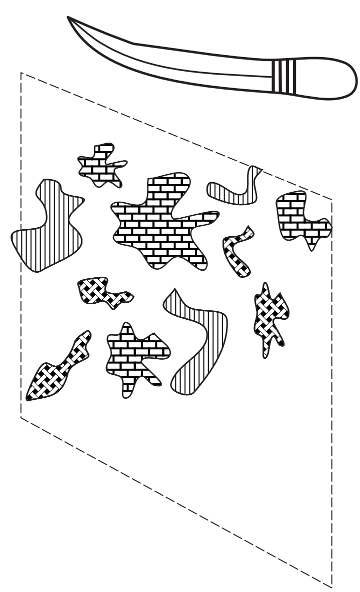


Рис. 5.19. Обобщенная теорема о бутерброде

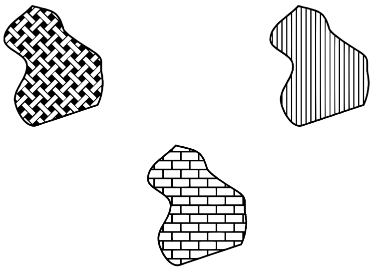


Рис. 5.20. Ограничения на обобщенную теорему о бутерброде в двумерном пространстве

разрез разделит пополам и хлеб, и ветчину. Изучите рис. 5.20 и убедитесь, что если хлеб, сыр и ветчина расположены так, как на этом рисунке, то разделить их все надвое поровну не получится никаким разрезом. Зато *любые два* ингредиента из трех можно разделить пополам одним разрезом.

В пространстве размерности 4 в бутерброд можно добавить еще что-нибудь вкусненькое, скажем, индейку. Все равно найдется такая гиперплоскость, которая разделит на две равные части и хлеб, и сыр, и ветчину, и индейку. Это довольно абстрактная тема, и мы не будем подробно обсуждать ее здесь (интересный рассказ можно найти в [GAR]).

5.5 СУЕТА ВОКРУГ ДОКАЗАТЕЛЬСТВ ОТ ПРОТИВНОГО

Как мы видели, свою знаменитую теорему о неподвижной точке Л. Э. Я. Брауэр доказывал от противного. Однако позднее он отверг этот метод, провозгласив, что в математике все теоремы существования должны доказываться конструктивно. Между прочим, уже *существуют* конструктивные методы для доказательства различных вариаций теоремы Брауэра о неподвижной точке (см. [BIS1]). Один такой метод (им мы обязаны Исааку Ньютону[1)]) мы рассмотрим ниже.

Вначале Брауэр был одиноким воином в поле, исповедующим свою конструктивистскую доктрину без соратников. Но со временем у него появились последователи. Теоретики-специалисты по компьютерным вычислениям заинтересованы в конструктивизме, ведь компьютер — просто устройство для выполнения математических операций в конструктивной манере. В теории вычислений доказательствам от противного отводится определенное место, но все же компьютер — орудие конструктивистов.

Во всем мире вызвал удивление поступок математика Эррета Бишопа (1928–1983), который в 1968 г. высказался в поддержку конструктивизма. Ведь он создал себе авторитет в математике, построив несколько головокружительных доказательств, используя метод доказательства от противного. Но потом он отказался от этого метода. Позднее мы еще вернемся к Бишопу.

Давайте лучше изучим одномерный вариант теоремы Брауэра о неподвижной точке, чтобы понять, нельзя ли подойти к этой теореме

[1)] Ньютон предвосхитил Брауэра на пару сотен лет!

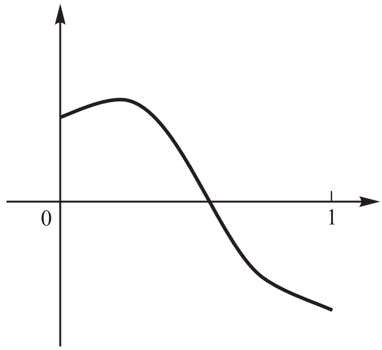


Рис. 5.21. Гладкая функция — подходящий кандидат для метода Ньютона

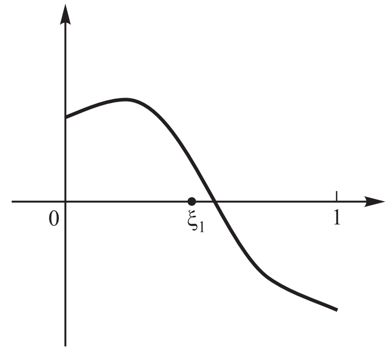


Рис. 5.22. Первый шаг в методе Ньютона

в конструктивистской манере. В этом месте полезно перечитать разд. 5.3, чтобы вспомнить основные идеи доказательства. Главный шаг состоял в том, что мы рассматривали функцию $g(x) = f(x) - x$ и пытались установить, в какой точке она обращается в нуль. Мы знали, что $g(0) > 0$ и $g(1) < 0$, так что можно было воспользоваться тем, что непрерывные функции принимают промежуточные значения, и сделать вывод, что существует точка ξ между 0 и 1 такая, что $g(\xi) = 0$. Отсюда следует, что $f(\xi) - \xi = 0$ или $f(\xi) = \xi$.

Без сучка и задоринки. Это разумное и убедительное доказательство. Но не конструктивное. Существование ξ — не более чем существование, оно следует из абстрактного доказательства. Вообще говоря, мы ничего не можем сказать, чему равно значение ξ или хотя бы как его найти. Если g — *гладкая функция* (график ее не имеет изломов), то существует разработанный Исааком Ньютоном конструктивный метод отыскания ξ[1]. Сейчас мы его вкратце обсудим.

Представьте себе гладкую функцию g, которая принимает положительное значение в 0, и отрицательное — в 1 (см. рис. 5.21). На первом шаге метода Ньютона мы выбираем первое приближение ξ_1 для значения ξ, причем делаем это наугад (см. рис. 5.22). Идея в том, чтобы провести касательную

[1]Подчеркнем, что в некоторых случаях метод Ньютона *не приводит* к желаемому результату — неподвижная точка не находится. Условие гладкости функции не имеет отношения к фундаментальным эпистемологическим вопросам, поднятым Л. Э. Я. Брауэром, — в общем случае конструктивно найти неподвижную точку все равно нельзя. Однако в практических приложениях метод Ньютона обычно применим; он дает конструктивную процедуру построения последовательности, которая сходится к неподвижной точке. Метод Ньютона важен сам по себе, он лежит в основании раздела математики, который в наше время известен под названием *численного анализа*.

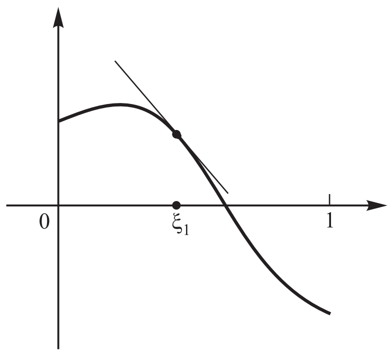


Рис. 5.23. Второй шаг в методе Ньютона

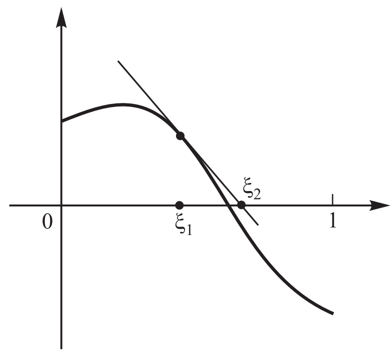


Рис. 5.24. Новое приближение лучше прежнего

к графику в точке, которая соответствует ξ_1 (см. рис. 5.23), и выяснить, где *касательная* пересекает ось абсцисс. Эта точка будет вторым приближением ξ_2 искомого значения ξ. На рис. 5.24 хорошо видно, что второе приближение гораздо удовлетворительнее первого, взятого наугад. Вычисления показывают, что обычно с каждым шагом метода Ньютона число верных десятичных цифр удваивается. Можно сделать такой же шаг еще раз, проведя касательную к графику в точке с абсциссой ξ_2 и найдя точку ξ_3 пересечения с осью x. Это позволит еще раз значительно улучшить результат. Проводя итерации метода Ньютона, обычно получают быстро сходящуюся последовательность значений, приближающих корень (нуль) функции.

В качестве простой иллюстрации метода Ньютона давайте вычислим $\sqrt{2}$ — знаменитое число, иррациональность которого доказал сам Пифагор. Это число является корнем (нулем) полиномиального уравнения $p(x) = x^2 - 2 = 0$. Начнем с того, что выберем первое значение наугад: $\xi_1 = 1,5$. Поскольку $1,5^2 = 2,25$, это значение довольно грубо приближает истинное, которое мы ищем. Оказывается, если проделать все нужные вычисления, подобно описанным выше, по методу Ньютона (а это несложно для того, кто знаком с началами анализа), то

$$\xi_{n+1} = \frac{\xi_n}{2} + \frac{1}{\xi_n}.$$

Применим эту простую формулу для $n = 1$:

$$\xi_2 = \frac{\xi_1}{2} + \frac{1}{\xi_1}.$$

Подставим сюда первое значение, выбранное наугад $\xi_1 = 1,5$, тогда

$$\xi_2 = 1,416666\ldots. \qquad (*)$$

С точностью до двенадцатого знака корень квадратный из двух равен $\sqrt{2} = 1,414213562373$, поэтому видно, что одна-единственная итерация метода Ньютона дает значение $\sqrt{2}$ с точностью до двух знаков после запятой (или до одного, если воспользоваться округлением).

Сделаем еще один шаг:

$$\xi_3 = \frac{\xi_2}{2} + \frac{1}{\xi_2}\,.$$

Подставив сюда значение ξ_2 из (*), найдем

$$\xi_3 = 1,414215\ldots. \qquad (**)$$

Мы получили уже два верных знака числа $\sqrt{2}$.

Сделаем еще один шаг метода Ньютона. Мы знаем, что

$$\xi_4 = \frac{\xi_3}{2} + \frac{1}{\xi_3}\,.$$

Подстановка значения ξ_3 из (**) дает

$$\xi_4 = 1,41421356237\ldots\,.$$

Таким образом, проведя всего три несложные итерации метода Ньютона, мы получили одиннадцать верных цифр. Обратите внимание на точность метода — число верных цифр по крайней мере удваивалось на каждом шаге этого метода!

Метод Ньютона относится к фундаментальным методам области математики, известной как *численный анализ*. В численном анализе используют методы аппроксимации (и компьютерные вычисления) для решения задач, с которыми нельзя справиться другими методами[1)].

Использование методов численного анализа включает еще один сдвиг парадигмы, ведь мы больше не ищем точные решения. Вместо этого мы провозглашаем желательную степень приближения (например, число верных десятичных цифр), а затем находим приблизительное решение с нужной степенью точности. Для практических нужд такой способ приближения вполне удовлетворителен. Скажем, в плотницком деле редко требуется больше 1 или 2 верных цифр после запятой. В высокотехнологичных инженерных приложениях может понадобиться 5 или 6 верных цифр. При разработке микрочипов иногда речь идет об 11 или 12 знаках. Но точное решение требуется редко (хотя в интересах теории оно очень важно и, без сомнения, математики хотели бы получать именно точные решения).

[1)] Мы нашли значение $\sqrt{2}$, делая вычисления вручную, и это заняло несколько минут. Но компьютер может сделать это за долю секунды.

Как мы уже говорили, обычно метод Ньютона позволяет удвоить число верных цифр после запятой при каждой итерации. Поэтому в сочетании с компьютером это очень эффективное средство.

5.6 ЭРРЕТ БИШОП И КОНСТРУКТИВНЫЙ АНАЛИЗ

Эррет Бишоп был одним из величайших *гениев* математического анализа в 1950-х и 1960-х гг. Он заслужил такую репутацию, построив вызывающе блестящие доказательства фактов о структуре функциональных пространств. Многие из его доказательств были непрямыми, иначе говоря, от противного.

Бишоп пережил личностное преображение в середине и конце 1960-х годов. Он был профессором математики в университете Беркли и серьезно обеспокоен политической нестабильностью в кампусе. Через какое-то время он почувствовал, что не может работать в той атмосфере. Кроме того, его сестра, одаренный математик, Мэри Бишоп, покончила жизнь самоубийством, и эти личные неурядицы только усугубили его тревогу. Он перевелся в университет Сан-Диего. Приблизительно в то же время Бишоп пришел к убеждению, что доказательства от противного исполнены опасности. Он написал замечательную и довольно грустную книгу [BIS1], в которой развернул философию конструктивизма — приблизительно в духе идей Брауэра пятидесятилетней давности. В отличие от Брауэра у Бишопа за словами следовали дела. На страницах этой книги Бишоп действительно смог развить большинство идей математического анализа, не прибегая к доказательству от противного. Таким образом, он создал новую ветвь математики под названием «конструктивный анализ».

Одна фраза из предисловия к этой книге Бишопа проливает свет на то, как сам автор относился к делу своих рук:

> Большинству математиков было бы сложно поверить в то, что в основаниях математики может обнаружиться серьезное противоречие, такое, что может оказать значительное влияние на их собственную работу.

Бишоп продолжает:

> Вовсе не будет преувеличением сказать, что прямой реалистический подход к математике еще предстоит опробовать. Сейчас самое время попытаться.

Бишоп позволяет себе развить это соображение:

> Математика принадлежит человеку, а не Богу. Мы не заинтересованы в свойствах натуральных чисел, которые не имеют описательного смысла для конечного человека. Когда человек доказывает, что натуральное число существует, он должен показать, как его найти. Если Богу требуется математика для Его Собственных нужд, пусть Он создаст ее для Себя.

А вот моя самая любимая цитата Эррета Бишопа, та, что ближе всего подбирается к теме этой книги:

Доказательство — это любое вполне убедительное рассуждение.

Рассуждения Бишопа в книге «Методы конструктивного анализа» [BIS1] были, по словам самого Бишопа, дьявольски умны. Книга имела значительное влияние и заставила пересмотреть методологию современного анализа. Правая рука и сотрудник Бишопа Д. Бриджес подготовил исправленное и расширенное издание [BIB] его работы (опубликованное после смерти Бишопа), в котором идеи конструктивизма получили дальнейшее развитие.

Бишоп применил свой конструктивный подход и к другим областям математики. В 1972 г. он опубликовал «Конструктивную теорию меры» [BIC]. А через год написал новую книгу «Шизофрения в современной математике» [BIS2], где перечислил свои принципы конструктивизма:

(A) математика — это здравый смысл;
(B) не спрашивай, истинно ли утверждение, пока не знаешь, что оно означает;
(C) доказательство — это любое вполне убедительное рассуждение;
(D) значимые различия заслуживают того, чтобы их сохраняли.

5.7 НИКОЛЯ БУРБАКИ

Начало XX в. стало зарей современного века логики. Математики осознали, что интеллектуальная структура математики была довольно хаотичной. Не было никаких общепринятых стандартов строгости. Разные люди записывали доказательства своих теорем по-разному. Некоторые вполне выдающиеся математики редко утруждали себя строгими доказательствами.

Нам теперешним, с более чем вековой дистанции, не понять, сколь много математический климат 1900-х гг. был обязан неоднородности предмета и сколь много служил отражением большого числа *гениев*, работавших на пределах своих возможностей в относительной интеллектуальной изоляции. В наше время любой исследователь мгновенно может получить отклик (благодаря Интернету и плотно сплетенному мировому научному сообществу) от математиков из Австралии, Японии, Турции и других точек земного шара. Работать изолированно практически невозможно. По большей части математик, который работает менее чем строго, который не следует ясно прописанным правилам игры, быстро оказывается на обочине[1]. Но на стыке веков все было иначе.

Сто и больше лет назад не было и общепринятого языка математики. Одни и те же термины означали разные вещи для разных людей. Основания геометрии во Франции отличались от оснований геометрии в Англии, а те, в свою очередь, были не похожи на основания геометрии в Германии. Америка была пятым колесом в математической телеге. С точки зрения гуру из мировых центров — Парижа, Берлина, Геттингена, — математиков в Америке никогда не было. В том смысле, что ни один гражданин Соединенных Штатов никогда не доказал ни одной великой теоремы, такой, что была бы признана авторитетами в крупных интеллектуальных центрах Европы. Признание американской математики пришло позднее, вместе с трудами Дж. Биркгоффа, Норберта Винера и других.

Давид Гильберт геттингенский считался одним из интеллектуальных лидеров европейской математики. В знак признания его ведущей роли его пригласили выступить на открытии Второго международного конгресса математиков, который состоялся в Париже в 1900 г. То, что сделал Гильберт на конгрессе, стало потрясением, тектоническим сдвигом в математике. Он сформулировал 23 проблемы[2], которые по его замыслу должны были послужить путеводными звездами в работе математиков XX в. По совету Гурвица и Минковского Гильберт сократил свои заметки и во время лекции огласил только десять проблем. Но вскоре в разных странах было опубликовано более полное изложение идей Гильберта.

Например, в 1902 г. в бюллетене Американского математического общества был опубликован авторизованный перевод работы Гильберта, выполненный Мэри Уинстон Ньюсон[3] (1869–1959). В этом переводе рассказывалось обо всех двадцати трех нерешенных проблемах математики, которые, по мнению Гильберта, были первостепенной важности, и которые крайне важно было решить. Между прочим, 18-я проблема включает задачу Кеплера об упаковке сфер, мы обсудим ее в гл. 10. Первым человеком, решившим одну из проблем Гильберта, стал Макс

---

[1] Конечно же, бывают исключения. Геометры, занимающиеся фракталами, проложили свой собственный путь и развили в большой мере феноменологическую версию математики. Все, кто занимается теорией хаоса, численным анализом, топологией малой размерности, — занимаются немного по-своему.

[2] Интересно, что первоначально в списке Гильберта было 24 проблемы. Но в последний момент он вычеркнул из списка одну — по теории доказательства. Ее нашли позднее в его архиве.

[3] Она была первой американкой, защитившей докторскую диссертацию в Геттингене.

Дин; это случилось в 1900 г. В проблеме 3 шла речь о разрезании многогранника на части, из которых можно сложить другой многогранник[1]. Дин был профессором в университете Франкфурта, а также преподавал в Иллинойском технологическом институте.

Часто говорят, что Гильберт — последний ученый, знакомый со всеми отраслями математики. Он написал основополагающие работы по всем основным разделам математики своего времени. Поэтому неудивительно, что Гильберт смог в своей лекции на международном конгрессе 1900 г. охватить весь предмет математики, выбрать отдельные области, требовавшие особого внимания, и поставить самые титанические проблемы. То, что мы сейчас знаем под названием «Проблемы Гильберта», включает алгебру, геометрию, дифференциальные уравнения, комбинаторику, действительный анализ, логику, комплексный анализ и многие другие части математики. Послание Гильберта заключалось в том, что математики XX в. должны были сосредоточить усилия именно на этих 23 проблемах.

Конечно, имя Гильберта — не пустой звук, и математики уделяли значительное внимание его наставлениям. Они распространяли список проблем у себя на родине и знакомили с ним руководство и коллег. Как уже было сказано, лекция и замечания Гильберта были записаны и опубликованы, и таким образом нашли путь в университеты всего мира. Решить какую-нибудь проблему Гильберта сразу стало очень интересно, и заметное признание и привилегии снискал тот, кому это удавалось.

Сегодня можно сказать, что десять проблем Гильберта (3, 7, 10, 11, 13, 14, 17, 19, 20, 21) полностью решены. Еще для восьми (1, 2, 5, 9, 12, 15, 18, 22) найдены решения, которые, правда, нельзя назвать общепризнанными. Четыре проблемы (4, 6, 16, 23) настолько неприступны, что неясно, появится ли что-то, что можно будет назвать их «решением». И остается еще номер 8, гипотеза Римана, решения которой не предвидится. В книгах [GRA] и [YAN] подробно рассказывается колоритная сага о проблемах Гильберта.

Одной из подлинных страстей Гильберта была логика, в этой области он написал важный труд [HIA]. Поскольку Гильберт обладал универсальными и глубокими познаниями в математике, он много размышлял о том, как согласуются между собой различные ее части. Его беспокоили вопросы аксиоматизации. Гильберт пламенно верил, что должен существовать универсальный (и сравнительно небольшой) набор аксиом математики,

[1] В книге [GRA] рассказывается, что один важный частный случай этой третьей проблемы Гильберта был решен еще до того, как Гильберт дал ее формулировку!

и что из него должны выводиться все математические теоремы[1]. Однако Гильберт ясно сознавал довольно сумбурную историю математики. Слишком хорошо ему было известно, как много в математической литературе ошибок, неточностей и противоречий.

В книге Гильберта по геометрии [HIL], которую можно считать его самой важной работой (не все с этим согласны, отдавая первенство работам по теории чисел, функциональному анализу или теории инвариантов), исправлены многие ошибки «Элементов» Евклида, а его аксиомы переработаны и приведены к виду, с которым мы имеем дело сегодня. В книге по логике Гильберт излагает программу на XX в.: формализовать математику, унифицировать язык, разработать прочный аналитический базис науки. Повторимся: надежды Гильберта перечеркнула дерзкая и гениальная работа Гёделя, появившаяся тридцать лет спустя. Парадокс Расселла (разд. 1.10) уже смущал умы. Но все равно Гильберт был невероятно выдающимся и влиятельным ученым. К его мнению внимательно прислушивались, его программу воспринимали с энтузиазмом. Таким образом, Давид Гильберт оказал огромное влияние на направления, в которых развивалась математика в начале XX в.

Тогда дружеское соперничество между французскими и немецкими математиками длилось уже довольно давно. Хотя их объединяла общая любимая наука, эти две группы занимались математикой в разных стилях, придерживаясь разных приоритетов. Французы приняли программу Гильберта по утверждению математической строгости очень серьезно, но их природа заставила предпринять создание своей собственной, отечественной программы. Этот проект был задуман и исполнен фигурой, замечательной в истории современной математики — Николя Бурбаки.

Жан Дьедонне, *великий сказитель* французской математики XX в., рассказывает об одном обычае, принятом во французской École Normale Supérieure, — устраивать для первокурсников довольно необычный обряд инициации. Один из старших студентов притворялся важным гостем из-за рубежа и читал проработанную и помпезную лекцию, в ходе которой формулировал и доказывал несколько «хорошо известных» теорем. Каждая теорема носила имя знаменитого (или не очень) французского генерала, и в каждой были допущены тонкие ошибки. Цель такого фарса — заставить первокурсников найти ошибочные места в каждой теореме и заодно позабавиться.

---

[1] Благодаря работам Курта Гёделя (разд. 1.10) сейчас мы знаем, что мечта Гильберта неосуществима; по крайней мере не буквально. Но можно утверждать, что большинство работающих математиков программу Гильберта воспринимают всерьез, и многие не расстаются с этим идеалом.

В середине 1930-х гг. группа французских математиков, выпускников знаменитой École Normale, собралась, чтобы написать определяющие тексты по основным разделам математики. Они решили опубликовать эти книги под *псевдонимом* Николя Бурбаки. Этим именем они обязаны малоизвестному французскому генералу Шарлю Дени Сотеру Бурбаки. Говорят, что этому генералу однажды предложили стать королем Греции, но (по неясным причинам) он отклонил такую честь. Позднее, пережив горькое поражение во франко-прусской войне, Бурбаки пытался застрелиться в голову, но промахнулся. Имя Бурбаки использовалось в ходе розыгрышей, принятых в École Normale, и стало знаком буффонады. Когда молодые математики Андре Вейль (1906–1998), Жан Дельсарт (1903–1968), Жан Дьедонне (1906–1992), Жан Кулон (1904–1999), Шарль Эресманн (1905–1979), Шолем Мандельбройт (1899–1983), Рене де Поссель (1905–1974), Клод Шевалле (1909–1984) и Анри Картан (1904–2008)[1)] решили сформировать секретную организацию (названную ассоциацией сотрудников Николя Бурбаки) с целью написать определяющие тексты в главных областях математики, они решили взять себе имя совершенно нелепое. Раз их замысел был *чрезвычайно* важным для любимой науки, был смысл дать их работе забавный подзаголовок.

Так в результате череды случайностей и совпадений некоторые выпускники École Normale собрались и решили начать работу по систематическому описанию и развитию всех ключевых идей современной математики. Можно сказать, что в наше время Николя Бурбаки — одно из самых известных и знаменитых имен в современной математике. Это автор обширной, мощной и влиятельной серии математических книг. Но на самом деле Николя Бурбаки — *псевдоним* группы французских математиков, пожелавших оставаться неизвестными.

Есть и другие, необязательно противоречащие приведенной, истории появления Бурбаки на свет. Андре Вейль рассказывает, что в 1934 г. они с Анри Картаном постоянно спорили о том, как лучше всего подходить к преподаванию теоремы Стокса в курсах, которые они читали в Страсбурге. Вейль пишет:

> Зимним днем в конце 1934 г. я придумал прекрасный способ прекратить постоянные вопросы моего друга [Картана]. У нас было несколько товарищей, которые преподавали тот же предмет в различных университетах. «Почему бы нам не собраться вместе и не решить все эти вопросы раз и навсегда? Тогда ты не будешь больше донимать меня вопросами?» Я еще не догадывался, что в тот момент родился Бурбаки.

[1)]Вначале в группу входили еще Жан Лере (1906–1998) и Поль Дюбрей (1904–1994), но они покинули ее еще до того, как работа фактически началась.

Вейль утверждает, что история имени «Бурбаки» еще длинней и запутанней. В начале 1920-х гг., когда они учились в École Normale, один из старших студентов (Рауль Хассон), нацепив фальшивую бороду и усвоив экзотичный акцент, прочитал широко разрекламированную лекцию, назвавшись *выдуманным* скандинавским именем. Лекция была фарсом до последней буквы, а заканчивалась «Теоремой Бурбаки», после которой аудитория вовсе онемела. Один из студентов позднее вспоминал, что понимал каждое слово.

Жан Дьедонне так описывает философию выбора тем для книг Бурбаки:

> … то, чем Бурбаки предлагает заняться — это обычно математические теории, которые отработали свой ресурс, по крайней мере, в отношении своих оснований. Это вопрос оснований, а не деталей. Эти теории достигли точки, когда их можно изложить целиком рационально. Ясно, что теория групп (и еще более аналитическая теория чисел) — просто цепочка ухищрений, каждое чудней предыдущего, и таким образом, до крайности антибурбакистская. Повторяю, это вовсе не означает, что мы смотрим на нее свысока. Напротив, работа математика проявляется в том, что он смог изобрести, будь это хоть новая стратагема. Вы знаете, как это бывает. В первый раз это стратагема, в третий — метод. Я верю, что большего заслуживает тот человек, который первым изобрел стратагему, чем тот, который с третьего или четвертого раза осознал, что из нее можно сделать метод.

Как мы уже сказали, отцы-основатели группы Бурбаки вышли из традиций École Normale Supérieure. Это один из элитных французских университетов, с давними традициями розыгрышей. Сам Вейль рассказывает об одном особенно забавном эпизоде. В 1916 г. Поль Пенлеве (1863–1933) был молодым блестящим профессором Сорбонны. Кроме того, он принимал экзамены в École Normale Supérieure. Каждый кандидат подвергался тщательному устному экзамену, и Пенлеве входил в число экзаменаторов. Кандидаты собирались рано утром и стояли в холле перед аудиторией, ожидая своей очереди. Как-то раз несколько старших студентов заговорили с новичками. Речь зашла о прекрасной традиции розыгрышей. Они сказали, что очень распространена шутка, когда какой-нибудь студент, притворившись экзаменатором, высмеивает кандидата и издевается над ним. Следует иметь это в виду.

Вооруженный такой информацией, один из кандидатов отправился на экзамен. Он уселся рядом с Пенлеве (а тот выглядел до крайности молодо) и заявил: «Со мной этот фокус не пройдет!» Пенлеве в замешательстве спросил: «О чем это вы? Что вы имеете в виду?» Кандидат фыркнул: «Да я все знаю, вижу вас насквозь — вы самозванец»; сложил руки на груди и откинулся назад. Пенлеве заявил: «Я профессор Пенлеве, я экзаменатор…»

Положение становилось все напряженнее. Пенлеве настаивал на том, что он профессор, студент стоял на своем. В конце концов Пенлеве пришлось попросить директора École Normale прийти и подтвердить его слова.

Когда Андре Вейль рассказывал эту историю, он смеялся до колик.

Позднее на одной конференции в Индии Вейль рассказал своему другу Козамби историю событий, которые привели к созданию группы Бурбаки. После этого Козамби воспользовался именем Бурбаки в пародии, которую он передал для трудов одной провинциальной академии. Под впечатлением такого развития событий группа Бурбаки приняла решение принять это имя решительно и бесповоротно. Жена Вейля, Эвелина, стала крестной Бурбаки и дала ему имя Николя.

Вейль составил биографию Бурбаки и назначил его «выходцем из Полдавии». В качестве верительной грамоты Николя Бурбаки полдавский подготовил статью в журнал «Comptes Rendus» французской академии. Эли Картан (1869–1951) и Андре Вейль проявили недюжинную изворотливость, чтобы Бурбаки был признан, а его статья принята для публикации. Между прочим, «Полдавия» — еще один шедевр шутников из École Normale. Озорные студенты часто писали письма и давали речи от имени полдаван. Речь одного такого демагога заканчивалась так: «Таким образом, я, президент парламента Полдавии в изгнании, живу в такой крайней бедности, что не имею даже пары брюк.» С этим словами он влез на кафедру, явив свои подштанники.

В 1939 г. Андре Вейль жил в Хельсинки. 30 ноября русские впервые бомбили этот город. Вскоре после этого случилось так, что Вейль прогуливался в неподходящем месте в неподходящее время. Его блуждающие взоры и явно заграничная внешность привлекли внимание полиции и он был арестован. Через несколько дней его квартиру обыскали в его присутствии. Были найдены:

- несколько рулонов бумаги для стенографирования на дне чулана; Вейль заявил, что это страницы романа Бальзака;
- письмо на русском языке от Понтрягина. Речь шла о визите Вейля в Ленинград;
- пачка визиток Николя Бурбаки, члена Полдавской королевской академии наук;
- несколько приглашений на бракосочетание дочери Бурбаки Бетти.

Короче говоря, целая коллекция улик. Вейля отправили за решетку.

Через несколько дней, 2 декабря, Рольф Неванлинна (1895–1980) — в то время полковник в запасе финской армии — обедал с шефом полиции. (Следует сказать, что Неванлинна был выдающимся математиком, специалистом по комплексному анализу. Он был учителем будущего филдсовского медалиста Ларса Альфорса.) За кофе шеф заявил: «Завтра мы казним шпиона, который утверждает, что знаком с тобой. Я бы не стал беспокоить тебя по таким мелочам, но раз мы все равно встретились, я рад, что могу тебе это сообщить.» «Как его зовут?» — поинтересовался Неванлинна. «Андре Вейль». Представьте себе шок Неванлинны, ведь Андре Вейль был всемирно известным математиком первой величины. Но он сдержался и сказал: «Я его знаю. Так ли уж необходимо его казнить?» Шеф полиции ответил: «Ну а что бы ты с ним сделал?» «Разве нельзя его просто депортировать?» — спросил Неванлинна невинно. «А что, это идея; это мне в голову не пришло», — ответил шеф полиции, и судьба Андре Вейля была решена.

Когда Вейль был депортирован из Финляндии, его под стражей отправили в Англию, а затем во Францию. Во Франции он числился в резервистах и немедленно был заключен под стражу за то, что не явился на призывной пункт. Много лет спустя он любил говорить, что заключение — совершенное место для занятий математикой: тишина, неплохая кормежка и никто не отвлекает. И действительно, в тюрьме Вейль написал одну из своих самых знаменитых работ — «Основания теории чисел» [WEIL1]. Позднее Герман Вейль (1885–1955) угрожал опять засадить Андре Вейля, чтобы тот работал продуктивнее! Своей жене из камеры Андре писал так:

> Моя математическая работа продвигается так, как я не смел надеяться, и я даже несколько обеспокоен, если так хорошо мне работается только в тюрьме, не следует ли мне попадать сюда на два-три месяца каждый год?

Читая мемуары Вейля [WEIL2], понимаешь, что молодой Вейль чувствовал, что на самом деле группа Бурбаки изобретала математику заново для XX в. В частности, они предприняли попытку стандартизовать терминологию и обозначения. Вейль берет на себя изобретение знака $\varnothing$ для пустого множества (в котором нет элементов). По его словам, в группе как раз размышляли, как бы обозначить это особенное множество. Вейль был единственным, знакомым с норвежским алфавитом, и предложил воспользоваться этой буквой. Это соображение вошло в первую книгу Бурбаки — по теории множеств! Все-таки поразительно — по крайней мере для тех, кто получил математическое образование — что обозначение для пустого множества в 1930 г. еще только обсуждалось!

Группа Бурбаки сформировалась в 1930-х гг. Первая предварительная конференция прошла в конце 1934 г., а затем утвердилось строгое правило собирать каждый год по две конференции — недельную и двухнедельную. Первая формальная конференция состоялась в Бесс-ан-Шандесс в июле 1935 г. Вначале казалось, что основы всей математики удастся набросать хотя бы вчерне за три года. А на самом деле подготовка первой завершенной главы (одной только книги по теории множеств) заняла четыре года.

Каждый из отцов-основателей организации сам по себе был выдающимися и состоявшимся математиком. У каждого было широкое видение предмета и четкое понимание того, чем должны быть Бурбаки и какую миссию исполнить. Первоначальная цель группы — написать определяющий текст по математическому анализу, однако со временем было решено, что проверки и ясного изложения требует вся математика. Хотя книги Бурбаки хорошо известны во всем мире, личности членов группы сохранялись в секрете. Конференции и их результаты — все было покрыто тайной. Внутреннюю жизнь группы не раскрывал никто; наоборот, даже распространялась дезинформация, чтобы вводить посторонних в заблуждение.

Со временем к Бурбаки присоединились новые члены; например, Александр Гротендик из Института высших научных исследований, Жан-Пьер Серр из Коллеж де Франс, Самюэль Эйленберг из Колумбийского университета, Арман Борель из Института перспективных исследований и Серж Ланг из Колумбии и Йеля. Другие, наоборот, выходили из состава группы. Но ее основу составляли французские математики, у которых было согласованное представление о потребностях математики XX в. В группе Бурбаки было очень мало формальных правил; одно из них гласило, что по достижении 50 лет любой человек должен покинуть группу.

Членство в Бурбаки предназначалось для создания фундаментальных текстов по всем основным областям современной математики. Бурбаки придерживались такого метода создания своих книг.

- Первое правило Бурбаки — они пишут о какой-то теме, если только она (i) относится к базовому материалу, который должен быть известен каждому студенту, и (ii) математически «мертва». Это второе требование означает, что тема не относится к активно развивающимся в математике. В группе Бурбаки заметное время уделяется дискуссиям о том, на какие темы следует писать книги.
- Затем следует подробное и долгое обсуждение выбранной темы: каковы ее важные компоненты, как они между собой соотносятся; какие результаты представляют собой вехи в развитии и так далее. Если возможны несколько различных подходов (а в математике это часто

случается), то они рассматриваются с целью выбрать один, подходящий для книги Бурбаки. Такие обсуждения занимают несколько дней. Встречи прерываются длинными и обильными трапезами в хороших французских ресторанах.

- После того как Бурбаки согласуют тему главы, работа по написанию первого ее черновика может быть поручена любому желающему члену группы. Это дело небыстрое, оно может занять несколько месяцев. Жан Дьедонне, один из основателей Бурбаки, был знаменит умелым и продуктивным писательством. Именно он чаще всего исполнял роль сочинителя первого черновика. Но Дьедонне был плодовитым математиком и писателем сам по себе[1)].
- После завершения первого черновика его копии распространяются среди членов Бурбаки. На следующей конференции (так назывались их встречи) новый текст зачитывается строка за строкой, а группа должна достичь единодушного одобрения каждой. Любая часть любой книги Бурбаки должна быть проработана каждым членом. Бурбаки читают каждое слово каждого доказательства пристрастно и критически. А затем группа трижды в год продолжает свои конференции (отдавая должное элегантности французских ресторанов), строка за строкой продвигая книгу. Члены Бурбаки были дружны и высоко ценили друг друга как ученые, но жестоко спорили из-за отдельных слов или предложений в текстах Бурбаки. Они часто подчеркивали, что конфронтация ведет к продуктивной работе скорее, чем единодушие. Итак, тщательная проработка первого черновика будущей книги Бурбаки занимала значительное время.
- После завершения первого черновика начиналась работа с грудой поправок, уточнений и изменений — создание второго черновика. Этим мог заняться автор первого черновика или кто-нибудь другой. А затем весь цикл повторялся.

Создание книги требовало нескольких лет и многих черновиков. Первая книга Бурбаки по теории множеств была опубликована в 1939 г. Новые книги и новые издания старых появлялись до 2005 г. К этому моменту в монументальной серии «Элементы математики» изданы труды по 13 областям. Но многие их них разделены на «главы», так что сложно разобраться, сколько книг вышло из-под пера Бурбаки. Эти книги

[1)]Известен случай, который четко разделяет две его ипостаси. Однажды Дьедонне опубликовал статью от имени Бурбаки, но оказалось, что в ней была ошибка. Через некоторое время появилась другая статья под названием «Об одной ошибке Н. Бурбаки», и автором этой статьи значился Жан Дьедонне.

составляют существенную (хотя и неполную) библиотеку современной математики на уровне выпускников университетов. Выбор тем самый широкий — от абстрактной алгебры до топологии точечных множеств, от групп Ли до действительного анализа.

Язык книг Бурбаки кристально ясен и точен. У Бурбаки очень жесткие представления о математической строгости. Например, *в книгах Бурбаки, как правило, рисунков нет!* Это правда. Бурбаки считают, что рисунки апеллируют к интуиции, и что поэтому им нет места в чисто математических текстах. Если о математике писать корректно, то идеи должны быть ясны и так — по крайней мере после достаточного обдумывания. Изложение в книгах Бурбаки подчинено строгой логике; начинается с определений и аксиом, за которыми идут леммы, утверждения, теоремы и следствия. Все доказывается строго и точно. Примеров и объяснений мало, в основном только теоремы и доказательства. Не бывает никаких «примем без доказательства», «приведем схему доказательства» или «доказательство мы оставляем читателю в качестве упражнения». В каждом случае Бурбаки дают нам полный комплект.

Книги Бурбаки оказали заметное влияние на современную математику. На протяжении многих лет другие авторы учебников пытались подражать стилю Бурбаки. Среди них Уолтер Рудин; он написал много книг без картинок, придерживаясь строго формального стиля. В 1950-х, 1960-х и 1970-х гг. Бурбаки были законодателями в моде. Эта группа французских математиков с вымышленным именем установила стандарт, которому подчинялись очень многие. Можно сказать, что целое поколение математических текстов плясало под дудку, в которую дули Бурбаки.

Но мода изменчива. Сейчас во Франции широко распространено мнение, что Бурбаки причинили значительный вред французской математике. Как это могло случиться? Система математических ценностей, которую мы описываем в этой книге, неотъемлемая страсть к логике и строгости, все говорит за то, что Бурбаки должны быть героями нашего времени. А вот и нет. В игру вступают другие силы.

В некотором смысле книги Бурбаки были правильными книгами для своего времени. В 1940-х, 1950-х и 1960-х гг. текстов по продвинутой математике было мало. Поэтому книги Бурбаки действительно закрыли зияющую брешь. Сейчас текстов много, и слышны разные голоса из самых разных источников. Кроме того, в математике появились области, не изученные Бурбаки.

У их книг есть такая особенность — они относятся только к чистой математике. Не бывает книг Бурбаки по прикладным уравнениям в частных производных или теории управления, или теоретическому программированию, криптографии, теории графов и по многим другим темам, в которых применяется математика. Кроме того, есть разделы чистой математики, на которые взор Бурбаки не обращался никогда; один пример — теория категорий, а второй — теория чисел. Бурбаки мало что могут сказать о логике. Бурбаки подходят ко всем вопросам — даже в области анализа и геометрии — с очень абстрактной и алгебраичной точки зрения.

Еще одна черта Бурбаки — они отвергают интуицию в каких-бы то ни было проявлениях[1]. Книги Бурбаки обычно не включают объяснений, примеров или эвристических соображений. Одна из главных тем настоящей книги состоит в том, что мы *записываем* математику для потомков в строго точной, аксиоматичной манере. В этом заключается математическая версия воспроизводимого эксперимента, как он понимается в физике, биологии или химии. Но мы учим математику, мы открываем математику, мы творим ее, опираясь на интуицию и метод проб и ошибок. Мы рисуем картинки. Мы вертим вещи так и этак, гнем их и мнем, чтобы заставить работать. К несчастью, об этом последнем процессе у Бурбаки не сказано ни слова.

Таким образом, хотя Бурбаки подали пример того, как должна выглядеть записанная математика, хотя их работа — блистательный образец строгости и аксиоматического метода, подход Бурбаки вовсе нельзя назвать хорошим и эффективным средством обучения. Так что, в конце концов, Бурбаки не вполне завершили свою высокую элегантную образовательную миссию. Хотя в 1960-х и 1970-х гг. во всем мире было принято использовать тексты Бурбаки в качестве университетских учебников, сейчас от этой практики отказались. Эти книги до сих пор служат справочниками и полезны как самоучители. Но, вообще говоря, существуют гораздо лучшие тексты других авторов. Мы не можем при этом удержаться и не сказать, что эти «другие авторы» учились по Бурбаки. Их влияние до сих пор значительно.

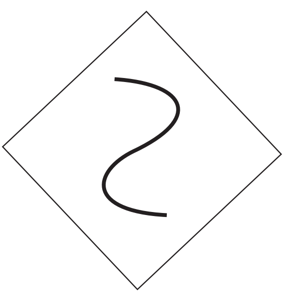


Рис. 5.25. Знак «опасный поворот» Бурбаки

Бурбаки оставили нам в наследство один забавный символ, которым они обозначали трудные места в своих текстах. Читателям, бывавшим в Европе, знаком общепринятый дорожный знак, означающий опасную или извилистую дорогу. На рис. 5.25 как раз изображен знак, который Бурбаки ставит на полях

[1]В этом отношении Бурбаки следуют давней традиции. Блестящий математик Карл Фридрих Гаусс любил повторять, что архитектор не оставляет лесов вокруг здания, чтобы люди видели, как здание было возведено. Точно так же математик не оставляет указаний на то, как он построил или нашел доказательство.

книги возле сложных абзацев; знак этот обозначает математическую опасность. По-видимому, это самый широко распространенный бурбакистский артефакт. Авторы многих книг используют знак «опасный поворот» Бурбаки, чтобы отмечать трудные места в своих текстах[1].

Давид Гильберт (разд. 5.1) и Николя Бурбаки сыграли важную роль в развитии математики XX в. Можно сказать, что в наше время во всем мире математикой занимаются одинаково. Терминология едина. Стандарты строгости общеприняты. Аксиоматический метод используется всюду одинаково. И мы можем быть благодарны Давиду Гильберту и Николя Бурбаки за то, что они указали нам путь и установили образец, на который можно равняться.

Жан Дьедонне (1906–1992) впадает в эйфорию, описывая, как Бурбаки устанавливали рамки математики:

> И вот что остается: архиклассичекие структуры (я не говорю здесь о множествах, конечно), линейная и многолинейная алгебра, немного общей топологии (как можно меньше), немного топологических векторных пространств (как можно меньше), гомологическая алгебра, коммутативная алгебра, некоммутативная алгебра, группы Ли, интегрирование, дифференцируемые многообразия, геометрия Римана, дифференциальная топология, гармонический анализ и его обобщения, дифференциальные уравнения — обыкновенные и в частных производных — представления групп в общем, и в своем самом широком смысле аналитическая геометрия. (Здесь, конечно же, я понимаю этот термин в смысле, принятом Серром, — единственно разумном смысле. Абсолютно неразумно называть аналитической геометрией линейную алгебру с координатами, хотя именно ее называют *аналитической геометрией* в элементарных книгах. Аналитическая геометрия в этом смысле не существовала никогда. Существовали только люди, дурно практиковавшие линейную алгебру, рассматривая координаты и за это величая ее аналитической геометрией. Оставим их! Все знают, что аналитическая геометрия — это теория аналитических пространств, одна из глубочайших и сложнейших теорий всей математики.) Ее сестра, алгебраическая геометрия, тоже входит в этот список, а завершает его теория алгебраических чисел.

Когда Ральф Боа был главным редактором журнала «Mathematical Reviews», он совершил ошибку — опубликовал мнение, что Бурбаки на самом деле не существует, причем опубликовал не где-нибудь, а в статье для Британской энциклопедии. После этого на адрес энциклопедии пришло гневное письмо, подписанное самим Николя Бурбаки, в котором утверждалось, что он не допустит, чтобы кто-то поставил под вопрос его право на

---

[1]На русском языке выходили пособия заочной математической школы МГУ, где используется тот же значок. — *Прим. перев.*

существование. Чтобы отомстить редактору, Бурбаки принялся распространять слух, что Ральф Боа на самом деле не существует. Более того, Бурбаки утверждал, что на самом деле имя Боа — акроним; буквы B. O. A. S. были псевдонимом группы редакторов журнала «Mathematical Reviews».

«Послушайте, эти французы слишком увлеклись. Они дали нам уже дюжину независимых свидетельств того, что Николя Бурбаки — человеческое существо из плоти и крови. Он пишет статьи, шлет телеграммы, празднует дни рождения, страдает от простуды и рассылает приветственные адреса. А теперь они хотят, чтобы мы тоже поддержали их утку. Они хотят, чтобы его приняли в Американское математическое общество (AMS). Мой ответ — нет». Это реакция Дж. Р. Клайна, секретаря AMS, на заявление от легендарного Николя Бурбаки.

5.8 СРИНИВАСА РАМАНУДЖАН И НОВЫЙ ВЗГЛЯД НА ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Сриниваса Рамануджан (1887–1920) был одним из самых удивительных и талантливых математиков XX в. Он родился в бедной семье в небольшой индийской деревне Эрод. В детстве он сменил несколько начальных школ, выказав значительный талант во всех предметах. К тринадцати годам Рамануджан начал свои собственные независимые математические исследования и научился суммировать различные виды рядов (включая арифметическую и геометрическую прогрессии). Когда ему исполнилось 15, ему показали, как решать кубическое, т. е. третьей степени, полиномиальное уравнение. Он воспользовался этой идеей, чтобы разработать собственный метод решения уравнения четвертой степени. Его попытки решить уравнение пятой степени были обречены на неуспех с самого начала, ведь еще за много лет до того Абель показал, что это невозможно.

К 17 годам Рамануджан проработал старый учебник Г. С. Карра и достиг заметных успехов в математике. Он начал собственные исследования постоянной Эйлера и чисел Бернулли.

Рамануджан получил стипендию, позволившую ему посещать правительственный колледж в Кумбаконаме. Он приступил к учебе в 1904 г. в возрасте 17 лет, но вскоре был отчислен, поскольку тратил все свое время на математику, а остальными предметами пренебрегал. Он самостоятельно изучал гипергеометрические ряды и эллиптические функции.

В 1906 г. Рамануджан предпринял попытку сдать вступительные экзамены в университет Мадраса. Но он выдержал только математическую часть теста и поэтому не поступил.

Все это время здоровье Рамануджана оставалось довольно хрупким. В два года он перенес оспу, а затем еще несколько серьезных заболеваний в подростковом возрасте. В 1909 г. Рамануджан женился на десятилетней девочке по имени Янаки Аммал.

Рамануджану удалось опубликовать некоторые свои идеи об эллиптических функциях и числах Бернулли в журнале Индийского математического общества. Этим он заслужил репутацию молодого математического гения.

В это же самое время Рамануджану приходилось занимать должность низкооплачиваемого клерка, чтобы заработать на жизнь. В поисках поддержки и совета в 1912 и 1913 гг. Рамануджан обратился с письмами к ряду выдающихся британских математиков, включая М. Дж. М. Хилла, Э. У. Гобсона, Х. Ф. Бейкера и Г. Х. Харди. Именно Харди сразу понял, с каким необычным человеком столкнула его судьба, и по достоинству оценил гений Рамануджана; Харди решил что-нибудь сделать для него. Это был поворотный момент в жизни Рамануджана и его математической карьере.

В 1914 г. благодаря Харди Рамануджан прибыл в Тринити-колледж Кембриджского университета. Рамануджан был ортодоксальным брамином, и это значительно затруднило его путешествие. К тому же он был строгим вегетарианцем, и поэтому ему (человеку слабого здоровья) оказалось крайне сложно организовать правильное питание в Британии времен Первой мировой войны. Тем не менее Харди и Рамануджан немедленно приступили к плодотворному и динамичному сотрудничеству.

Но здесь тоже обнаружились свои трудности, и весьма важные для тематики нашей книги. Рамануджану очень недоставало формального образования. Он не видел или не понимал важности математического доказательства. Он просто «видел» факты, проникая в них почти мистически, и оставлял другим позаботиться о том, как эти факты доказывать. Часто Рамануджан был прав в глубоком и важном смысле, но иногда он ошибался. Он полагал, что Бог говорит с ним и посылает ему эти математические озарения. Харди же был одним из самых признанных и влиятельных математиков того времени, для него был неприемлем этот подход Рамануджана. Иногда Харди сам мог построить доказательства, но иногда ему это не удавалось.

К 1919 г. здоровье Рамануджана совсем расшаталось и он вернулся в Индию. Через год он умер; считается, что проблемы со здоровьем могли быть связаны с его диетой или недостатком витаминов (но некоторые полагают, что виной всему был туберкулез).

Рамануждан оставил несколько замечательных тетрадей, в которых записывал свои формулы и идеи. Но не доказательства. До сих пор математики пытаются заполнить все пробелы в этих записях, прорабатывая детали, чтобы мы смогли понять и оценить открытые Рамануджаном поразительные связи в мире чисел. Мы закончим знаменитой историей, иллюстрирующей почти волшебную власть Рамануджана в этом мире.

В конце своего пребывания в Великобритании Рамануджан лежал в госпитале. Его часто навещал его друг и учитель Харди. Однажды Харди, входя, пожаловался: «Я заметил, что ехал на такси номер 1729. Какое неинтересное число!» Рамануждан немедленно ответил: «Нет, Харди, нет! Это очень интересное число! Это самое маленькое число, которое можно представить в виде суммы двух кубов двумя разными способами».

Раз уж Харди стал известен этот факт, доказать его не составило труда. Но как Рамануждан смог до этого догадаться?

5.9 ЛЕГЕНДА О ПОЛЕ ЭРДЁШЕ

Пол Эрдёш (1913–1996) был очень необычным человеком. Он родился в венгерской семье среднего класса. Родители баловали его беспощадно. Пока ему не исполнился 21 год, он пальцем о палец для себя не ударил — за него все делала его мать, отчасти из-за трепета перед его очевидным необычайным талантом в математике.

Эрдёш стал мощным и креативным математиком. Но у него никогда не было постоянной должности. Уместив пожитки в маленький саквояж, он путешествовал с факультета на факультет и сотрудничал с математиками — знакомые у него были повсюду. Разумеется, Эрдёш ожидал, что другие о нем позаботятся. Он ожидал, что другие обеспечат ему кров и хлеб, что найдется кто-то, кто выстирает ему одежду и оплатит счета. У Эрдёша никогда не было много денег, но за решение своих любимых задач он часто предлагал значительные премии. И всегда их выплачивал. У него спрашивали (когда сумма премий дошла до $30 000): «Что вы будете делать, если все ваши задачи будут решены? Как вы расплатитесь?» Эрдёш отвечал: «А что будет делать серьезный банк, если все его вкладчики явятся в один день и потребуют свои деньги? Объявит себя банкротом. Но вероятность этого больше, чем вероятность того, что все мои задачи будут решены».

Много лет Эрдёш путешествовал со своей матерью. После ее смерти он продолжил похождения в одиночку. Друзья у него были повсюду. Особенно сильно заботился о Поле Рон Грэхем (раньше он работал в лабораториях Белла AT&T Bell Labs, а сейчас в университете Сан-Диего). Похоже, именно он ввел в употребление фразу «няньчиться с дядей Полом» в значении «заботиться об Эрдёше». Грэхем сделал пристройку к своему дому, чтобы предоставлять Эрдёшу жилье по первому требованию, и вел для него несколько банковских счетов. Грэхем и Даниэль Клейтман из MIT платили за Эрдёша налоги.

В начале 1980-х гг. Эрдёш стал знаменитостью, ему было посвящено много статей в газетах и журналах. В одном из интервью его спросили, отчего он никогда не был женат, и он ответил: «Я не могу доверять сексуальному удовольствию». Правда же в том, что Эрдёш полностью посвятил себя своей математике. Только о ней были его помыслы. У него не было времени на личные отношения в том смысле, как их обычно понимают.

У Эрдёша было замечательное и оригинальное чувство юмора. Он часто шутил о старости и о маразме, который с ней приходит. Он полагал, что есть три степени ментального угасания:

- сначала ты забываешь свои теоремы;
- потом ты забываешь застегивать штаны;
- потом ты забываешь их расстегивать.

Про эксцентричность Эрдёша и его преданность математике (до полного пренебрежения всем остальным) ходит много баек, и парочку мы здесь расскажем.

- Однажды Эрдёшу сказали, что его друг застрелил свою жену. Не моргнув глазом, Эрдёш ответил: «Что ж, видимо, она отвлекала его, пока он пытался доказать теорему».
- Эрдёш мог запомнить пару дюжин телефонных номеров с одного взгляда, но был ужасно рассеян в отношении многих других вопросов. Будучи в Калтехе, в один несчастный день он потерял свой свитер дважды. В первый раз свитер нашелся, а во второй — нет. Когда Эрдёш приезжал в мой университет (в Пенсильвании), мы спрашивали у него номер социальной страховки, чтобы заплатить ему. Он не знал. За обедом, на котором не шла речь о математике, он заснул.
- Беспокойный дух Поля Эрдёша не давал ему оставаться на одном месте больше месяца. Ему всегда было интересно, что там, за поворотом. По словам его друга и защитника Рона Грэхема, «Он всегда знал, что где-то там есть еще одна задача. Когда он заводил светскую беседу о политике, вы понимали, что он уже выжал все математические соки из окружения и готов двинуться дальше».

Эрдёш — воплощение духа математики XX в. Он — чистейший из чистых математиков в классическом смысле слова. Он никогда не пользовался компьютером, никогда не прибегал к численному анализу или моделированию. Он придумывал и доказывал теоремы. Других интересов в его жизни не было. Эрдёш часто рассказывал о «Божественной книге» —

той книге, в которой Господь записывает идеальные доказательства каждого результата[1].

У Эрдёша были свои любимые словечки, которые он с юмором употреблял при всяком удобном случае. Детей он называл эпсилонами (ведь греческой буквой ϵ — эпсилон — обычно обозначают очень малое количество), мужей — рабами, а Бога — «верховным фашистом». Очень может быть, что Пол Эрдёш — самый продуктивный математик в истории. Он написал более 1500 статей — примерно в 20 раз больше, чем типичный плодовитый математик. И у него было более 500 соавторов. В какой-то момент стало казаться, что с Эрдёшем сотрудничали все; или по крайней мере, у каждого математика был соавтор, писавший вместе с Эрдёшем. В 1960-х гг. математик Каспер Гоффман предложил идею *числа Эрдёша*. Она стала очень популярной в последние годы. Ваше число Эрдёша равно 1, если вы написали статью в соавторстве с ним. Ваше число Эрдёша равно 2, если среди ваших соавторов есть кто-то с числом Эрдёша 1. И так далее. В математическом сообществе малое число Эрдёша — повод для гордости. Число Эрдёша автора этой книги равно 1.

5.10 ПОКЛОНЕНИЕ ПОЛУ ХАЛМОШУ

Пол Халмош (1916–2006) родился в Будапеште, а в возрасте 13 лет переехал в Соединенные Штаты. Из-за ошибки клерка его отправили в одиннадцатый класс вместо восьмого, но он умудрился быстро выучить язык и справиться с учебой. Почти сразу он объявил себя стопроцентным американцем, хотя на всю жизнь сохранил венгерский акцент (в основном потому, что считал его очаровательным).

Халмош получил образование в университете Иллинойса, и в 1938 г. защитил диссертацию под руководством Джозефа Дуба. Это были тяжелые времена, работу найти было невозможно, и дела у Халмоша шли не лучшим образом. Он получил место в Рид-колледже, однако отказался от него, даже не попытавшись поселиться в Портленде. Вместо этого он отправился в Институт высших исследований в Принстоне (формального назначения он так и не получил, а деньги ему одолжил отец) и стал ассистентом Джона фон Неймана. Для Халмоша это был опыт, изменивший всю его жизнь и определивший дальнейшую карьеру.

В 1942 г. Халмош (вдохновленный лекциями фон Неймана) написал первую свою книгу, ее темой стала линейная алгебра. Книга под названием

[1] Говорят, в эту Книгу удалось заглянуть Айгнеру и Циглеру и, вспоминая прочитанное, они написали «Доказательства из Книги», ее 3-е издание вышло в издательстве «БИНОМ. Лаборатория знаний». — *Прим. перев.*

«Конечномерные векторные пространства» сразу же стала классической, а Халмош получил признание как первоклассный автор, доходчиво объясняющий материал. Опыт получил продолжение; всего Халмош написал 18 книг. Они оказали большое влияние на математическую литературу в целом, установив стандарт написания современных математических текстов.

Кроме того, Халмош был замечательным математиком-исследователем. Он внес вклад в широкий ряд тем, от теории операторов до функционального анализа, от эргодической теории до логики и другие. Особенно заметным стало его изобретение понятия *субнормального оператора*. Долгое время Халмош был движущей силой в теории операторов. Многие помнят его за искусство задавать правильные вопросы.

Халмош был исключительно несговорчивым и никогда не стеснялся высказывать собственное мнение. Одно из самых *знаменитых его высказываний* —

> «Компьютеры важны, но не в математике».

Кроме того, он отличился своей знаменитой статьей

> «Прикладная математика — дурная математика».

Правда, в первом же абзаце статьи он указал, что на самом деле вовсе не согласен с тем, что говорит заголовок. Но заголовок никуда не делся и точка зрения была провозглашена.

Карьера Пола Халмоша замечательна тем, что он занимал много различных должностей: в университете Иллинойса, Институте высших исследований, Сиракузском университете, университетах Чикаго, Мичигана, Гавайском, Калифорнийском в Санта-Барбаре, Индианы и Санта-Клары. Халмошу всегда было интересно узнать, что там, за следующим поворотом; для него жизнь, в особенности жизнь в математике — это обязательно приключение.

Самая знаменитая книга Халмоша относится к мемуарному жанру: «Я хочу быть математиком. Автобиография». Она опубликована в 1985 г. и представляет собой искреннее описание жизни не только самого Халмоша, но и многих людей, с которыми его свела судьба. Халмош не тянет кота за хвост, делая откровенные замечания о живущих математиках, о том, как они относились к нему самому. Многие высказывали резкие мнения об этой книге. Тем не менее, «Я хочу быть математиком» представляет собой широкую панораму математической жизни и правдивый отчет о том, что она собой представляет.

Халмош — энергичный математик, редактор, писатель, рассказчик и в особенности учитель. Многие его ученики защитили ученые степени, и все вспоминают его как выдающегося педагога и лектора. Халмош оказывал глубокое влияние на всех, с кем был знаком. Как и Эрдёш, он был чистейшим из чистых математиков. Он формулировал теоремы и доказывал их. Все остальное не имело значения.

5.11 ПУТАНИЦА И ПАРАДОКСЫ

Двадцатый век — век вдумчивого изучения оснований математики, которое привело к появлению самых разных парадоксов. Об одном из них — *парадоксе Расселла* — мы уже говорили в разд. 1.10; сейчас мы расскажем о некоторых других.

Отличительная черта этих парадоксальных результатов в том, что их можно логически *корректно* вывести из известных нам аксиом теории множеств. Однако эти результаты настолько поразительны, настолько противоречат интуиции, что невольно возникает подозрение в том, что математика внутренне противоречива, а занятия математиков — мартышкин труд.

Но мы, современные математики, знаем, что это не так. Все парадоксы, которые мы здесь обсуждаем, *можно* объяснить, и мы покажем, что эти объяснения из себя представляют. Чтобы освоиться с этими парадоксами, потребуется время и некоторые усилия.

5.11.1 Парадокс Бертрана

Этот парадокс был открыт несколько столетий назад. Его можно отнести к одной из причин того, что развитие теории вероятностей стартовало на такой зыбкой почве. Разрешение этого парадокса и понимание того, что на самом деле ему не присущи внутренние противоречия, пришли только в конце 1930-х годов. Так что этот парадокс льет воду на нашу мельницу.

Впишем в окружность единичного радиуса равносторонний треугольник, как показано на рис. 5.26. Длину стороны этого треугольника обозначим l. Предположим, что наугад[1)] выбрана хорда d окружности, длину хорды обозначим m. Какова вероятность того, что длина m хорды d превосходит длину l стороны треугольника?

Здесь «парадокс» заключается в том, что у задачи есть три разных, но одинаково верных решения. Мы предъявим последовательно все три, а потом покажем, почему у задачи такого рода может оказаться три разных решения.

[1)] Не вдаваясь в формальные подробности, мы можем сказать, что слово «наугад» здесь означает, что вы закрываете глаза и хватаете первую попавшуюся хорду из бесконечной груды существующих.

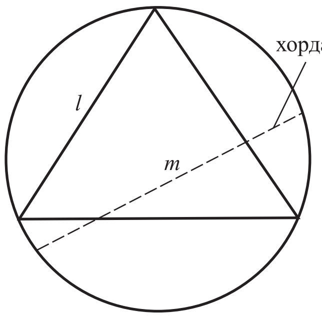


Рис. 5.26. Парадокс Бертрана

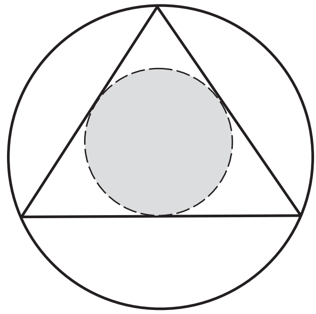


Рис. 5.27. Первое решение парадокса Бертрана

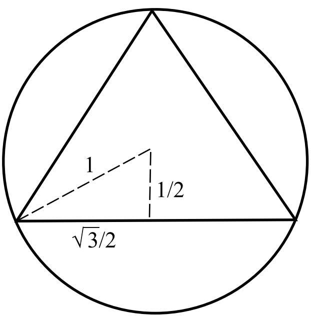


Рис. 5.28. Первое решение парадокса Бертрана. Продолжение

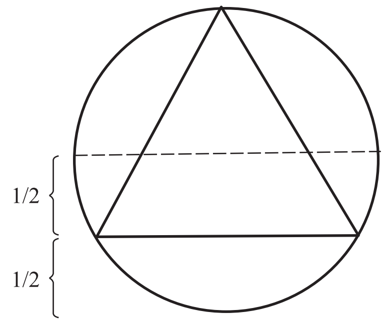


Рис. 5.29. Второе решение парадокса Бертрана

Первое решение. На рис. 5.27 выделен затемненный открытый диск, граница которого — окружность, касающаяся равностороннего треугольника изнутри. Если середина наугад выбранной хорды d лежит *внутри* этого диска, то $m > l$; а если *снаружи* — то $m \leqslant l$. Вероятность того, что длина хорды больше длины стороны треугольника, равна

$$\frac{\text{площадь диска}}{\text{площадь единичного диска}}.$$

Как видно из рис. 5.28, радиус затемненного диска равен $\frac{1}{2}$, а значит, площадь его равна $\frac{\pi}{4}$. Площадь единичного диска равна π. Отношение площадей составляет $\frac{1}{4}$, поэтому можно сделать вывод: вероятность того, что длина случайной хорды больше стороны правильного треугольника, равна $\frac{1}{4}$.

Второе решение. Рассмотрим рис. 5.29. Вполне можно считать, что наша наугад выбранная хорда расположена горизонтально (равносторонний треугольник и хорду можно вращать так, что хорда, как и одна из

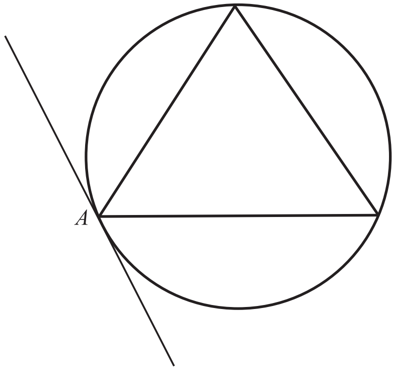


Рис. 5.30. Третье решение парадокса Бертрана

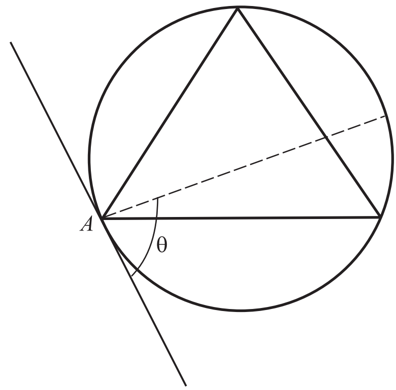


Рис. 5.31. Третье решение парадокса Бертрана. Продолжение

сторон треугольника, расположится горизонтально). Заметим, что если расстояние от самой нижней точки окружности до хорды меньше или равно $\frac{1}{2}$, то $m \leqslant l$, а если больше (но не превышает единицы), — то $m > l$. Мы видим, что с вероятностью $\frac{1}{2}$ длина m хорды d больше длины l стороны равностороннего треугольника.

Третье решение. Рассмотрим рис. 5.30. Вполне можно считать, что один конец нашей наугад выбранной хорды совпадает с левой нижней вершиной A вписанного равностороннего треугольника, ведь этого всегда можно добиться, вращая треугольник. Угол, который образует хорда с касательной к окружности в точке A, обозначим θ (см. рис. 5.31). Если величина этого угла заключена в пределах от 0° до 60° включительно, то хорда короче или равна стороне треугольника.

Если же угол находится строго между 60° до 120°, то хорда длиннее стороны. И наконец, если величина угла лежит в пределах от 120° до 180° включительно, то хорда короче стороны треугольника. Поэтому вероятность того, что наугад выбранная хорда длиннее стороны треугольника, равна $\frac{60}{180} = \frac{1}{3}$.

Мы познакомились с тремя решениями задачи, и все они приводят к разным верным ответам: $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$. Как могло случиться, что у вполне разумной задачи три совершенно разных ответа? И к тому же верных? Дело в том, что когда мы имеем дело с вероятностным пространством с бесконечным количеством элементарных событий (т. е. с ситуацией, когда число исходов — позиций случайно выбранной хорды — бесконечно велико), существует бесконечно много способов задать вероятности. Обратите внимание, один из них основан на площадях, другой — на высотах и третий — на углах.

Из-за таких парадоксов на протяжении многих лет основания теории вероятностей пользовались дурной репутацией. Это продолжалось до тех пор, пока не была создана ветвь математики под названием «теория меры», именно она и стала инструментом, позволившим заложить основы теории вероятностей. Это сделал замечательный советский математик А. Н. Колмогоров. Об этих основах рассказывается в продвинутых курсах теории меры и теории вероятностей.

5.11.2 Парадокс Банаха—Тарского

Альфред Тарский (1902–1983) — один из пионеров логики XX в. Стефан Банах (1892–1945) — один из величайших специалистов в математическом анализе. В 1924 г. они вместе опубликовали статью о замечательном парадоксе, который мы сейчас опишем. Парадокс возник как побочный продукт интенсивного изучения аксиоматики теории множеств, которым отмечена первая половина XX в.

Парадокс Банаха–Тарского: *Можно взять шар радиуса* 1*, разрезать его на* 7 *частей, а затем собрать из этих частей два шара радиуса* 1 (см. рис. 5.32).

Как такое может быть? По-видимому, утверждение противоречит фундаментальным принципам физики и подрывает наши представления о том, что такое объем или расстояние. В конце концов, мы берем шар объема $\frac{4\pi}{3}$ и делаем из него два общим объемом $\frac{8\pi}{3}$.

На самом деле парадокс Банаха–Тарского допускает еще более драматичную формулировку. Вполне можно взять шар радиуса 1, разрезать его на конечное количество частей и собрать из них полноразмерную копию Эмпайр Стейт Билдинг (рис. 5.33).

Как можно объяснить такое противоречие? И опять все дело в теории меры, основы которой заложил Анри Лебег (1875–1941) в 1901 г. Цель теории меры — назначить «меру», т. е. размер или объем каждому множеству. Оказывается, — это следует из аксиомы выбора, о ней мы расскажем ниже, — что эта цель недостижима. Любая попытка назначить меру каждому множеству обречена на неудачу. Иначе говоря, задаются множества (они должны удовлетворять конкретному критерию), называемые *измеримыми*[1].

[1]Измеримые множества обладают одним свойством, соответствующим нашему интуитивному пониманию меры: мера (объем) объединения двух непересекающихся множеств

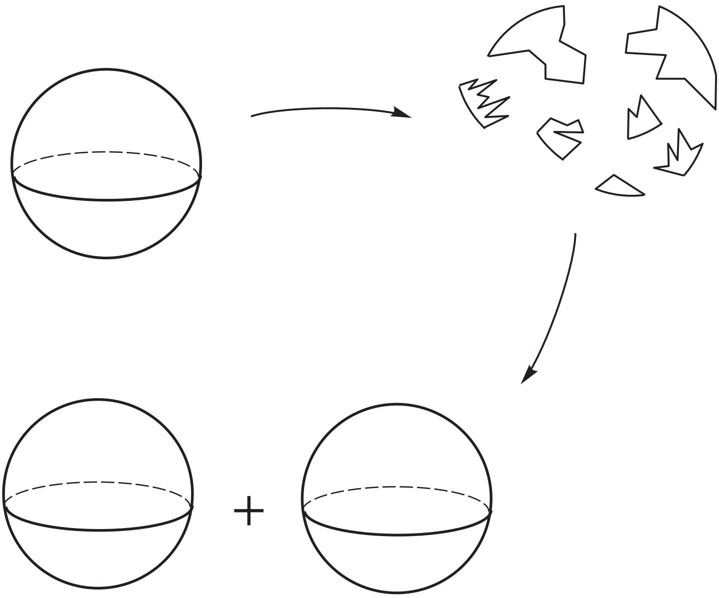


Рис. 5.32. Парадокс Банаха—Тарского

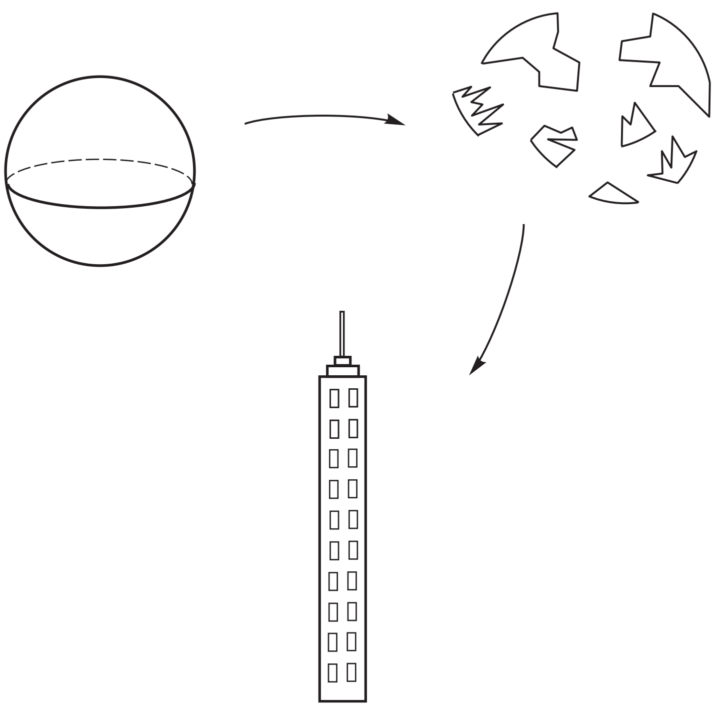


Рис. 5.33. Парадокс Банаха—Тарского. Продолжение

Только этим множествам мы можем приписать меру и быть уверенными (в силу математической теории), что при этом не возникнет никаких противоречий. Остальные множества называются *неизмеримыми*. Все попытки приписать меру неизмеримым множествам гарантированно приводят к неприятностям.

Долго ли, коротко ли, семь множеств из парадокса Банаха—Тарского *неизмеримы*. Они не обладают лестными для нашей интуиции свойствами, которых мы ожидаем от меры на множествах. В частности, одно из требований к мере заключается в том, что если A и B — два непересекающихся множества, то мера объединения A и B должна быть равна сумме мер A и B. Для измеримых множеств так оно и есть, это можно доказать. А для неизмеримых — увы! — все не так, как хотелось бы.

В наши дни теория меры тщательно проработана; ее принято использовать в действительном анализе, теории Фурье, теории вейвлетов, сжатии изображений, обработке сигналов и многих других областях математики. Математики приветствуют такое использование, пока внимание ограничивается измеримыми множествами. Все мы знаем о парадоксе Банаха—Тарского и бежим от него как от чумы. Очень интересно о нем рассказывается в работе [WAG]; [JEC] также представляет интерес.

5.11.3 Задача Монти Холла

Строго говоря, это вовсе не парадокс (хотя некоторые специалисты считают его парадоксом чистой воды). Здесь нет речи о высокоуровневом нарушении оснований нашей науки вроде тех, о которых шла речь в предыдущих двух примерах. Но здесь мы сталкиваемся еще с одной ситуацией, когда математические рассуждения противоречат нашей интуиции и приводят к неожиданным результатам. Ну и надо еще добавить, что эта история получила большой отклик в американской математике.

Задача Монти Холла стала широко известна в последние несколько лет. К этому привело телевизионное шоу «Сделай ставку» — игра, которую ведет Монти Холл. Ее правила в упрощенном варианте таковы. Перед игроком три двери. Он знает, что за одной из них — очень ценный приз, например модный автомобиль. За каждой из двух других — что-то скверное и вовсе нежелательное, вроде козла, см. рис. 5.34. Игрок не знает, что прячется за каждой дверью (а вот ведущий Монти Холл знает!) и наугад выбирает ту, за которой находится предназначенный ему приз. Но ведущий

равна сумме мер (объемов) составных частей. Если мы ограничимся рассмотрением только измеримых множеств, то парадоксу Банаха—Тарского нет места.

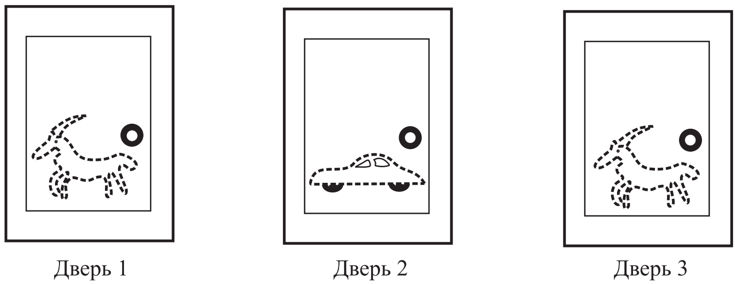


Рис. 5.34. Задача Монти Холла

дразнит игрока, подначивает его сменить свой выбор и всячески старается сбить его с толку.

Задача, получившая известность под названием «Задача Монти Холла», звучит так: Игрок выбирает дверь. Для простоты мы будем считать, что он выбирает дверь номер 3. Прежде чем отворить эту дверь и продемонстрировать, что за ней скрыто, Монти Холл объявляет: «А сейчас я покажу, что прячется за одной из двух оставшихся дверей». Одну дверь открывают — за ней козел[1]. Затем Монти Холл спрашивает: «Не хотите ли изменить *свой* выбор?» Тут-то и начинается самое интересное: стоит игроку изменить выбор или следует придерживаться первоначального?

Понятно, что игрок не станет выбирать уже отворенную дверь, — за ней рожки да ножки, это никому не интересно. Так что вопрос в том, стоит ли игроку менять свой выбор и указать на оставшуюся дверь (ее не выбрал ни игрок и ни Монти Холл). Простодушный человек может предположить, что козел с равной вероятностью может оказаться и за оставшейся дверью, и за той, на которую первоначально указал игрок. В конце концов, затворены только две двери, за одной прячется козел, за другой — автомобиль; какой смысл в такой ситуации менять свой выбор? Однако простодушный человек не учитывает тот факт, что козлов в задаче два и они отличаются друг от друга. Для решения задачи мы проведем более тщательный анализ, что приведет к поразительному ответу.

Мы решим задачу Монти Холла, рассмотрев все мыслимые случаи. Обозначим козлов буквами K_1 и K_2, а автомобиль — буквой A. Для простоты мы будем считать, что первоначально игрок всегда выбирает третью дверь. Однако мы не можем предположить, что Монти Холл всегда отворяет первую дверь, ведь за ней необязательно спрятан козел. Нам следует

[1]Подчеркнем: Монти Холл *всегда отворяет* только такую дверь, за которой стоит козел.

рассмотреть такие случаи:

Дверь 1	Дверь 2	Дверь 2
K_1	K_2	A
K_2	K_1	A
K_1	A	K_2
K_2	A	K_1
A	K_1	K_2
A	K_2	K_1

В общем случае существует $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ различных способов расположить n объектов. Значит, возможно $6 = 3!$ перестановок трех объектов. Именно поэтому в таблице шесть строк. В ней перечислены все способы, которыми можно расположить за тремя дверями автомобиль и двух козлов.

1. В первом случае Монти Холл отворит первую или вторую дверь. Игроку нет смысла менять свой выбор, ведь сейчас за выбранной дверью находится автомобиль, так что в этом случае ответ на вопрос задачи — «Нет».
2. Второй случай похож на первый, здесь тоже нет смысла менять выбор; мы опять отвечаем «Нет».
3. В третьем случае Монти Холл отворит первую дверь, за которой прячется козел, так что игроку выгодно изменить свой выбор. В этом случае ответ «Да».
4. Четвертый случай похож на третий, ответ «Да».
5. В пятом случае Монти Холл отворит вторую дверь. Игроку выгоднее изменить выбор, ответ — «Да».
6. Шестой случай похож на пятый, и мы в последний раз даем ответ «Да».

Заметим, что в результате подробного анализа всех случаев мы четырежды получили «Да» и дважды — «Нет». Это означает, что со счетом два к одному выигрывает предложение сменить выбор двери после того, как Монти Холл отворит дверь и явит миру козла. Иначе говоря, с вероятностью $\frac{2}{3}$ игрок улучшит свои шансы на выигрыш, сменив выбор двери.

История обсуждения в обществе задачи Монти Холла забавна и тревожна одновременно. Читателю может быть известно имя Мэрилин вос Савант (р. 1946) — она стала популярной благодаря своей колонке в газете; «вос Савант» — ненастоящее ее имя, настоящее — Мэрилин Мач. Фамилию «вос Савант» ей подарила любимая тетушка. Мэрилин вос Савант знаменита тем, что у нее самый высокий IQ в истории (хотя поговаривают, в Китае есть чудо-ребенок с коэффициентом IQ еще выше). Газетная колонка под названием «Спроси Мэрилин» процветала именно благодаря такой интеллектуальной мощи. Мэрилин очень умна и умеет доходчиво отвечать на самые сложные вопросы (и не стесняется обращаться к экспертам, столкнувшись с задачей, которая ей не по плечу). Она редко ошибается, хотя существует сайт «Мэрилин ошибается!» (`http://www.wiskit.com/marilyn.html`), где разбираются некоторые из ее *оплошностей*.

Мэрилин вос Савант получила образование в Сент-Луисе (тянет меня сюда). Она училась в Мерамекском колледже, но не закончила его. Кроме того, она слушала лекции в университете Вашингтона (как и я), но не закончила и его. Она вышла замуж за Роберта К. Ярвика (того самого, который изобрел искусственное сердце) и переехала в Нью-Йорк.

Мэрилин вос Савант особенно прославилась после того, как один из ее читателей (говорят, что это Стив Селвин) написал ей письмо с вопросом о задаче Монти Холла. Мэрилин проверила факты и привела в своей колонке верное решение, которое мы обсудили выше. О горе! Более 10 000 читателей, среди них около 1000 профессиональных математиков (многие писали от имени университета), написали Мэрилин о том, что в своих рассуждениях она неправа. И некоторые несильно стеснялись в выражениях. Это было стихийное бедствие для американской математики.

Я должен сказать, что все эти обстоятельства сказались на Мэрилин вос Савант. После того как Эндрю Уайлс опубликовал свое доказательство Великой теоремы Ферма, Мэрилин вос Савант опубликовала небольшую книгу [SAV], в которой объясняла, что в доказательстве есть изъяны. Ее дерзкая эскапада основывалась на двух положениях:

1) она доказала, что комплексные числа не существуют (а значит, использование этих чисел Уайлсом незаконно);

2) она заметила, что Уайлс использует гиперболическую геометрию, которая допускает квадратуру круга; но ведь всем известно, что *квадратура круга невозможна* — вот и противоречие!

Я писал Мэрилин вос Савант и ее издателю, указывая на оплошности в книге [SAV]. И она ответила! «Мы с моими друзьями-математиками от души посмеялись над вашим письмом. Продолжайте далее в том же духе». Такие вот методы ведения научной дискуссии.

Мартин Гарднер особенно огорчался из-за благодарностей за проверку математических выкладок в книге [SAV]. Он утверждал, что он ничего не проверял. Барри Мазура из Гарварда тоже просили проверить математику, но ему удалось избежать этой участи.

5.11.4 Аксиома выбора

Мы уже упоминали аксиому выбора, обсуждая парадокс Банаха—Тарского. Аксиома выбора Цермело (формально принятая в 1904 г., но изученная ранее) стала одним из жупелов математики XX в. В нашем обсуждении аксиомы выбора мы используем понятие «подмножества». Множество Y называется *подмножеством множества* X, если каждый элемент множества Y является элементом множества X. Например, пусть X — множество положительных целых чисел, а Y — множество $\{2, 4, 6, 8\}$. Тогда Y — подмножество множества X; мы обозначаем этот факт $Y \subset X$.

Если не вдаваться в подробности, аксиома выбора гласит, что если X — множество, то существует функция, которая каждому подмножеству S множества X ставит в соответствие некоторый элемент из S. Иначе говоря, если у вас имеется набор множеств (и все они являются подмножествами какого-то одного множества), то вы можете выбрать по одному элементу из каждого.

Эта формулировка представляется вполне безобидной, но неожиданно у аксиомы выбора оказались глубокие следствия. Как мы заметили в разд. 5.11.2, из аксиомы выбора вытекает парадокс Банаха—Тарского. Кроме того, аксиома выбора эквивалентна утверждению о том, что любое множество может быть вполне упорядочено. Это значит, что заданное множество X мы можем снабдить отношением порядка так, что каждое подмножество этого множества обладает наименьшим элементом. Если X — множество действительных чисел, то это утверждение вовсе не очевидно.

Аксиома выбора широко используется в алгебре, логике и теории категорий для построения различных объектов. Существование максимальных идеалов, алгебраических замыканий и многих других элементов опирается на аксиому выбора. Аксиома работает и в анализе; например, в доказательстве теоремы Хана—Банаха.

Бертран Расселл когда-то пошутил: если мне придется выбирать по одному ботинку из каждой из бесконечного множества пар ботинок, я с легкостью смогу сделать это. Но если мне нужно выбрать по одному носку из каждой пары, которых тоже бесконечно много, мне придется прибегать к аксиоме выбора. Что имел в виду Бертран Расселл? С ботинками все просто: достаточно только сказать «Я выбираю левый». Но с носками этот номер не пройдет. Потребуется механизм для выбирания носка из каждой пары. Аксиома выбора и есть такой механизм.

Глава 6

ИСПЫТАНИЕ ЧЕТЫРЬМЯ КРАСКАМИ

> …Язык математики поразительно подходит для формулирования законов физики и это чудо — удивительный подарок, которого мы не понимаем и не заслуживаем. Мы должны быть благодарны за него и надеяться, что он будет действовать и в будущем, что он будет распространяться …на самые разные отрасли знаний.
>
> — Юджин Вигнер

> Единственное доказательство видимости предмета заключается в том, что люди на самом деле видят его…Подобным же образом, я полагаю, единственный довод в пользу желательности чего-либо в том, что люди на самом деле желают этого.
>
> — Джон Стюарт Милль

> Философы часто отличают математику от физических наук. В то время как естественные науки вынуждены подчиняться реальному миру в ходе экспериментов, математике позволялось более или менее полно царствовать в мире абстракции. Эта ситуация устраивала математиков в течение последних нескольких тысячелетий, но с появлением компьютеров стала меняться.
>
> — Дж. Борвейн, П. Борвейн, Р. Гиргенсон, С. Парнс

6.1 РОБКОЕ НАЧАЛО

В 1852 г. Фрэнсис Гутри, выпускник Лондонского университета, поставил вопрос своему брату Фредерику.

> Представим себе географическую карту Земли (сферы), на которой есть только страны, — никаких океанов, озер, рек или других водоемов. Единственное правило — каждая страна должна представлять собой единый непрерывный массив без дыр (см. рис. 6.1). Мы с тобой картографы и нам нужно раскрасить карту так, чтобы никакие две соседние страны не были одного *цвета* (например на рис. 6.2 буквы К, З, С, Ж означают, что соответствующая страна раскрашена красным, зеленым, синим или желтым цветом). Как много красок нужно полиграфисту, чтобы он мог раскрасить любую карту?

Фредерик Гутри был студентом Огастеса де Моргана (1806–1871) и рассказал о задаче своему учителю. Задача отправилась гулять в кругах профессиональных математиков (на самом деле де Морган рассказал о задаче У. Гамильтону (1805–1865)). В печати впервые о ней упомянул Артур Кэли (1821–1895) в 1878 г.

Вопрос стал известен под названием *задачи о четырех красках*, поскольку в результате экспериментов появилась гипотеза о том, что

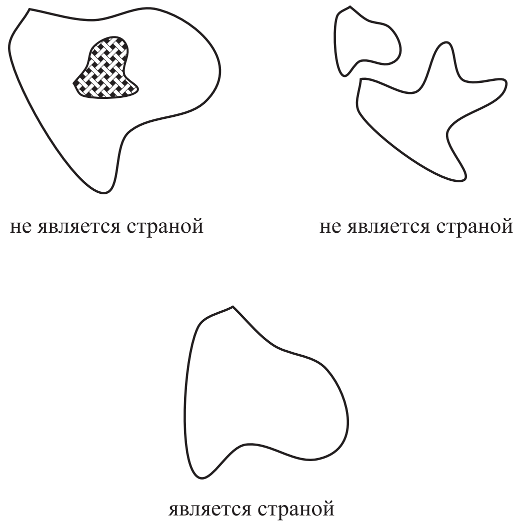


Рис. 6.1. Страна из задачи о четырех красках

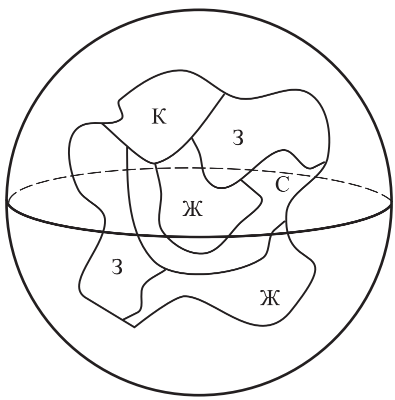


Рис. 6.2. Никакие две соседние страны не раскрашены в один цвет

четырех красок достаточно. Никто не смог предъявить карты, для раскраски которой потребовалось бы пять красок.

Математик Феликс Клейн (1849–1925) из Геттингена слышал о задаче и заявил, что единственная причина, по которой задача до сих пор не решена, заключается в том, что над ней не работал ни один талантливый математик. *Он*, Феликс Клейн, мог бы предложить курс, результатом которого стало бы решение этой задачи. У него ничего не вышло.

В 1879 г. А. Кемпе (1845–1922) опубликовал решение задачи о четырех красках. Он показал, что любую карту можно раскрасить в четыре цвета.

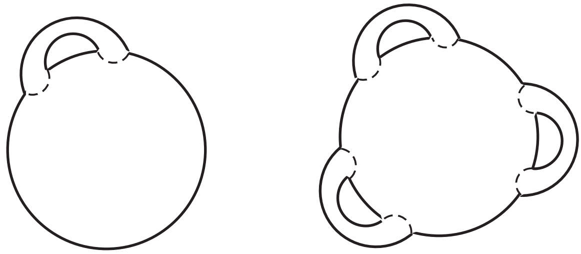


Рис. 6.3. Поверхность на сфере с ручками

Доказательство Кемпе прожило 11 лет. А потом П. Хивуд (1861–1955) нашел в нем ошибку. Хивуд продолжил работу над задачей и пришел к некоторым замечательным выводам.

- Доказательство Кемпе, в особенности метод «цепи Кемпе», убедительно показывает, что для раскраски любой карты достаточно пяти цветов.
- Если число ребер каждой области на карте делится на три, то карту можно раскрасить в четыре цвета.
- Хивуд вывел формулу, которая дает оценку для «хроматического числа» практически любой поверхности. Хроматическим числом $\chi(g)$ поверхности называется наименьшее число красок, необходимых для раскраски *любой* карты на этой поверхности. Вот что это за формула:

$$\chi(g) \leqslant \left\lfloor \frac{1}{2}(7 + \sqrt{48g + 1}) \right\rfloor$$

  при $g \geqslant 1$.

Понимать ее следует так. Благодаря работам Камилла Жордана (1838–1922) и Августа Мёбиуса (1790–1868) известно, что любая поверхность в пространстве эквивалентна или, точнее, гомеоморфна сфере с несколькими ручками (см. рис. 6.3). Число ручек называется *родом поверхности*, мы обозначаем его g. Греческой буквой χ обозначено хроматическое число поверхности — наименьшее число цветов, необходимых для раскраски любой карты на этой поверхности. Таким образом, $\chi(g)$ — это число цветов, которые необходимы для раскраски любой карты на поверхности, представляющей собой сферу с g ручками. Символ $\lfloor\ \rfloor$ означает функцию «*наибольшее целое*». Например, $\left\lfloor \frac{9}{2} \right\rfloor = 4$ именно потому, что наибольшее целое в числе «четыре с половиной» — это как раз 4. Точно так же, $\lfloor \pi \rfloor = 3$, так как $\pi = 3{,}14159\ldots$, а наибольшее целое, не превышающее π, — это 3.

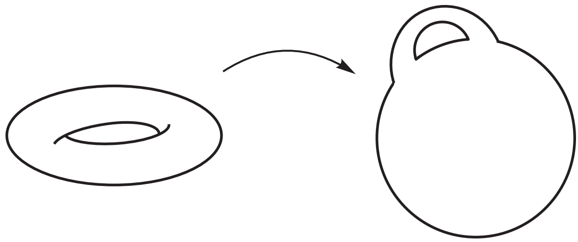


Рис. 6.4. Тор — это сфера с одной ручкой

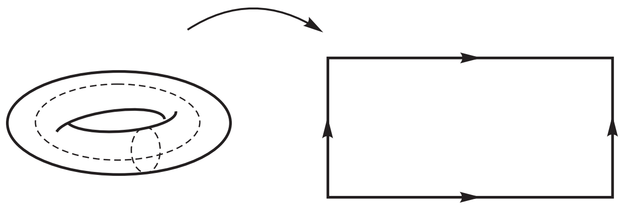


Рис. 6.5. Разрезание тора

Сфера — это сфера без ручек, для нее $g = 0$. Мы можем вычислить, что для сферы

$$\chi(g) \leqslant \left\lfloor \frac{1}{2}(7 + \sqrt{48 \cdot 0 + 1}) \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1}{2} \cdot 8 \right\rfloor = 4.$$

Это же и есть теорема о четырех красках! К несчастью, доказательство Хивуда годилось только для поверхностей, род которых не меньше 1. О сфере оно не дает никакой информации.

Тор (см. рис. 6.4) топологически эквивалентен сфере с одной ручкой, поэтому его род равен $g = 1$. Для хроматического числа тора получаем оценку 7. И действительно, можно построить пример карты на сфере, для раскраски которой требуется 7 цветов (см. рис. 6.6).

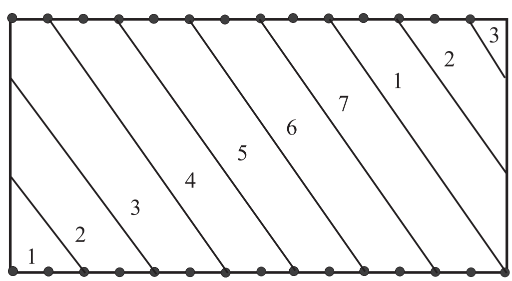


Рис. 6.6. Карта на торе, для раскраски которой требуется семь цветов

Вот что изображено на рис. 6.5. Удобно взять ножницы и разрезать тор на части. Одним разрезом тор можно превратить в цилиндр, вторым — в прямоугольник. Стрелки на его сторонах показывают, что левую и правую стороны следует отождествить (сохраняя ориентацию), а верхнюю и нижнюю — тоже (и опять с сохранением ориентации). Раскрасим тор, раскрасив соответствующий прямоугольник (как на рис. 6.5). Назовем эти цвета «1», «2», «3», «4», «5», «6» и «7». Читатель может проверить сам, что на рис. 6.6 изображены семь стран, и все они соседствует друг с другом (помните, что верхняя и нижняя стороны прямоугольника отождествляются или склеиваются друг с другом, и левая и правая — тоже). Так что все они должны быть раскрашены в разные цвета! На торе существует карта, для раскраски которой требуется 7 цветов; это показывает, что для этой поверхности оценка Хивуда вполне точна.

Хивуду не удалось выяснить, чему равно хроматическое число сферы — 4 или 5. А еще он не смог определить, насколько точны его оценки хроматических чисел для других поверхностей рода выше 1. Формула Хивуда показывает, что для тора (замкнутой поверхности первого рода) хроматическое число не превышает 7. Это действительно наилучшая оценка? Существует ли на торе карта, для раскраски которой действительно требуется 7 цветов? А для тора с двумя ручками (род этой поверхности равен двум) оценка Хивуда дает граничное значение 8. Можно ли получить оценку лучше? Найдется ли на таком двойном торе карта, для раскраски которой потребуется действительно 8 цветов? Этот ряд можно продолжить: поставить такие вопросы для каждой поверхности каждого рода. Хивуд не знал ответа на эти вопросы.

В 1880 г. математик П. Тайт предложил другое решение задачи о четырех красках. Изъян в нем обнаружил Дж. Петерсен, это случилось в 1891 г. И опять для выявления ошибки потребовалось 11 лет!

История задачи о четырех красках пространна и любопытна. Великий американский математик Дж. Биркгофф разбирался в основах этой задачи, и это позволило Филиппу Франклину (1898–1965) в 1922 г. доказать, что гипотеза о четырех красках верна для карт, изображающих не более 25 стран. Немецкий математик Г. Хисч смог значительно продвинуться в решении, введя методы приведения и удаления краски, которыми и воспользовались Аппель и Хакен в 1977 г. Уолтер Стромквист в 1975 г. защитил докторскую диссертацию [STR1] в Гарварде. Он доказал, что четырех красок достаточно для любой карты, на которой не более 100 стран (см. [STR2]). Особенно впечатляет, что в 1970 г. Рингель и Янгс смогли доказать, что оценки Хивуда для хроматического числа произвольной поверхности точны. Так что хроматическое число тора действительно равно 7. Хроматическое число «супертора» с двумя дырками равно 8. И так далее. Но доказательство Рингеля-Янгса неприменимо к сфере. Они не смогли улучшить результат Хивуда: для раскраски сферы всегда достаточно пяти цветов.

И вот в 1974 г. случился прорыв. Заняв 1200 часов работы суперкомпьютера университета в Иллинойсе, Кеннет Аппель и Вольфганг Хакен показали, что для раскраски любой карты на сфере достаточно четырех цветов. Их метод заключался в том, чтобы выделить 633 основных конфигураций карт (все остальные к ним сводятся) и доказать, что каждая из этих конфигураций сводима в смысле, предложенном Хисчем. Однако число основных конфигураций оказалось очень велико, а число требующихся операций приведения превышает все мыслимые человеческие способности к счету. Логика построений была крайне запутана и сложна. На сцену вышел компьютер.

В те времена машинное время было дорого и не вполне доступно, так что Аппель и Хакен не могли получить для себя цельный кусок в 1200 часов непрерывной работы компьютера. Вычисления проводились по ночам, вне расписания, если выдавались свободные окошки. Более того, Аппель и Хакен не были уверены, что вычисления когда-либо будут закончены. Они решили так:

- если компьютер закончит работу, то он проверит все случаи и задача о четырех красках будет решена;
- если компьютер не закончит работу, то никакого вывода будет сделать нельзя.

Что ж, работа компьютера завершилась. А споры, сплетни и раздрай в математическом сообществе — нет[1]. Разве это доказательство? Компьютер проделал десятки миллионов операций, и никому не под силу проверить их все. К 1974 г. наше понимание того, что такое доказательство, было сформировано двумя тысячами лет развития: доказательство — это цепочка шагов, которые один человек записывает на бумаге, а другой может их все проверить. Некоторые доказательства были длинными и сложными (например, в середине 1960-х гг. доказательство знаменитой теоремы об индексе Атьи—Зингера состояло из четырех больших статей в журнале «Анналы математики» и опиралось на огромное количество математических фактов из других источников). Однако их все и всегда мог проверить один человек или несколько. «Доказательство» Аппеля и Хакена

[1] Аппель и Хакен прочитали почетную лекцию о своей работе в Американском математическом обществе для очень большой аудитории. В конце прозвучали жиденькие аплодисменты. Слушатели не знали, что думать об этой работе и как ее оценивать.

Конечная математика

В современной математике бурно развивается область, которую мы называем *конечной математикой*. Эта наука о том, как подсчитывать, как связаны между собой конечные количества объектов. Спрос на специалистов в этой области растет из-за приложений в теории коммуникации, теоретической вычислительной математике, теории очередей, генетике и многих других сферах. Среди пионеров этой науки можно назвать Пола Эрдёша и Рона Грэхема.

было совсем другой природы. Оно требовало доверия к компьютеру и алгоритму, который компьютером выполнялся. У всех в ушах звучала старая песня IBM «мусор на входе — мусор на выходе».

Даже если принять идею компьютерного доказательства, все равно оставались поводы для беспокойства. Раз человек не может наверняка проверить вычисления компьютера, как можно быть уверенным, что компьютер не допустил ошибок? Как можно быть уверенным, что нет ошибок в коде, или в конструкции центрального процессора, или что в вычисления не вкрались квантово-механические ошибки? Ведь известно, что компьютерные ошибки приводили к чудовищным последствиям. Например, к взрыву ракеты Ариан-5 через 40 секунд после старта с Куру, французская Гвиана, в 1996 г. Сейчас известно, что взрыв произошел из-за ошибки в программном обеспечении. А именно выражающее горизонтальную составляющую скорости ракеты относительно платформы 64-битовое число с плавающей точкой конвертировалось в 16-битовое целое со знаком. Ракета и груз стоили $500 млн, а общие затраты на проект приближались к $7 млрд. К счастью, ракета была беспилотной. Хорошо известно, что в октябре 1994 г. баг в чипе компьютера Pentium FDIV из-за ошибки в округлении стал большой проблемой для многих владельцев компьютеров (включая автора этой книги). Баг был обнаружен Томасом Найсли из Линчбурга, он как раз разрабатывал программу перечисления простых чисел, троек и четверок простых чисел. Найсли выяснил — после объемистой переписки с Интел — что компании было известно о проблеме еще с мая 1994 г. После значительного давления со стороны общественности компания Интел отозвала чип и бесплатно заменила дефектные чипы на новые. Ошибка компании оценивается приблизительно в $500 млн.

В качестве типичного отклика математика на работу Аппеля—Хакена приведем высказывание Фрэнка Бонсалла:

> …компьютерная проверка частных случаев … не относится к математике вовсе … по-видимому, нам не удастся добиться того, что я считаю существенным

> элементом доказательства — личного понимания, — если часть рассуждения спрятана в черном ящике... Давайте прекратим разбазаривание ...фондов на псевдоматематику с компьютерами, а вместо этого используем их для поддержки небольшого числа настоящих математиков из плоти и крови.

Даниэль Коэн зашел еще дальше и назвал доказательство Аппеля—Хакена «компьютерными махинациями». Он заявил, что их «доказательство» не «объясняет».

С этого момента пружина сюжета закручивается еще сильнее, так как в 1975 г. в доказательстве Аппеля—Хакена обнаружилась ошибка. Выявились проблемы с алгоритмом, которые Аппель и Хакен скормили компьютеру. Позднее были внесены исправления и в 1976 г. была опубликована статья [APH2], в которой декларировалось, что задача о четырех красках решена.

Оскар Лэнфорд указал, что для подтверждения компьютерных вычислений как части доказательства недостаточно доказать, что программа верна. Нужно еще понимать, как компьютер округляет числа, как работают операционная система и система распределения времени. Полезно еще знать, как хранятся данные в ЦПУ (чип). Не похоже, что все, кто интенсивно использует компьютеры в своих доказательствах, идут дальше первого пункта в этом списке.

В статье [APH3], опубликованной в 1986 г. в журнале «Mathematical Intelligencer», Аппель и Хакен указывают, что читатель их основной статьи [APH1] 1976 г. должен освоить

> 50 страниц текста с диаграммами, 85 страниц с дополнительными 2500 диаграммами да еще 400 страниц, в которых тоже есть диаграммы и тысячи отдельных проверок утверждений 24 лемм, сформулированных в основном тексте.

Авторы признают, что их доказательство требует более 1200 часов машинного времени, что в их работе имелись типографские ошибки и опечатки. Все же они выражают уверенность, что читатель поймет, «почему опечатки, тут и там встречающиеся в доказательстве, не влияют на его устойчивость». Некоторые ошибки, найденные уже после публикации, пишут авторы, были «устранены в течение двух недель». К 1981 г. У. Шмидт проверил «около 40%» ключевых 400 страниц и исправил 15 ошибок. В книге [APH4] описана история решения задачи, привлеченные методы и описание всех попыток Аппеля—Хакена. Там же доказано, что любую карту можно раскрасить за полиномиальное время (это понятие обсуждается в разд. 11.7).

Еще много лет после описанных событий на факультете математики университета штата Иллинойс на всех исходящих письмах красовалась одна марка. На ней было написано:

ЧЕТЫРЕХ КРАСОК ДОСТАТОЧНО

Своеобразное выражение триумфа Аппеля, Хакена и их суперкомпьютера.

Но даже в раю бывают неприятности. Один математический авторитет, пожелавший остаться неназванным, утверждает, что в доказательстве Аппеля—Хакена все еще обнаруживаются ошибки. По-видимому, любую найденную ошибку можно исправить. По крайней мере до сих пор так оно и *было*. Однако поток ошибок не иссякает. Так заслуживает ли работа Аппеля—Хакена названия «доказательство»? Можно ли считать доказательством органическую массу, которая никогда вполне не совершенна и требует постоянной починки? Еще Евклид 2300 лет тому назад считал, что нет!

Вряд ли что-то может сильнее утвердить нас в результате, чем другое независимое доказательство. Пол Сеймур и его группа в Принстонском университете нашли другую дорогу для атаки на задачу (см. [RSST] и [SEY]). И не так давно (2004 г.) Гонтье использовал компьютерного «математического помощника» для проверки доказательства, построенного в 1996 г.[1)] Новое доказательство Сеймуа и др. тоже вовсю опирается на мощь компьютера, но в наши дни компьютеры гораздо быстрее и мощнее, чем во времена Аппеля и Хакена; да и сам алгоритм Сеймура кажется значительно более устойчивым, чем старый алгоритм начала 1970-х. В недавней статье [CAH] предлагается подход к задаче о четырех красках, который не опирается на компьютерные мощности.

Но все еще никто не может проверить доказательство Сеймура в традиционном смысле: «проверить человеком». Компьютеры по-прежнему выполняют миллионы операций, и не в человеческих силах сделать столько же вручную, да, по правде говоря, никому и не хочется. В сухом остатке мы имеем вот что: на протяжении последних двадцати лет, с момента появления оригинального доказательства Аппеля—Хакена и до решения Сеймура, мы как ученое сообщество стали более терпимо относиться к компьютерным доказательствам. Конечно же, все еще остаются сомнения и беспокойство, но все же эта новая методика входит в обиход. Компьютерных доказательств вокруг уже много (некоторые мы

[1)] Похоже, этот процесс превращается в отдельную индустрию. Бергстра уже проверил с помощью компьютера Великую теорему Ферма; существует и компьютерная проверка теоремы о простых числах (об их распределении).

еще обсудим в этой книге), так что большая часть математического сообщества принимает их или по крайней мере относится к ним толерантно[1].

На самом-то деле математикам по-прежнему больше всего привычно и удобно традиционное, самодостаточное доказательство, которое состоит из точной последовательности шагов, записанной на бумаге. Мы все еще надеемся, что однажды такое доказательство появится и для задачи о четырех красках. Именно традиционное, в духе Евклида, доказательство дает нам понимание, озарение и чувство завершенности, к которому стремится каждый настоящий ученый. А пока мы живем с компьютерным доказательством теоремы о четырех красках.

Спустя тридцать лет к доказательству Аппеля—Хакена этой теоремы легко относиться по-философски. Как и в отношении доказательства Хэйлса гипотезы Кеплера (его мы тоже обсуждаем в этой книге), беспокоит лишь то, что в этих доказательствах недостает чувства *завершенности*, которое мы обычно ассоциируем с математическим доказательством. Обычно мы посвящаем несколько часов (или несколько дней или даже недель) поглощению и усваиванию математического доказательства. В таком процессе наша цель — *узнать что-то* новое[2]. Конечный результат — новое понимание и ясное ощущение того, что нечто выполнено и стало своим. А от этих новомодных компьютерных доказательство ничего такого не дождешься. Точно так же доказательство Григорием Перельманом гипотезы Пуанкаре и классификация конечных простых групп тоже не дают чувства завершенности. А ведь в этих двух случаях компьютеры не играют роли. На сцену выступают сложности с социологией профессии и предмета. Эти доказательства мы тоже обсудим на страницах этой книги.

К настоящему расколу, говорит Роберт Штрихартц [STR], приводят стремление к знанию и стремление к уверенности. Традиционно математики гордятся несокрушимым абсолютом своих результатов. В этом ценность нашего подхода к доказательству, установленного еще Евклидом. Но сейчас есть столько новых достижений, подрывающих старую систему ценностей. И к тому же столько новых потребностей общества: теоретическая вычислительная и инженерная математика и даже современная

---

[1] Следует, однако, отметить, что Джонатан Борвейн и его команда выработали точку зрения на наш предмет под названием *экспериментальная математика*. Основа их программы — каждый может проводить исследования и эксперименты с помощью компьютера, однако, в конце концов, должен записать традиционное доказательство. По словам самого Борвейна, эта парадигма встретила значительное сопротивление со стороны математического сообщества

[2] Надо признаться, есть и эгоистическая мотивация: узнать новые методы, которые помогут читателю решить свои собственные проблемы.

прикладная математика требуют определенной информации и идентифицируемых методов. Нужда в рабочем инструменте часто бывает намного сильнее нужды быть уверенным, что инструмент выдержит проверку строгими правилами логики. В результате может оказаться, что нам придется пересмотреть основания нашей науки. Практика математики в 2100 г. может весьма отличаться от современной.

Дорон Зельбергер — остроумный и уважаемый математик — поставил следующий вопрос. Допустим, некто заявляет: «Вот доказательство гипотезы Гольдбаха (мы обсуждаем ее в этой книге); оно истинно с 99-процентной степенью уверенности. Если мне выделят грант на $10 млрд, я построю доказательство, верное на все 100 процентов». И что в таком случае делать?

Никто — даже Билл Гейтс — не заплатит $10 млрд за окончательное решение гипотезы Гольдбаха. Она просто того не стоит. Что же, нам придется научиться жить с 99-процентным доказательством? Или мы будем считать задачу нерешенной? На такие вопросы до сих пор нет ясного ответа.

Глава 7

ДОКАЗАТЕЛЬСТВА, ПОСТРОЕННЫЕ КОМПЬЮТЕРОМ

Автоматическое доказательство теорем все еще остается примитивным искусством, годным только на самые рудиментарные аргументы.

— Артур Джаффе

По мере того как становились обыденными доказательства тождеств все более широких классов и даже теорем других видов, мы стали наблюдать много результатов, для которых знаем, как построить доказательство (или опровержение); но не можем или не хотим платить за такое построение, так как «почти уверенность» можем приобрести гораздо дешевле. Я даже могу вообразить аннотацию статьи в 2100 г.: «В определенном точном смысле мы показываем, что гипотеза Гольдбаха верна с вероятностью более 0,99999 и что ее полное доказательство требует бюджета в $ 10 млрд».

Абсолютная истина становится все дороже, и рано или поздно мы свыкнемся с тем фактом, что не так много нетривиальных результатов можно установить по-дедовски достоверно. Скорее всего, мы откажемся от задачи отслеживания цен в целом и завершим переход к нестрогой математике.

— Дорон Зельбергер

7.1 КРАТКАЯ ИСТОРИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЕЙ

Первыми вычислительными *орудиями* были счетные доски. Самые примитивные из них, известные с 1200 до н. э., представляли собой доску или каменную скрижаль, покрытую слоем песка, на котором можно было делать пометки. Позднее на счетных досках появились бороздки или металлические диски, которые можно было использовать, чтобы отмечать позицию. Самая старая дошедшая до нас счетная доска — это таблица, найденная на острове Саламис около 300 до н. э. (см. рис. 7.1).

Первой счетной машиной был *абак*. Принято приписывать его изобретение китайцам. Впервые (насколько это известно) о нем упоминается в книге восточной династии Хан, написанной Ху Ю в 190 г. Это рамка, обычно деревянная, с прутиками, вдоль которых могут скользить бусины (см. рис. 7.2). В современных абаках каждая бусина в нижней части абака означает единицу, а бусина в верхней — пять.

В Древней Греции и Древнем Риме были распространены счетные доски. Абак развивался медленно, более 1000 лет. Современный абак

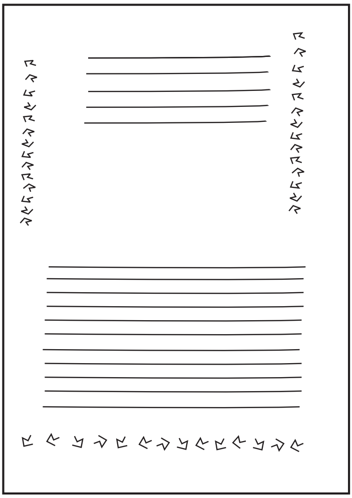


Рис. 7.1. Таблица с острова Саламис

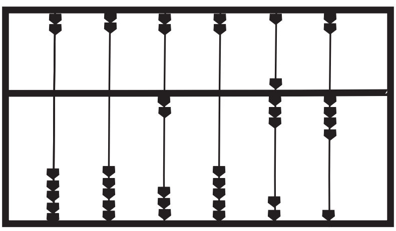


Рис. 7.2. Абак

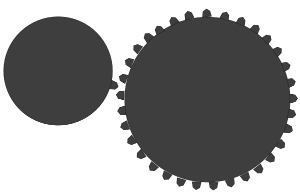


Рис. 7.3. Передача Паскаля

получил популярность в Китае во время династии Сонг в 960–1127 гг. Позднее использование абака распространилось в Японии и Корее. Его можно встретить и в наше время. В Тайване и Китае не редкость увидеть кассира, проверяющего точность электронной кассы на абаке!

Первый механический вычислитель был придуман Блезом Паскалем (1623–1662), математиком, знаменитым своими работами по теории вероятностей и философскими сомнениями. Паскаль построил свою машину в 1642 г., вдохновленный конструкцией Герона Александрийского (10–70 гг.). Паскаль хотел отмерять расстояние, пройденное каретой.

Его идея до сих пор используется в счетчиках воды и автомобильных одометрах. Ее основа — однозубцовая передача, зацепленная с многозубцовой (рис. 7.3). Однозубцовая передача должна быть достаточно велика, чтобы сцепляться с многозубцовой только после того, как карета проедет единицу расстояния. Никто иной как Готфрид Вильгельм фон Лейбниц (1646–1716) доработал вычислитель Паскаля так, что тот стал умножать. Для такой машинки умножение заключалось в последовательном многократном сложении. Возможно, что изобретением Паскаля была спровоцирована технофобия, так как в то время даже математики боялись, что новая машинка подорвет их карьеру.

Первый настоящий механический вычислитель был изобретен Томасом Кольмаром (1785–1870) в 1820 г. Он умел складывать, вычитать, умножать и делить. Чарльз Бэббидж (1791–1871) воспользовался идеей Кольмара, дополнив ее собственными. Еще в 1812 г. Бэббидж понял, что многие длинные вычисления включали в себя повторяющиеся шаги. Он рассудил, что можно построить вычислительную машину, которая возьмет на себя автоматическое выполнение этих шагов. Прототип своей «разностной машины» он построил в 1822 г. А вскоре после этого получил от британского правительства субсидию для развития своей идеи. Однако в 1933 г. Бэббиджу в голову пришла идея получше.

Эта идея состояла в том, чтобы создать «аналитическую машину», — настоящий компьютер, способный выполнять десятичные параллельные вычисления. Такая машина работала бы со «словами» в 50 десятичных знаков и хранила бы до 1000 таких чисел. В аналитическую машину были бы встроены несколько математических операций, которые можно было бы выполнять в любом порядке (как укажет оператор). Инструкции для машины можно было бы записывать на перфокартах (на эту идею создателя натолкнул жаккардовый ткацкий станок).

Дочь лорда Байрона Августа (1815–1852) участвовала в работе Бэббиджа. Она была искусным программистом (возможно, первым в мире!) и писала программы для вычисления чисел Бернулли. Лорд Байрон — известный поэт — писал о дочери:

My daughter! with thy name this song begun—
My daughter! with thy name thus much shall end—
I see thee not,—I hear thee not,—but none
Can be so wrapt in thee; thou art the friend
To whom the shadows of far years extend:
Albeit my brow thus never shouldst behold,
My voice shall with thy future visions blend,
And reach into thy heart,—when mine is cold,—
A token and a tone even from thy father's mould.

В 1869 г. У. С. Джевонс (1835–1882) разработал конструкцию «логического пианино». Эта машина, снабженная клавиатурой и системой прутьев, была предназначена для автоматического выполнения силлогических рассуждений. Она могла выполнять автоматический вывод из посылок на основании простого силлогизма.

В 1890 г. Герман Холлерит (1860–1929) создал машину, которая читала созданные им перфокарты. Он работал для Американского бюро переписи и использовал машину для табуляции данных переписи[1]. Его «табуляционная машина» была потрясающим прорывом, она значительно увеличила точность и надежность данных. Перфокарты оказались удобным и надежным способом хранения данных[2]. Табулятор Холлерита

[1] Между прочим, на обработку результатов переписи 1880 г. потребовалось 9 лет. Это было еще до Холлерита, который сократил время обработки данных на порядок.

[2] После того как Холлерит создал свою компанию, он получал прибыль с перфокарт, а *не* с машин. Примерно то же делают нынешние производители принтеров, которые всю прибыль получают от продажи картриджей.

пользовался таким успехом, что он создал свою собственную фирму для продажи этого инструмента; именно эта компания впоследствии превратилась в International Business Machines (всемирно известную IBM).

Машина Холлерита была ограничена в возможностях; она могла выполнять только табуляцию и не выполняла более сложных вычислений. В 1936 г. Конрад Зус (1910–1995) создал машину (под названием машина Z1), которую можно по праву назвать первым свободно программируемым компьютером. Это была первая вычислительная машина, не предназначенная для выполнения какой-то особенной задачи. Как современный компьютер, она могла быть запрограммирована на выполнение самых разных действий. После Z1 в 1941 г. на свет появилась новая, более продвинутая машина Z3. Это был первый компьютер, в котором можно было хранить различные программы. Он был разработан для решения сложных инженерных задач. Для управления машиной использовались перфорированные отработанные киноленты. Однако в отличие от современных компьютеров Z3 была не электронной машиной, а механической.

Отличительная ее черта заключалась в том, что для чисел использовалась двоичная система. Иначе говоря, все числа записывались только двумя цифрами — 0 и 1 (например, число, которое мы привыкли изображать как 26, в двоичной системе имеет запись 11010). Возможно, Зус был вдохновлен машиной Тьюринга. В любом случае, в наше время двоичная система в компьютерах общепринята.

Год 1942 был ознаменован появлением первого в мире электронно-цифрового компьютера профессора Джона Атанасова (1903–1995) и его ученика Клиффорда Берри (1918–1963) из университета штата Айова. Их компьютер назывался ABC Computer и отличался — среди многих других новшеств — двоичной арифметикой, параллельными вычислениями, регенеративной памятью и разделением функций памяти и вычислений. В 1990 г. Атанасову в знак признания его работы была присуждена Национальная медаль за развитие науки и технологии.

В 1939–1944 гг. Говард Айкен (1900–1973) совместно с инженерами IBM работал над созданием большого автоматического цифрового компьютера (основанного на стандартных электромеханических блоках IBM). Машина, получившая официальное название «IBM automatic sequence controlled calculator», или ASCC, вскоре получила прозвище «Гарвард Марк I». Замечательная технологическая новинка, Гарвард Марк I состоял из 750 000 компонентов, имел 15 м в длину, 2,5 м в высоту и весил около 5 тонн. Он манипулировал с числами длиной в 23 цифры; два таких числа машина могла сложить или вычесть за 0,3 секунды; умножить — за 4 секунды, а разделить — за 10.

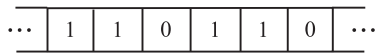


Рис. 7.4. Машина Тьюринга

Гарвард Марк I считывал данные с перфокарт и получал инструкции с бумажной ленты. Он состоял из нескольких отдельных вычислителей, которые работали над разными подзадачами (это очень напоминает современные параллельные вычисления). Айкен продолжал работу над созданием вычислительных машин, однако Гарвард Марк I был, по-видимому, самым значительным достижением. Он важен и с исторической точки зрения, и с практической — в 1959 г. он все еще использовался.

Как инженер Говард Айкен обладал широким кругозором и склонностью к инновациям, его социальные предвидения были не столь адекватными. Например, он полагал, что в будущем для обеспечения всех вычислительных потребностей Соединенных Штатов будет достаточно шести компьютеров.

Примерно в то же время в Великобритании разрабатывал свои далеко идущие идеи Алан Тьюринг (1912–1954). В 1936 г. он написал статью «О вычислимых числах», в которой описал теоретическое устройство, получившее известность под названием «Машина Тьюринга».

Машина Тьюринга — устройство для выполнения эффективно вычислимых операций. Оно снабжено бумажной лентой, бесконечно протяженной в оба конца. Лента разделена на бесконечное число равных ячеек (рис. 7.4). Каждая ячейка помечена либо цифрой 1, либо цифрой 0. Машина Тьюринга может находиться в одном из «состояний» $S_1, S_2, \ldots, S_n$ (их конечное число). В каждом состоянии сканируется одна из ячеек. После сканирования ячейки машина Тьюринга выполняет одно из трех действий:

1. Либо стирает метку 1 и заменяет ее меткой 0; либо стирает метку 0 и заменяет ее меткой 1; либо оставляет ячейку без изменений.
2. Сдвигает ленту на одну ячейку вправо или влево.
3. Переходит из данного состояния S_j в новое состояние S_k.

Машины Тьюринга стали моделью для всего, что может быть эффективно вычислено. Теория рекурсивных функций и знаменитый тезис Чёрча формальной логики получили интересные и впечатляющие интерпретации в терминах машин Тьюринга.

Можно сказать, что к 1945 г. Алан Тьюринг разработал все ключевые идеи того, что стало современным программируемым компьютером. Он знал, что можно создать машину, которая может выполнять всевозможные вычислительные задачи, и что ключом к такому функционалу должна быть программа, хранящаяся в памяти машины. Тьюринг обладал уникальным пониманием математической теории, лежащей в основе вычислений, и кроме того, на практике был знаком с электроникой.

Следующий американский прорыв в компьютерной гонке совершили в 1946 г. Джон Моушли (1907–1980) со своим студентом Дж. Преспером Эккертом (1919–1995) из университета Пенсильвании. В их компьютере, получившем название ENIAC, использовалось 18 000 электронных ламп. Электронные лампы (теперь их заменяют другие устройства) выделяют довольно много тепла, поэтому для ENIAC требовались специальные охладители, которые занимали 1800 квадратных футов площади. Сам компьютер весил 30 тонн.

Для ввода данных в ENIAC использовались перфокарты, он мог выполнять сложные инструкции. Для каждой новой задачи требовалась переконфигурация машины. Однако эксперты считают ENIAC первым успешным высокоскоростным электронным цифровым компьютером. Он использовался для научных вычислений с 1946 по 1955 г. Экерт и Моушли создали компьютерную компанию, которая, кроме прочего, создала компьютер UNIVAC. Это был первый коммерчески доступный компьютер в США. Любопытно, что в 1983 г. был возбужден судебный иск о нарушении патентного права (Сперри Ранд против Ханивелла), в котором утверждалось, что ENIAC — модификация изобретения Джона Атанасова.

В 1947 г. появилось на свет еще одно компьютерное новшество от Тома Килберна (1921–2001) и Фредерика Уильямса (1911–1977) из Манчестерского университета в Англии. Им удалось развить технологию, позволяющую хранить 2048 бит информации (*бит* — единица измерения компьютерной информации) на электронно-лучевой трубке. На основе этого устройства (его называют *трубкой Уильямса*) они создали компьютер, получивший название Тьюб Уильямса. Более точно, терминал отражал происходившее внутри трубки Уильямса. Пластина металлодетектора, расположенная близко к поверхности трубки, регистрировала изменения электрического заряда. Поскольку металлическая пластина заслоняла трубку, техники наблюдали ее состояние на специальном экране. Каждая точка экрана представляла точку на поверхности трубки. Каждая точка на поверхности трубки работала как конденсатор, который либо был заряжен и светился, либо был незаряженным и темным. Информация перерабатывалась в двоичный код, который позволял программировать компьютер.

К 1948 г. Тьюб эволюционировал в новую машину, названную *Бэби*. Ее отличало новшество: она могла на высокой скорости считывать и устанавливать случайные биты информации, сохраняя значение бита между установками. Это был первый компьютер, который мог запоминать произвольную (небольшую) программу в электронном хранилище данных и выполнять ее с электронной скоростью. Килберн и Уильямс продолжали работу над своими идеями, что привело в 1949 г. к созданию Манчестер Марк 1. Это был первый, компьютер, обладавший памятью со случайным доступом (аналогичную памяти, которая используется в современных компьютерах). Она отличается тем, что данные не хранятся в последовательном порядке, как на ленте. Вместо этого они сохраняются таким образом, что могут считываться электронно с высокой скоростью.

В 1944 г. счастливый случай свел Джона фон Неймана (1903–1957) и Германа Голдстина (1913–2004) на железнодорожной станции в Абердине, Мэриленд. Именно тогда фон Нейман узнал о проекте EDVAC (Electronic Discrete Variable Automatic Computer — электронный автоматический компьютер с дискретной переменной) в Пенсильванском университете. Он включился в этот проект и в 1945 г. написал статью, изменившую направление развития компьютерных наук. До тех пор компьютеры (такие как ENIAC) требовалось переконфигурировать для каждой новой задачи. Фон Нейман сообразил, что инструкции для компьютера можно хранить *внутри машины*, и предложил таким образом новую идею *программируемого компьютера* — именно такими мы представляем себе компьютеры сегодня. В конце концов фон Нейман и Голдстин вернулись в Принстонский институт высших исследований, штат Нью Джерси, где работали над компьютером, воплощая идеи фон Неймана. Многие считают его (математика по образованию) отцом современного компьютера.

В 1956 г. А. Ньюэлл (1927–1992) и Г. Саймон (1916–2001) разработали программу «машина теории логики», которая могла доказывать теоремы исчисления высказываний (это часть формальной логики, которая имеет дело с соотношениями между высказываниями). На практике машина теории логики могла находить только очень короткие доказательства. Ее очень скоро сменила геометрическая машина Гелернтера. Ограничившись отдельной ветвью математики (геометрией), Гелернтер достиг большей эффективности.

В том же году начался проект по автоматизации доказательств всех результатов из Principia Mathematica Уайтхеда и Расселла с использованием машины теории логики Ньюэлла и Саймона. Этот проект был завершен в 1959 г.

К 1960 г. три технологии доказательств теорем были разработаны П. Гилмором, Г. Вангом (1921–1995) и Д. Правицем (р. 1936). Эти системы справлялись только с самыми элементарными утверждениями и доказательствами.

В конце 1960-х годов одна группа в Applied Logic Corporation из Принстона, штата Нью Джерси, разработала систему SAM (semi-automated mathematics — полуавтоматизированная математика). Ее отличала возможность работать под руководством и вмешательством человека.

В 1967 г. система проверки доказательств Automath была разработана в техническом университете Эйндховена Н. Г. де Брейном и его коллегами. В ней использовался особый язык для записи и проверки математических утверждений.

В 1972 г. Р. А. Овербик создал систему доказательства теорем Aura (Automated Reasoning Assistant — ассистент автоматических рассуждений). Затем ее сменила и превзошла система Otter (Organized Techniques for Theorem-proving and Effective Research — организованные техники доказательства теорем и эффективных исследований). Среди современных мощных систем для математических доказательств следует указать HOL Light (Higher Order Logic — логика высшего порядка), Mizar, ProofPower, Isabelle и Coq. Подробную информацию об этих средствах можно получить в статьях [HAL3] и [WIE].

Перечислим важнейшие достижения в развитии компьютерного доказательства.

- **Первая теорема Гёделя о неполноте.** Она гласит, что в любой достаточно сложной логической системе (включающей арифметику) существуют истинные утверждения, которые нельзя доказать. Подробнее об этом можно прочитать в разд. 1.11. Шанкар использовал компьютерную утилиту ngthm для построения «формального доказательства» (т. е. компьютерного доказательства, исходящего из самых базовых аксиом и представляющего собой утомительную пошаговую логическую процедуру) этого результата в 1986 г. С этой же целью О'Коннор в 2003 г. воспользовался системой Coq, а Гаррисон в 2005 г. — системой HOL Light.

- **Теорема о жордановой кривой**. Это теорема о том, что плоская замкнутая кривая без самопересечений делит плоскость на две области — ограниченную и неограниченную. Интуитивно очевидная, эта теорема чрезвычайно сложна для доказательства в традиционном смысле этого слова. В 2005 г. с помощью системы Mizar Томас Хейлс дал формальное доказательство этого факта.

- **Теорема о простых числах**. Это знаменитый результат Вале Пуссена и Адамара о распределении простых чисел. У него сложное доказательство, опирающееся на комплексный анализ. Формальное доказательство в 2008 г. построил Джон Харрисон с помощью системы HOL Light.

- **Теорема о четырех красках**. Мы довольно подробно обсуждали эту терему в гл. 6. Впервые ее доказали Аппель и Хакен с помощью компьютера, производившего миллионы операций. Формальное доказательство в 2004 г. построил Джордж Гонтье, используя систему Coq. Подробнее об этом можно прочитать в статье [GON].

Следует понимать, что компьютерное построение формального доказательства может быть довольно утомительной и сложной процедурой. Например, А. Маттиас подсчитал, что для строгого определения числа 1 в терминах логики требуется более 4 триллионов символов. Только представьте себе, сколько усилий нужно, чтобы полностью формализовать доказательство сложного математического факта вроде одного из тех четырех, которые мы только что перечислили!

Интересное ответвление современной истории вычислений — суперкомпьютер. Его крестным отцом можно считать Сеймура Крэя (1925–1996). Он полагал, что суперкомпьютеры должны быть основаны на понятии «параллельные вычисления». Идея в том, что каждый компьютер содержит центральный процессор (CPU). Это чип, в котором проходят все вычисления — манипуляции с нулями и единицами. У суперкомпьютера должно быть несколько CPU — возможно, более 100[1], — и между ними распределяются различные вычислительные задачи. Кроме того, каждый CPU должен иметь свою память, достигающую нескольких гигабайт.

Таким образом одновременно можно проводить много различных вычислений; поэтому конечный результат достигается быстрее. На заре суперкомпьютеров пользователь должен был владеть специальным языком программирования, в котором имелись подпрограммы для разделения труда между различными процессорами. В современных суперкомпьютерах разделение производится автоматически, при этом распределяется стандартный код, который вводит пользователь. Существуют версии языков Fortran, C и C++, которые можно использовать в суперкомпьютерах. Кроме того, для суперкомпьютеров широко распространены такие программные среды, как Message Passing Interface (MPI), OpenMP, Co-Array Fortran и Universal Parallel C.

Много лет самые быстрые машины с параллельной обработкой создавались компанией Сеймура Крэя Cray Research, расположенной неподалеку от Миннеаполиса. Она дала начало многим другим современным высокотехнологичным компаниям. Довольно долго скорость Крэя была

[1] На самом деле современный рекорд — суперкомпьютер с 212 992 CPU.

эталоном для компьютерного мира. Вот один простой пример: о появлении первого чипа пентиума говорили так: «Теперь Cray I помещается на одном чипе». Этот чип работает со скоростью 100 megaflop/s (или 100 Mflop/s)[1].

Сеймур Крэй был человеком особенным, даже загадочным. Когда он сталкивался с глубокой и сложной задачей, он спускался под землю. Буквально. Много лет Крэй копал штыковой лопатой туннель размером 4 фута$\times$8 футов, который должен был соединить его дом в Chippewa Falls с озером неподалеку. Крэй говорил, что его лучшие идеи всегда посещали его во время копания: «Когда я рою туннель, часто ко мне приходят эльфы, принося решения моей задачи». Он умер в автомобильной аварии, так и не завершив туннель.

Сегодня с распространением *персонального компьютера* компьютеризация стала важной частью жизни каждого из нас. Стив Джобс (1955–2011) и Стив Возняк (р. 1950) изобрели персональный компьютер для массового рынка в 1977 г[2].

---

[1]На компьютерном жаргоне *flop* (floating-point operation) — это операция с плавающей точкой. Сокращение *flop/s* обозначает «операций с плавающей точкой в секунду». Другими словами, flop — это одно элементарное арифметическое вычисление, например сложение. Один мегафлоп — миллион операций с плавающей точкой. Так что машина в 100 мегафлоп может выполнять 100 миллионов элементарных арифметических операций в секунду. С такой скоростью работали обычные персональные компьютеры 10 лет назад. Сегодня персональные компьютеры работают в пять–десять раз быстрее. Сейчас самые быстрые в мире машины — это MDGrape фирмы RIKEN, которые вычисляют со скоростью 1 petaflop/s (т. е. 10^{15} flop/s или один квадрильон flop/s, иногда еще используется обозначение 1 Pflop/s) и IBM Blue Gene/L, скорость которых составляет 360 teraflop/s ($360 \cdot 10^{12}$ flop/s или 360 триллионов flop/s или 360 Tflop/s).

[2]Следует, однако, отметить, что практически одновременно с Apple II появился компьютер Commodore PET. Еще раньше появилась версия персонального компьютера в исследовательском подразделении компании Xerox PARC в Пало Альто. Персональный компьютер Xerox PARC так и не стал коммерческим продуктом. В той же компании Xerox PARC изобрели компьютерную мышь, лазерный принтер и графический пользовательский интерфейс, который со временем развился до операционной системы Windows.

Для операционной системы Microsoft Windows требуется 100 миллионов строк компьютерного кода. Это одно из самых заметных инженерных достижений в истории. Когда обсуждали программу звездных войн президента Рональда Рейгана, указывалось, что контрольная система такого проекта включала бы тысячи строк компьютерного кода. В то время такая сложность считалась недостижимой. Теперь, конечно же, этот уровень далеко превзойден. Для проверки надежности столь сложной системы, как Windows, может служить такая задача, как доказательство математической теоремы. И действительно, Т. Болл из компании Microsoft разработал программное обеспечение для доказательства теорем и проверки моделей, которое используется для проверки составных частей операционной системы Windows. Чтобы проверить 30 функций драйвера порта параллельного ввода-вывода, это программное обеспечение вызывалось 487 716 раз.

Компания IBM революционизировала индустрию персональных компьютеров в 1981 г., выпустив первый PC. В этой машине использовалась операционная система, которая была разработана под названием 86-DOS Тимом Патерсоном[1)] из Seattle Computer Company. Билл Гейтс из Microsoft купил 86-DOS за $50 000 и превратил ее в MS-DOS, которая служила операционной системой для IBM PC с 1981 по 1995 г.

В 1994 г. У. У. МакКьюн разработал современное сложное программное обеспечение для доказательства теорем — Otter. Otter использовался не только для «переоткрытия» уже известных доказательств, но и для открытия совершенно новых математических теорем и их доказательства. Теперь Otter превзойден новой системой — Prover 9.

7.2 В ЧЕМ РАЗНИЦА МЕЖДУ МАТЕМАТИКОЙ И КОМПЬЮТЕРНЫМИ ДИСЦИПЛИНАМИ

Когда среднестатистический человек знакомится с математиком, то часто представляет себе, что тот работает за компьютером днями напролет. Такое представление одновременно и верно, и ложно.

Компьютеры глубоко вошли во все области современной жизни. Как мы видели в предыдущем разделе, отцом современных компьютерных разработок считают математика Джона фон Неймана. Он работал вместе с Германом Голдстином, тоже математиком. В наши дни практически все математики используют компьютеры для работы с электронной почтой, для написания статей и книг и размещения материалов в Интернете. Значительное число (все же заметно меньше половины) математиков используют компьютер для проведения *экспериментов*. Они находят численные решения дифференциальных уравнений, итерируют данные для динамических систем и дифференциальных уравнений, выполняют исследование операций, занимаются проверкой вопросов теории управления, вычисляют неприводимые унитарные представления групп Ли, вычисляют L-функции в аналитической теории чисел и занимаются многими другими вещами. Но подавляющее большинство (академических) математиков, в конце концов, вооружаются ручкой и записывают *доказательство*. А потом его публикуют.

Дизайн современного компьютера основан на математических идеях — машине Тьюринга, теории кодирования, теории очередей, двоичных чисел и операций, языках программирования и так далее. Операционные системы, компьютерные языки высокого уровня (такие как Fortran, C++, Java), дизайн центральных процессоров (CPU), чипов памяти, управление

[1)] Сейчас он работает в Microsoft.

памятью и многие другие составляющие компьютерного мира основаны на математике. Компьютерный мир — эффективное и важное воплощение математической *теории*, которая развивалась на протяжении 2500 лет. Но компьютер — *не математика*. Это приспособление для манипулирования данными.

Все же под влиянием компьютеров возникли восхитительные новые идеи, и теперь математику практикуют несколько иначе. Мы знаем, что ранние компьютеры занимались только арифметикой. Постепенно, со временем, получила распространение идея, что компьютеры могут выполнять другие *рутинные* действия. В конце концов, благодаря работам фон Неймана развилось понятие программируемого компьютера. В 1960 гг. группа ученых из MIT, считавших, что компьютер может выполнять вычисления высшей алгебры, геометрии и анализа, разработала программный продукт под названием Macsyma. Его можно было устанавливать только на очень мощном компьютере, а язык программирования для него был сложным и трудным.

Благодаря Стивену Вольфраму (р. 1959)[1] группе Maple из университета Ватерлоо[2], группе MathWorks из Натика, штат Массачусетс[3] и многим другим, у нас есть *системы компьютерной алгебры*. Это компьютерные языки высокого уровня, которые могут решать задачи анализа, дифференциальные уравнения, выполнять сложные алгебраические преобразования. И эти программные продукты предназначены для персонального компьютера! Очень многие математики, инженеры, ученые выполняют исследования высокого уровня, используя такое программное обеспечение. В многих диссертациях представлены результаты, полученные с использованием систем Mathematica, Maple или MATLAB. Подробнее о системах компьютерной алгебры мы расскажем в разд. 8.2.

Новые средства привели к важным новым открытиям. Стивен Вольфрам использовал программу Mathematica для вычислений, которые были необходимы для построения его новой теории вселенной, представленной в книге *A New Kind of Science* [WOL] (разд. 10.4).

Естественно — даже для профессиональных математиков — впасть в ловушку мышления: «Раз уж компьютер говорит, что это верно, значит, это верно». Мы встречаем студентов, которые так относятся к своим калькуляторам. Когда мы пытаемся ввести работу на компьютере на уроки математики в школе, некоторые ученики получают горы мусора

[1] Автор популярного продукта Mathematica.

[2] Авторы популярного продукта Maple.

[3] Авторы популярного продукта MATLAB.

Системы компьютерной алгебры

Самые первые компьютеры предназначались для «перемалывания чисел». Машине задавали много-много больших чисел и программировали ее на выполнение самых разных вычислений. Теперешние машины гораздо мощнее: самый обыкновенный персональный компьютер обеспечен гигабайтами памяти и огромным жестким диском. Так что он может манипулировать информацией на гораздо более высоком уровне. В частности, существуют программы, которые решают задачи алгебры матриц, математического анализа, работают с графиками сложных функций и решают дифференциальные уравнения. Компьютеры широко используются для статистического моделирования и для работы с геномом. Постоянно разрабатываются новые графические приспособления, которые позволяют нам видеть то, о чем 20 лет назад было нельзя даже и помыслить. Перед нами открывается новый мир.

на выходе — и притом полагают, что все это разумные вещи, ведь их же вывела машина. Встречаются и ученые, которые вычисляют на компьютере бессмыслицу, а затем воображают, что это и есть математическое исследование. Это пример того, как некоторые путают обратное утверждение с контрапозицией (разд. 1.3). Если какое-либо утверждение истинно, то верно запрограммированный компьютер подтвердит его истинность. Однако, если машина утверждает, что *что-то истинно*, отсюда вовсе *не следует истинность такого утверждения*. Вовсе нет, и старая присказка IBM «мусор на входе — мусор на выходе» как нельзя более верна в таком контексте.

Нет никаких сомнений в том, что компьютеры — важнейшая составляющая математической жизни. Они не представляют традиционную математику, однако они являются ее *частью*. Их можно использовать для *поиска новых теорем* и *построения новых доказательств*. В оставшихся разделах этой главы и в следующей мы рассмотрим некоторые из такого рода новейших применений компьютеров.

7.3 ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ И ПРОВЕРКА ПРОГРАММ

Компьютерные науки очень связаны с математикой. В конце концов, современные программируемые компьютеры были разработаны математиками, и компьютерная логика, структура языков программирования высокого уровня, дизайн компьютеров многим обязаны математике. Тем не менее между этими двумя дисциплинами много философских различий.

Компьютерщики-теоретики имеют дело с точностью и надежностью своих программ. Здесь под «компьютерной программой» мы понимаем список команд, записанных компьютерным кодом, основанным на английском языке, которые компьютер должен выполнять. Некоторые компьютерные программы коротки: скажем, чтобы задать очень сложное множество Мандельброта, достаточно 20 строк кода. Некоторые программы головоломно сложны. Компьютерный код для Windows Vista превышает 100 миллионов строк. Компьютерные специалисты заботятся о *формальной проверке программ*, и это очень глубокий философский вопрос. Некоторые полагают, что компьютерные дисциплины должны больше напоминать математику; проверка программы должна быть сродни доказательству теоремы. Именно так следует гарантировать надежность работы. Эту точку зрения можно углубить: лучше всего было бы, если проверка программ осуществлялась автоматически — без вмешательства человека, одним нажатием кнопки.

На самом деле это неосуществимо сегодня и вряд ли будет осуществимо в будущем. Формальную проверку проводит человек, который сидит и проверяет логику компьютерной программы — просто размышляя. Это утомительная напряженная работа. От нее не получают удовольствия, и мало кто ее ценит. Математик, открывший новое доказательство новой теоремы, старается поделиться им с коллегами, прочитать о нем лекцию, записать и опубликовать его. И наоборот, никто не «делится» проверкой компьютерной программы, никто не читает об этом лекции и не публикует результатов.

Однако следует отметить один из ключевых моментов, о которых мы рассказываем в этой книге: восприятие математической истины — социологический процесс. Он протекает в математическом сообществе. Он включает понимание, приятие, осмысление и обсуждение. Этот процесс занимает время и зависит от включенных в него людей. Здесь нет ничего общего с проверкой программы. Все, что нужно о ней знать, — что она работает. Существуют даже важные примеры широко распространенного программного обеспечения, такого как пакет Reverse Cuthill-McKee, эффективность и надежность которого была продемонстрирована лишь после нескольких лет использования.

Есть фундаментальное эпистемологическое затруднение с формальной проверкой компьютерных программ, и именно оно делает невозможной автоматическую проверку. А именно, описание требований к программе — цель ее написания, выполняемая задача — обязательно неформально. А вот сама программа формальна, и поэтому неясно, как перейти от одного к другому (ведь требуется *проверить*, что второе удовлетворяет первому).

По-видимому, такой переход должен быть неформальным, т. е. невозможным для исполнения машиной.

Проверка — не послание, она не служит предметом коммуникации, у нее нет содержания. Нет и не будет социологической структуры, которая поддержит создание и приятие проверки. Ее результатам или верят или нет. Проверку нельзя принять, обобщить, использовать где-то еще, найти ее связь с другими дисциплинами или присвоить сообществом ученых. Формальная проверка программ не вызревает в нас, как доказательство. Она просто слепое орудие.

Следует еще заметить, что важная компьютерная программа — это не фиксированная неизменная единица; это растущий и изменчивый организм. Компьютерные программы — для банков, производства, университетов, правительства — постоянно модифицируются и обновляются. И проверка модифицированной программы ничуть не легче проверки фиксированной. Все проблемы сохраняются. Проверки не переносятся с объекта на объект, и большая проверка не составляется очевидным образом из меньших. Так что роль проверки становится не такой простой. Интересное обсуждение некоторых из этих идей можно найти в статьях [MAK], [KOL], [FET] и [DLP].

Эти рассуждения помогают нам взглянуть на понятие доказательства под другим углом и понять, насколько важно это понятие для математики и ее ценностей. *Математическое доказательство не зависит от машины или языка. Оно также не зависит от отдельно взятого человека.* Именно в этом его особенность, именно она ставит математику вне времени.

7.4 КАК КОМПЬЮТЕР МОЖЕТ ИССЛЕДОВАТЬ НАБОР АКСИОМ ДЛЯ ПОЛУЧЕНИЯ УТВЕРЖДЕНИЙ И ДОКАЗАТЕЛЬСТВ НОВЫХ ТЕОРЕМ

Майкл Атья в работе [ATI2] опять дает нам пищу для размышлений:

> Большая часть математики либо возникла в ответ на вызовы окружающего мира, либо нашла в нем неожиданные применения. Эта глубокая связь математики и естественных наук привлекательна сама по себе, причем критерием привлекательности служит и красота математической теории, и важность приложений. Как показывает история современных связей между геометрией и физикой, естественные науки в свою очередь тоже влияют на математику, и это может быть выгодным вдвойне. Мы, математики, не только можем приносить пользу, но в то же время создавать произведения искусства, черпая хотя бы отчасти вдохновение из окружающего мира.

Современные языки программирования высокого уровня позволяют вносить в компьютер определения и аксиомы логических систем. Причем имеются в виду не просто *слова*, которые передают идеи. Машине

Булева алгебра

Булеву алгебру придумал Джордж Буль в середине XIX в. Правда, вначале он ставил перед собой цель изучить логику электрических переключателей. В наши дни булева алгебра используется для изучения логических операций компьютерных чипов, для проверки программного обеспечения и для многих других целей.

В традиционной булевой алгебре десять аксиом, но сейчас известно, что их можно заменить тремя аксиомами Роббинса.

можно передать информацию о связях между идеями. При этом допустимы правила логики и так далее. Язык программирования (скажем, Otter) может обладать специальным синтаксисом для введения такой информации. С такими данными компьютер может искать допустимые цепочки аналитической индукции (следуя встроенным правилам логики и опираясь только на запрограммированные аксиомы) и приводить к новым истинным утверждениям или *теоремам*. Такое программное обеспечение для доказательства теорем может работать в двух режимах:

- в интерактивном, когда машина периодически останавливается, чтобы пользователь мог ввести дальнейшие инструкции;
- в пакетном, когда машина выполняет всю работу за раз и в конце выдает результат.

В любом режиме цель состоит в том, чтобы найти новые математические истины и создать последовательность логических утверждений, которые к ним приводят.

Некоторые области математики, такие как действительный анализ, во многом синтетические по природе. Действительный анализ включает оценки и тонкие приемы, которые не выводятся напрямую из двенадцати аксиом этой области математики.

Таким образом, эта область не вполне поддается компьютерным доказательствам, и они обошли ее стороной[1)].

Другие области математики более формальны. Конечно, в них тоже есть прозрения и глубокие мысли, но многие результаты могут быть получены просто правильной компоновкой понятий, определений и аксиом. Компьютер может перебрать миллионы комбинаций за считанные минуты,

[1)]Однако следует признать, что некоторые области *анализа* обладают алгебраической природой. Теория D-модулей, теория алгебр фон Неймана и теория алгебр Ли во многом опираются на алгебру. И в этих трех областях компьютеры используются вполне успешно. В статьях [BAB3], [BBC], [BBKW] и [BAB2] описаны прекрасные примеры того, как компьютеры применяются для вычисления интегралов, специальных постоянных и других целей действительного анализа.

и довольно велики шансы найти что-то, что не приходило в голову ни одному человеку. Гипотеза Роббинса, которую мы обсудим ниже, — живой пример такого открытия.

Конечно, остается вопрос эстетики. После того как компьютер открыл новую «математическую истину» — вместе с доказательством, — человек или группа людей должны будут проверить ее и установить ее значимость. Интересна ли она? Полезна ли она? Как она вписывается в контекст предмета? Какие новые двери она открывает?

Хорошо, если компьютер раскроет путь своего анализа, чтобы его мог записать, проверить и проанализировать человек. В математике важен не сам результат. Наша конечная цель — *понимание*. Поэтому мы хотим видеть, изучить и понять *доказательство*.

Один из триумфов искусства компьютерных доказательств пришелся как раз на булеву алгебру. Созданная Джорджем Булем в середине XIX в., она представляет собой математическую теорию контуров и переключателей. В одной из стандартных формулировок в этой теории всего пять определений и десять аксиом. Вот они:

Примитивными элементами булевой алгебры являются бинарная операция $\cup$ (мы можем представлять ее себе как объединение) и бинарная операция $\cap$ (мы можем представлять ее себе как пересечение). Кроме того, имеется символ унарной функции $-$, который обозначает дополнение. Перечислим аксиомы булевой алгебры:

(B_1)	$x \cup (y \cup z) = (x \cup y) \cup z$	$(\tilde{B}_1)$	$x \cap (y \cap z) = (x \cap y) \cap z$
(B_2)	$x \cup y = y \cup x$	$(\tilde{B}_2)$	$x \cap y = y \cap x$
(B_3)	$x \cup (x \cap y) = x$	$(\tilde{B}_3)$	$x \cap (x \cup y) = x$
(B_4)	$x \cap (y \cup z) = (x \cap y) \cup (x \cap z)$	$(\tilde{B}_4)$	$x \cup (y \cap z) = (x \cup y) \cap (x \cup z)$
(B_5)	$x \cup \overline{x} = 1$	$(\tilde{B}_5)$	$x \cap \overline{x} = 0$

В 1930-х гг. Герберт Роббинс предположил, что эти 10 аксиом следуют только из трех довольно простых аксиом:

(R_1)	$x \cup (y \cup z) = (x \cup y) \cup z$	(ассоциативность)
(R_2)	$x \cup y = y \cup x$	(коммутативность)
(R_3)	$\overline{\overline{\overline{x} \cup y} \cup \overline{x \cup \overline{y}}} = x$	(равенство Роббинса)

Несложно показать, что каждая булева алгебра, в соответствии с первоначальными десятью аксиомами (B_1)–(B_5) и $(\tilde{B}_1)$–$(\tilde{B}_5)$, также является алгеброй Роббинса (т. е. удовлетворяет трем новым аксиомам (R_1)–(R_3)). Но на протяжении 60 лет оставался открытым вопрос о том, является ли каждая алгебра Роббинса булевой. В конце концов, на этот вопрос был получен положительный ответ Уильямом МакКьюном из Аргоннской национальной лаборатории. Он пользовался программой (разработанной в Аргонне) EQP

(Equational Theorem Prover — доказыватель теорем-уравнений). Компьютер попросту сочетал аксиомы Роббинса миллионами способов, следуя строгим правилам логики, и обнаружил ту комбинацию, из которой следуют 10 аксиом булевой алгебры. Важно отметить, что после того, как доказательство гипотезы Роббинса нашел компьютер, Аллен Л. Манн [MAN1] построил доказательство на бумаге, которое может прочесть человек.

Компьютеры эффективно использовались для нахождения новых теорем в проективной геометрии и других классических областях математики. Удалось даже открыть некоторые новые теоремы евклидовой геометрии (см. работу [CHO]). Стикель [STI] смог получить результаты в алгебре. Новые теоремы были обнаружены также в теории множеств, теории решеток и в теории колец. Существует мнение, что эти результаты никогда не были обнаружены человеком потому, что люди никогда не были в них заинтересованы. Только время может подтвердить его или опровергнуть. Однако подтверждение гипотезы Роббинса представляет большой интерес для теоретических компьютерных дисциплин и для логики.

Одним из пионеров поиска компьютерных доказательств является Ларри Вос из Аргоннской национальной лаборатории. Он блестяще находит доказательства недоказанных теорем и более короткие версии известных доказательств. Все это он делает с помощью компьютера, зачастую пользуясь программой Otter, созданной МакКьюном.

Один из недавних прорывов — компьютерно порожденное решение задачи SCB в эквивалентном исчислении. Работы Воса включены в многие книги, в частности [WOS1] и [WOS2].

7.5 КАК КОМПЬЮТЕР ПОРОЖДАЕТ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО НОВОГО РЕЗУЛЬТАТА

В наше время существует программное обеспечение, разработанное специально для того, чтобы изучать системы аксиом в поиске новых результатов. Например, программа Otter — программа автоматического вывода. Вы можете сообщить ей задачу, которую хотите обдумать, а также какой тип логики следует использовать, и нажимаете кнопку. Эта программа успешно использовалась для анализа различных ситуаций во многих областях математики.

Как было сказано в предыдущем разделе, гипотеза Роббинса в булевой алгебре — выдающийся результат и важнейший новый факт, обнаруженный в результате компьютерного поиска. Следует понимать, что аксиомы булевой алгебры кристально ясные, аккуратные и ладно подогнаны друг к другу как кирпичики. Это система аналитического вывода, которая хорошо поддается новой технологии компьютерного доказательства теорем. Другие области, такие как действительный анализ, дифференциальные уравнения в частных производных и топология малой размерности, опирающиеся на синтетическую аргументацию, на картинки в доказательствах и ad hoc аргументы, неподвластны (по крайней мере на современном уровне знания в области компьютерных доказательств) компьютерному поиску. Некоторые, например Дорон Цайлбергер [ZEI], предрекают, что через 100 лет *все* доказательства будут порождаться компьютерами. Но при существующем состоянии искусства доказательства, как мы его наблюдаем, такое мнение представляется в лучшем случае чересчур оптимистичным.

Существует и такое интересное мнение, что многие компьютерные доказательства по природе своей слишком длинны и сложны для того, чтобы представлять какую-либо пользу для людей. В 1972 г. Альберт Мейер из MIT показал, что компьютерные доказательства некоторых произвольно выбранных утверждений в очень простой логической системе (с одной только операцией — прибавить единицу к натуральному числу) безнадежно длинны. Позднее было показано, что в той же очень простой логической системе существуют утверждения длиной 617 и менее символов, которые требуют 10^{123} компонентов. А ведь 10^{123} — число объектов размером с протон, которые могут плотно заполнить нашу вселенную. Урок в том, что, хотя компьютерные доказательства представляют интерес и продолжают открывать для нас новые истины, они имеют свои ограничения. Непохоже, что когда-нибудь компьютеры станут генерировать все нужные нам доказательства.

Нужно отметить: факт, что компьютер может выполнять высокоуровневые задачи, такие как поиск новых истин и их доказательств, действительно впечатляет. Первые компьютеры были созданы около шестидесяти лет назад для того, чтобы обрабатывать синоптические и артиллерийские данные. Все это были действия с числами, и все они были вполне элементарными. В те дни компьютер мог делать *то же*, что и человек, только быстрее и точнее.

Есть забавная история, *иллюстрирующая* это утверждение. В этой книге мы уже говорили о том, что фон Нейман придумал и разработал первый программируемый компьютер в Принстонском институте перспективных исследований. Вместе с ним над проектом работала целая команда сотрудников, и среди них Герман Голдстин.

Джон фон Нейман был выдающимся математиком и очень хорошо считал в уме. Кроме того, у него была фотографическая память: он без усилий воспроизводил длинные пассажи из романов, прочитанных двадцать лет назад. Кроме создания (вместе с Германом Голдстином) одного из первых программируемых компьютеров фон Нейман активно работал как математик и консультант. Он постоянно разъезжал по стране, помогая правительственным агентствам и частному бизнесу, распространяя влияние своей эрудиции. Говорят, что доход от этой деятельности (не считая зарплаты в Принстонском институте) был довольно существенным. Да к тому же фон Нейман был довольно богат благодаря фамильному состоянию.

Во время одной из таких консультационных поездок Герман Гольдстин и другие продолжали работу над новым компьютером, проводя тестирование. Они ввели большое количество результатов метеорологических наблюдений, включили машину на всю ночь и к утру получили очень интересные выводы. В тот же день, только позднее, из поездки вернулся фон Нейман. Собираясь подшутить над ним, коллеги решили не рассказывать ему об успешной работе компьютера, а преподнести все так, словно они получили результаты вручную. За чаем они рассказали фон Нейману, что работали над такой-то задачей с такими-то данными, и на первом шаге получили … «Нет-нет», запротестовал фон Нейман, приложил руку ко лбу, откинулся назад и дал ответ. Точно такой же утром дала и машина. Они продолжали: «На втором же шаге вышло …» «Нет, нет, — опять запротестовал фон Нейман. — Дайте-ка мне подумать». Он опять откинулся назад — теперь это заняло больше времени — и через несколько мгновений дал ответ. И наконец, сотрудники сказали «А вот на третьем шаге…» И опять фон Нейман пожелал посчитать сам. Он откинулся назад и принялся размышлять. Спустя несколько минут он все еще размышлял, так что они раскрыли ответ. Джон фон Нейман вышел из транса и сказал: «Да, совершенно верно. Но как вам удалось сосчитать быстрее меня?»

Про необыкновенное умение фон Неймана считать в уме рассказывают еще одну историю. Она был на вечеринке, и кто-то задал ему головоломку:

> Расстояние между двумя поездами составляет 50 миль. Они движутся навстречу друг другу по одному пути со скоростями 25 миль в час. С одного из поездов взлетает муха и со скоростью 40 миль в час летит к другому, а затем немедленно возвращается к первому. Так она и летает туда-сюда, пока поезда ее не раздавят. Сколько всего миль пролетит муха?

Джон фон Нейман выпалил верный ответ — 40 миль. Его друзья сказали: «О, здорово, ты догадался». (Догадаться надо было о том, что поезда встретятся через один час, и за этот час муха как раз 40 миль и пролетит.) Но фон Нейман ответил, что он просто-напросто просуммировал бесконечный ряд.

Забавно и поучительно (и ужасно утомительно) посмотреть, что же это за ряд. Вначале заметим, что если ситуация выглядит так, как на рис. 7.5, когда муха стартует с левого поезда, то мы можем вычислить, когда она

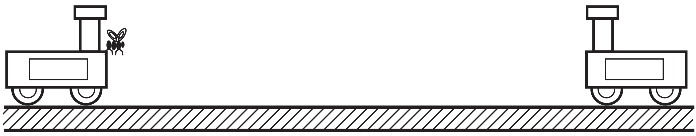


Рис. 7.5. Путешествие мухи от поезда к поезду

впервые долетит до правого, с помощью уравнения

$$40t = 50 - 25t.$$

Значит, первый перелет мухи, от левого поезда до правого, длится $t = 50/65$ часов. Длительность второго перелета находится из уравнения

$$\frac{50 \cdot 40}{65} - 40t = \frac{50}{65} \cdot 25 + 25t,$$

и таким образом составляет $t = (50 \cdot 15)/65^2$. Продолжая такие расчеты, мы приходим к бесконечному ряду

$$T = \frac{50}{65} + \frac{50}{65^2} \cdot 15 + \frac{50}{65^3} \cdot 15^2 + \frac{50}{65^4} \cdot 15^3 + \cdots =$$
$$= \frac{50}{65}\left(1 + \frac{15}{65} + \left(\frac{15}{65}\right)^2 + \left(\frac{15}{65}\right)^3 + \ldots\right).$$

Вот теперь можно воспользоваться стандартным приемом для вычисления суммы бесконечной геометрической прогрессии внутри скобок и прийти к ответу 65/50. Таким образом, мухе придется летать 1 час, пока ее не раздавят. А значит, она преодолеет расстояние в 40 миль.

В наше время даже персональный компьютер может работать со скоростью до одного *гигафлопа* в секунду (1 Gflop/s). Иначе говоря, компьютер выполняет миллиард базовых арифметических операций в секунду. Ни один человек — даже Джон фон Нейман — не может с ним сравниться.

В следующей главе мы начнем исследовать новые способы использования компьютеров для коммуникации, преподавания и построения доказательств. Нет никаких сомнений в том, что компьютеры изменили многие аспекты нашей жизни и продолжат это делать и далее.

Глава 8

КОМПЬЮТЕР ПОМОГАЕТ ПРЕПОДАВАТЬ И ДОКАЗЫВАТЬ

Свет или, на худой конец, молния — мир может сделать свой выбор.

— Томас Карлейль

Чтобы понять ничто, нужно много времени.

— Эдуард Дальберг

Экспериментальная математика — это тот раздел математики, который имеет дело прежде всего с кодированием и передачей идей в математическом сообществе с помощью экспериментальных исследований гипотез и менее формальных воззрений, а также с помощью анализа полученных данных.

— Дж. Борвейн, П. Борвейн, Р. Гиргенсон, С. Парнс

Когда компьютерная программа применяет логические рассуждения настолько эффективно, что приводит к доказательствам, которые публикуются в математических и логических журналах, это знаменует важный этап. Этот этап был достигнут различными автоматическими программами. Их использование привело к ответам на открытые вопросы из таких областей, как теория групп, комбинаторная логика, теория конечных полугрупп, алгебра Роббинса, исчисление высказываний.

— Кит Девлин

8.1 ПРОГРАММА GEOMETER'S SKETCHPAD

Geometer's Sketchpad — это (программное) обучающее средство, *разработанное компанией* Key Curriculum Press, предназначенное для преподавания евклидовой геометрии в старших классах. В последнюю четверть века имеется тенденция развернуть преподавание геометрии в старших классах таким образом, чтобы снять акцент на доказательстве и усилить роль эмпирического и интуитивного подхода. Geometer's Sketchpad удачно вписывается в эту тенденцию.

Эта программа позволяет пользователю рисовать квадраты, треугольники, круги и другие фигуры классической геометрии, сочетать их друг с другом, растягивать их, сравнивать, измерять и так далее. Это великолепное средство для экспериментов с геометрическими идеями. Что еще важнее, это эффективный способ для развития у учеников интереса к изучению математики. Нынешние студенты не испытывают энтузиазма от чтения сухих текстов и традиционных математических доказательств.

Им гораздо интереснее погрузиться в среду и выполнять эксперименты с помощью Geometer's Sketchpad. Так что это новое программное обеспечение в умелых руках может стать динамичным и эффективным средством обучения. Оно пользуется успехом на рынке. Целые страны, недавно например Таиланд, покупают лицензии на пользование Geometer's Sketchpad.

8.2 СИСТЕМЫ КОМПЬЮТЕРНОЙ АЛГЕБРЫ

Тридцать пять лет назад развилось очень интересное новшество в математической инфраструктуре — *системы компьютерной алгебры* (computer algebra systems, CAS), также известное как *системы манипуляции символами* (symbol manipulation systems, SMS). В первые дни своего существования компьютеры были устройствами для работы с числами. Пользователи вводили обширные массивы числовых данных, и машина в ответ тоже выдавала обширные массивы числовых данных. Особенность систем компьютерной алгебры как раз в том, что машина может заниматься математикой по существу. Может решать системы алгебраических уравнений, находить корни многочленов или других функций, строить графики сложных функций одной или нескольких переменных, решать дифференциальные уравнения, вычислять производные и интегралы, выполнять статистические вычисления, моделировать и выполнять другие действия. На сегодняшний день существует множество продуктов, и коммерческих, и свободно распространяемых, которым доступны разнообразные действия систем компьютерной алгебры. Некоторые из них представляют собой программное обеспечение, специально созданное для выполнения самых разных математических действий. Другие заточены на определенные коллекции операций, скажем для работы с алгеброй, или со статистикой, или с геометрией.

Программу Macsyma, которую с 1967 по 1982 г. разрабатывали в MIT Уильям Мартин, Карл Энгельман и Джоэль Мозес, можно назвать революционной, поскольку это был первый многофункциональный пакет *манипулирования символами*. Macsyma позволяла выполнять *алгебраические операции*. Macsyma умела решать системы уравнений, вычислять интегралы, обращать матрицы, решать дифференциальные уравнения, находить собственные значения и многие другие действия, работая в основном с *символами*, а не с числами.

К слабым сторонам Macsyma нужно отнести то, что она могла работать только на очень мощном компьютере, и язык ее программирования по сути был языком искусственного интеллекта. Программировать на

Macsyma было сложно. Но на протяжении многих лет ничего подобного не существовало. Например, найти собственные значения матрицы 20×20 вручную крайне сложно. Macsyma справлялась с этой задачей в мгновение ока. Практически невозможно решить систему десяти обыкновенных дифференциальных уравнений с десятью переменными вручную; для Macsyma же в этом нет ничего сложного. Хотя в наше время существует много программных продуктов, превзошедших Macsyma, от нее осталось наследие в виде подпрограмм; например, для изучения вопросов общей теории относительности. Так что Macsyma все еще используется.

В начале 1980-х гг. природа манипуляций с символами существенно изменилась. Лауреат стипендии Мак-Артура Стивен Вольфрам разработал новый пакет под названием Mathematica. У этого продукта много преимуществ перед Macsyma:

- Mathematica может запускаться на персональном компьютере[1)], например на PC или Macintosh.
- У Mathematica прозрачный и интуитивно ясный синтаксис. Человек с математической подготовкой может программировать на Mathematica без затруднений.
- Mathematica — очень быстрая программа. Она может с высокой скоростью выполнять вычисления с любой точностью.
- Mathematica блестяще строит графики функций одной или двух переменных. Пользователь просто вводит формулу, неважно, насколько сложную, и через считанные секунды видит график. На него можно смотреть с любой точки и его можно вращать в пространстве (Macsyma, по крайней мере ее первые воплощения, вовсе не умела строить графики. В последних версиях появился дополнительный функционал[2)]).
- Mathematica виртуозно отображает данные.

Стивен Вольфрам довольно агрессивно продвигал свой новый продукт на рынке, но на самом деле большой нужды в этом не было (см. также разд. 7.2). Если когда-либо существовал новый продукт, который показывал нам то, что раньше мы не видали, который считал то, о чем раньше мы и не мечтали, — то это Mathematica. Он был и остается довольно дорогим, и политика лицензирования компании Wolfram Research (которая производит пакет Mathematica) накладывает много ограничений. Однако

[1)]Последние версии Macsyma тоже.

[2)]Вольфрам сделал несколько миллионов на продажах Mathematica. По его словам, самые крупные его клиенты — бизнес-школы, и как раз потому, что они очень высоко ценят графические возможности программы.

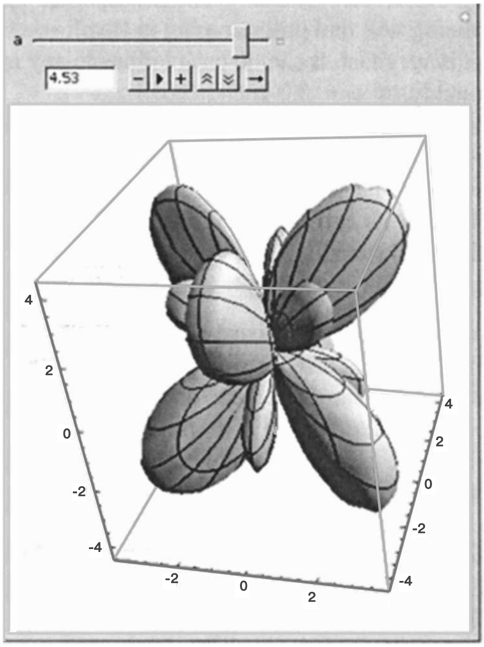


Рис. 8.1. График, созданный в пакете Mathematica

Mathematica продается как горячие пирожки. На рис. 8.1 изображен пример графика, построенного в этом пакете.

Некоторым продуктам удается успешно конкурировать с Mathematica. Среди них — Maple от Waterloo и MATLAB компании MathWorks. Каждый из них в чем-то отличен от Mathematica. Например, многие предпочитают синтаксис Maple синтаксису Mathematica. Кроме того, Maple считается более надежной программой и предлагает некоторые функции, которых нет у Mathematica. Инженеры предпочитают MATLAB, поскольку эта программа лучше приспособлена для работы с числами, чем другие. Кроме того, MATLAB содержит в себе ядро Maple! А поэтому обладает некоторыми привлекательными чертами Maple.

К тому же программа MATLAB особенно удобна в работе с комплексными числами, а Maple и Mathematica здесь подкачали. Как-то стало модно называть все эти программные пакеты «системами компьютерной алгебры». Но на самом деле их функции шире.

Появились замечательные продукты, которые представляют собой *надстройки* над этими системами компьютерной алгебры. Например, Scientific WorkPlace компании Makichan Software — очень продвинутый текстовый редактор. Он специально заточен для работы с математическими документами. Представьте себе, что вы пишете учебник с помощью Scientific WorkPlace. Вы приводите какой-то пример. Оказывается, что у Scientific WorkPlace ядро пакета Maple, и он может проработать для вас этот пример! Это превосходный инструмент для проверки аккуратности ваших выкладок! И к тому же он очень удобен для авторов и других работающих математиков.

Мы дадим очень краткое описание некоторых других систем компьютерной алгебры в виде таблицы. Она дает представление о том, как разворачивалось во времени создание этих продуктов, и о том, насколько они разнообразны. Мы не пытаемся рассказывать о цене, доступности или лицензировании. К тому же список этот не полон; однако он дает представительную выборку продуктов, появившихся на свет. Прекрасный ресурс для их сравнения — сайт http://en.wikipedia.org/wiki/Comparison-of-computer-algebra-systems.

Хронологический список систем компьютерной алгебры

Продукт	Цель	Дата выпуска
Schoonship	физика частиц	1963
Macsyma	широкого назначения	1968
Reduce	широкого назначения	1968
bergman	алгебра	1972
SAS	статистика	1976
MuMATH	широкого назначения	1980
MATLAB	широкого назначения	1984
Maple	широкого назначения	1985
MathCad	широкого назначения	1985
Derive	широкого назначения	1988
PART/GP	теория чисел, произвольная точность	1985
MicroMath	подгонка кривых, анализ данных	1985
GAP	дискретная вычислительная алгебра	1986
Mathematica	широкого назначения	1988
MuPAD	широкого назначения	1992
MAGMA	алгебра, теория чисел	1993
GeomView	геометрия	1996
Macaulay	алгебраическая геометрия, коммутативная алгебра	2002
SAGE	широкого назначения	2005

В наши дни многие математики держат системы компьютерной алгебры под рукой, загруженными и доступными. С их помощью выполняют вычисления, проводят эксперименты «а что если?», строят графики функций, чтобы лучше представлять их поведение. С такими системами можно получить весьма точный график функции двух переменных буквально за пару секунд. Чтобы выстроить его вручную, потребовались бы часы работы, и все равно точность оставляла бы желать лучшего.

С помощью Mathematica Notebook преподаватели могут составлять обучающие задания для использования на занятиях, при этом учащиеся получают доступ к вычислительной мощности пакета без изучения технического компьютерного языка. Интерфейс Notebook требует от пользователя только знания английского языка и владения мышью. Аналогичным функционалом снабжен и пакет Maple.

Из всего сказанного не следует делать вывод, что описанная деятельность в какой-то мере заменяет математическое доказательство. Но она оказывает *неоценимую помощь в его поисках*. Новые озарения, идеи и перспективы возникают при изучении результатов вычислений или графиков. Многие новые диссертации основаны на результатах работы систем компьютерной алгебры. Вычисления в статьях [CHE1], [CHE2], хотя и проведенные вручную, все равно опираются на работу такой системы. Оглядываясь назад, можно заключить, что системы компьютерной алгебры показывают нам, что происходит, и помогают замечать закономерности. После этого можно двигаться дальше, проводить выкладки и доказывать теоремы, придерживаясь более традиционного пути.

Очень поучительно поразмышлять над тем, что могут нам дать компьютерные вычисления. Рассмотрим тождество

$$\frac{24}{7\sqrt{7}}\int_{\pi/3}^{\pi/2}\log\left|\frac{\operatorname{tg} t+\sqrt{7}}{\operatorname{tg} t-\sqrt{7}}\right|dt =$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{(7n+1)^2}+\frac{1}{(7n+2)^2}-\frac{1}{(7n+3)^2}+\frac{1}{(7n+4)^2}-\frac{1}{(7n+5)^2}-\frac{1}{(7n+6)^2}\right].$$

Доказательства этого тождества не существует. Но оно было проверено в Вирджинском политехническом университете с точностью до 20 000 знаков за 45 минут работы компьютера с параллельной обработкой данных на 1024 процессорах. Какой вывод отсюда можно сделать? Что это тождество, вероятно, верное? Что оно очень похоже на верное? Что оно может быть верным? Или никакого вывода сделать нельзя? Подробное обсуждение этого вопроса можно найти в работе [BBCGLM].

Это дивный новый мир, не открывшийся Гауссу или Евклиду, ни даже фон Нейману. Компьютер может дать убежденность в истинности факта. Но убежденность — не доказательство.

8.3 ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ

Мы уже обсуждали идею численного анализа, когда рассказывали о методе Ньютона в разд. 5.5. Философская подоплека в том, что есть много задач, которые ставит перед нами действительность, для которых мы не можем найти точное решение в замкнутой форме. Вот один только пример: дифференциальные уравнения, которые описывают аэродинамический профиль, слишком сложны, чтобы их можно было решить. Однако мы вполне успешно умеем строить крылья самолетов. Как же это удается? Математики и инженеры комбинируют искусные догадки с численным анализом — это такой особый способ научного приближения.

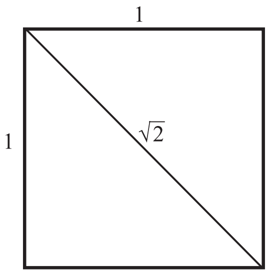


Рис. 8.2. Приближение числа $\sqrt{2}$

Представьте себе, например, что мы хотим вычислить квадратный корень из 2. Это иррациональное число (см. разд. 2.3). Значит, представляющая его десятичная дробь бесконечна и непериодична. Значение $\sqrt{2}$ нам интересно потому, что это длина диагонали квадрата с единичной стороной (см. рис. 8.2). Но мы не можем записать это значение в виде точной десятичной дроби. Мы можем записать только приближение. И действительно, с точностью до одиннадцати знаков после запятой

$$\sqrt{2} = 1,41421356237\ldots \tag{8.1}$$

Для многих целей такая точность вполне удовлетворительна. В конце концов, это значение от искомого отличается не более чем на 10^{-10}. При разработке микрочипов, расчете траектории ракеты или решении еще какой-нибудь задачи может потребоваться более высокая точность. Тогда можно продолжить запись:

$$\sqrt{2} = 1,4142135623730950488016887\ldots \tag{8.2}$$

Здесь выписаны 25 верных цифр после запятой. Отметим, что один из способов выполнить такие вычисления — применить метод Ньютона (см. разд. 5.5) к функции $x^2 - 2$, выбрав начальное приближение $x_1 = 1$. После 6 итераций получится приближение (8.2). При желании можно получить еще больше цифр в десятичной записи $\sqrt{2}$:

$$\sqrt{2} = 1,4142135623730950488016887242096980785 6\ldots$$

Но для практических целей вполне достаточно приближений (8.1) или (8.2).

Численный анализ — систематическая наука о научных приближениях такого типа. Корни этой области знаний уходят к методу Ньютона, но

Численный анализ

В школе мы все прониклись идеей решения математических задач. Но нас учили решать их *точно*. Учитель задавал задачу, и требовалось получить ее ответ, скорее всего, в виде определенного *числа*. Математические задачи, к которым приводят современные технологии, намного сложнее школьных. У них не всегда есть решение; по крайней мере, не всегда есть решение, которое мы умеем находить. Скажем, никто не умеет решать дифференциальные уравнения, описывающие форму самолетного крыла. Крылья моделируют, комбинируя (1) процедуры пошагового приближения, (2) экспериментирование и (3) догадку. То же самое можно сказать о моделировании автомобильных кузовов или человеческого сердца.

Численный анализ — набор методов, многие из которых выросли из метода Ньютона трехсотлетней давности, предназначенных для отыскания приближенных решений задач анализа. Вообще говоря, точность этих решений можно надежно измерить, так что на практике они вполне значимы и полезны.

сегодня она развилась и расширилась до сложного набора компьютерных методов. Численный анализ используется в инженерных и многих других прикладных науках.

8.4 КОМПЬЮТЕРНЫЕ ИЗОБРАЖЕНИЯ И ВИЗУАЛИЗАЦИЯ ДОКАЗАТЕЛЬСТВ

Одно из поразительных достоинств высокоскоростных компьютеров заключается в том, что они позволяют нам видеть вещи, которых раньше мы себе не могли и вообразить. Мы можем изображать сложные трехмерные наборы данных, строить графики сложных функций и использовать графику для новых способов представления данных. Простой пример — недавняя работа автора этой книги и реконструктивного хирурга Мишеля Седара, создавших программное обеспечение, которое разбивает изображение лица на части, отражающие тонкую геометрическую структуру его поверхности; это позволяет пластическому хирургу видеть анализируемый объект (лицо пациента) в новом свете и более эффективно планировать медицинские процедуры.

В наше время моделирование кузовов автомобилей, корпусов судов и многие другие конструкторские задачи выполняются на экране компьютера (в отличие от совсем недавнего прошлого, когда для этого прибегали к моделям из глины). Дизайн приборов, анализ разрушения, износ материалов, и много других важных направлений прикладных наук изучаются и анализируются на экране компьютера, *поскольку компьютер позволяет* *нам видеть все яснее, подробнее и в новом свете*. К тому же компьютеры позволяют проводить вычисления и моделирование в реальном времени, так что мы можем адекватно оценивать то, что видим.

Пример практического воплощения этих идей — программное обеспечение SLIP, предназначенное для дизайна автомобильных кузовов и разработанное командой математиков и инженеров из корпорации Volvo под руководством математика Бьорна Дальберга из Вашингтонского университета. Оно произвело революцию в своей отрасли. Традиционно кузова разрабатывались так: художники и дизайнеры обсуждали макет нового автомобиля, рисовали различные наброски, пробовали разные цветовые решения — и все на бумаге. На основе этого создавалась глиняная модель автомобиля. На этом этапе в работу включались инженеры, они изучали новый дизайн и критиковали его: а где здесь разместится мотор? Хватит ли места пассажирам? Что с требованиями безопасности? А с аэродинамикой? И так далее. Такого рода комментарии передавались художникам и дизайнерам. Они вновь принимались за наброски, создавали новую глиняную модель, ее передавали инженерам…Эти этапы повторялись много раз, пока не удавалось создать приемлемую модель. Работа требовала тысячи человеко-часов и занимала много месяцев. В начале 1980-х годов в концерне Volvo решили, что этот процесс пора модернизировать и автоматизировать. Компания привлекла для решения задачи своих инженеров. Для них она оказалась слишком сложной; продвинуться они не смогли.

Бьорн Дальберг — швед по национальности — был блестящим математиком-теоретиком, *лауреатом престижной премии Салема* в области гармонического анализа. Он всерьез занялся задачей дизайна автомобилей. Он применил изощренные методы из теории дифференциальных уравнений, дифференциальной геометрии, линейного программирования, теории выпуклых поверхностей, гармонического анализа, теории действительного переменного и других областей математики, чтобы создать мощнейшую программу SLIP, которая теперь постоянно используется в Volvo для разработки дизайна новых автомобилей. Ключевая идея SLIP в том, что автомобильный кузов — это объединение выпуклых поверхностей. Пользователь вводит данные — набор точек, через которые поверхность будет проходить (хотя бы приблизительно), уточняет критерии сопротивления воздуха, отражения света и другие, а затем SLIP проводит тщательные вычисления и создает поверхность — и графически, и аналитически. В этом и заключается революция SLIP в области дизайна автомобилей.

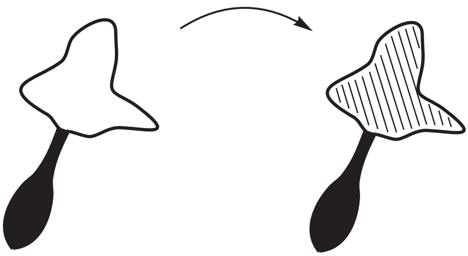


Рис. 8.3. Мыльная пленка

Помимо этого, компьютерная визуализация может быть важным средством доказательства. Хоффман, Хоффман и Миикс [ннм] и их геометрическая группа GANG (Geometry Analysis Numerics Graphics — геометрия, анализ, числа, графика) изучали минимальные поверхности, вложенные в трехмерное пространство. Под минимальной поверхностью здесь понимается (локально) поверхность наименьшей площади. Классический способ получить минимальную поверхность — придать проволоке нужную форму и окунуть ее в мыльный раствор. Получившаяся мыльная пленка (ее форма предсказывается и описывается, по крайней мере в принципе, дифференциальными уравнениями минимальной поверхности) и есть минимальная поверхность (см. рис. 8.3). Если проволока изогнута в виде окружности, то получается минимальная поверхность в форме круга.

Если же форма проволоки более экзотична, то минимальная поверхность будет более сложной двумерной областью.

Вначале, пользуясь методами численного анализа, Хоффман, Хоффман и Миикс генерировали графические примеры, а затем проанализировали их и обнаружили различные закономерности и взаимосвязи. После этого исследователям удалось сформулировать традиционную теорему и представить традиционное ее доказательство. Замечательно то, что компьютер позволил им *увидеть вещи*, которые раньше были недоступны. Он позволил визуализировать некоторые важные примеры, указавшие направление исследований. После этого, вдохновившись новым пониманием и прозрением, ученые смогли записать теорему и доказать ее. На рис. 8.4

Дифференциальная геометрия

Классическая (евклидова) геометрия имеет дело с кругами, треугольниками, квадратами и другими плоскими фигурами. А наш мир трехмерен и формы населяющих его поверхностей и тел ошеломительно разнообразны. *Дифференциальная геометрия* — предмет, созданный Карлом Фридрихом Гауссом и Бернхардом Риманом — предоставляет аналитические инструменты для понимания форм таких объектов. Дифференциальная геометрия Римана стала ключевым элементом для Альберта Эйнштейна, когда он создавал общую теорию относительности. В наши дни дифференциальная геометрия используется во всех областях космологии и математической физике.

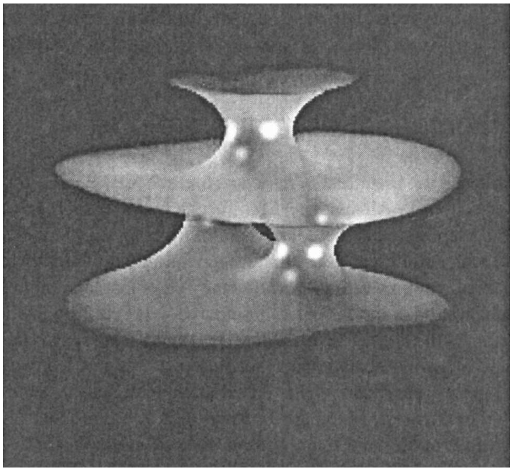


Рис. 8.4. Минимальная поверхность

изображена минимальная поверхность, которую эти три математика помогли нам открыть и понять.

Идея использовать компьютер для развития техники визуализации сравнительно нова. Вычисления, требующиеся для компьютерной графики, «дороги» в том смысле, что требуют мощных процессоров, значительных ресурсов памяти и много места на жестком диске, не говоря уже о времени работы компьютера. Еще 25 лет назад приходилось полагаться на милость университетских компьютерных подразделений. Была значительная конкуренция между компьютерными специалистами, инженерами и другими пользователями за кусочек машинного времени (а в последующие годы за персональный компьютер). Некоторые математики приобретали привычку приходить на работу очень поздно, иногда за полночь, чтобы получить возможность поработать. Теперь наши персональные компьютеры работают не медленнее ранних суперкомпьютеров. Мой ноутбук *гораздо* шустрее, чем Cray I, — знаменитая машина, которую производил Сеймур Крэй в конце 1960-х и начале 1970-х гг. Его скорость гораздо больше 100 Mflop/s. Такие мощные машины стали относительно доступны и недороги совсем недавно.

8.5 КОММУНИКАЦИЯ В МИРЕ МАТЕМАТИКИ

В античном мире у великих математиков были школы. Например у Евклида была большая и влиятельная школа в Александрии. Была школа у Архимеда. Таким образом выдающиеся ученые могли распространять свои идеи, а также обучать молодых людей и получать от них помощь в работе.

Однако в целом коммуникации между математиками было не так много. Путешествовать было сложно, почта была неразвита. Во многих смыслах математики работали в изоляции. Крайний пример такого недостатка коммуникации — древние китайцы познакомились с теоремой Пифагора и другими результатами, которые мы обычно приписываем европейским математикам, на несколько столетий раньше их. Однако этот факт оставался неизвестным до самого последнего времени. Китайцы практиковали изощренную математику, и многие развитые ими направления были неизвестны на Западе. В третьем веке Лиу Ху удалось вписать в окружность 3072-угольник, и таким образом вычислить число π с точностью до 5 знаков после запятой. В пятом веке Цу Чжун-Чих и Цу Кенг-Чих — это отец и сын — смогли вычислить π с точностью до 10 знаков после запятой; подробности их метода утеряны, но до нас дошел их результат, и он верен.

В этой книге мы уже говорили о том, что математики Возрождения старались держать свою работу в секрете. Многие из них работали в изоляции, а не в университетах. Была распространена профессиональная ревность и отсутствовала мотивация публиковать свои идеи или еще как-либо делиться ими. Никого не удивляло, если какой-нибудь ученый объявлял свой результат, но скрывал методы. Некоторые талантливые исследователи, такие как Пьер Ферма, делали это из озорства. Ферма доказывал свои теоремы, а затем с вызовом предлагал доказать их своим коллегам. Некоторые ученые поступали так потому, что не доверяли коллегам. Генри Ольденбург первым высказал идею научного журнала в 1665 г., и она коренным образом изменила стиль научной коммуникации.

В XIX в. она уже процветала, по крайней мере, среди европейских математиков. Вейерштрасс, Коши, Ферма и многие другие вели обширную переписку с учеными других университетов. Многие из их писем дошли до наших дней; читать их очень интересно. Роскошный дом Гёста Миттаг-Леффлера в Дьюрсхольме в Швеции сейчас превращен в математический институт. Здесь регулярно проходят конференции, встречи и многодневные семинары. Особенность этого математического института в том, что он до сих пор во многом выглядит так же, как во времена Миттаг-Леффлера. Сохранилась большая часть мебели, библиотека, альбомы с фотографиями и блокноты для заметок все так же лежат на полках, не тронуты и бумаги в кабинете. На специальной полке в этом кабинете стоят ящик с письмами от Коши, ящик с письмами от Вейерштрасса (он был учителем Миттаг-Леффлера) и много других. Это настоящее сокровище для будущих историков математики.

В XX в. среди математиков привычка к регулярной переписке получила дальнейшее развитие. Но добавилась новая черта. В начале XX в. формальных математических журналов и математических издательств было очень мало. Поэтому было принято рассылать записи и обмениваться ими. Скажем, какой-то профессор прочитал курс лекций в университете, в котором изложил свои новые идеи. И скажем, сложилось общее мнение, что эти идеи ценные, стоит их распространять. Тогда секретарю поручали напечатать записи. Ксерокопирование еще не существовало (хотя *имелись* более примитивные методы копирования). Иногда изготовлялось лишь несколько копий под копирку. Иногда изготовляли матрицы для мимеографа, так что можно было напечатать несколько экземпляров. Часто (хотя и не всегда) можно было получить экземпляр, просто выслав скромную сумму, покрывающую расходы на копирование и пересылку.

Такие записи были одним из важнейших средств коммуникации среди математиков в 1920-х, 1930-х, 1940-х и даже в 1950-х гг. В математической библиотеке Принстонского университета есть специальная комната, где хранится собрание таких записей со всего света. Многие из них бесценны и содержат очень важную информацию, которую больше нигде нельзя найти.

4 октября 1957 г. Советский Союз запустил первый беспилотный спутник. Американцы этого вовсе не ожидали; внезапно они поняли, что отстают в космической гонке и в развитии технологий вообще. Правительство предприняло значительные усилия, чтобы подтолкнуть рост высоких технологий в Америке, в том числе предполагались серьезные сдвиги в образовании. Поэтому в 1960-х гг. американские университеты пережили стремительный рост и развитие. Строились новые кампусы, имеющиеся расширялись с невиданной скоростью. Были и другие проявления. В частности, набрало силу математическое книгоиздание. Как грибы после дождя появлялись новые математические издательства, печатались математические книги, стартовали новые журналы. Некоторые издательства запустили специальные серии лекций, публикуя рукописи, мимеографические копии которых раньше распространялись только частным образом. В этот период математическая коммуникация росла и процветала.

Сегодня с приходом электронной коммуникации опять все изменилось — вероятно, к лучшему. В современном мире вполне принято размещать записки — созданные в соответствии с самыми высокими стандартами с помощью программы TEX(см. разд. 9.3) — на веб-сайтах. Статьи размещаются сразу же, как только они написаны, на специальных серверах препринтов. Это специальные сайты, на которые пользователь с легкостью загружает свои tex-, dvi- или pdf-файлы и обнародует их для всего света. Кроме того, конечный пользователь может скачать эти статьи, распечатать, редактировать или еще что-то с ними делать: переслать кому-то, поделиться с коллегами, сократить и скомбинировать их с другими документами (последнее не поощряется).

Кроме того, математики могут отправлять свои статьи отдельным коллегам напрямую, пользуясь электронной почтой. Она используется в научной коммуникации двояко: можно (а) *прикрепить* к письму формально написанную статью и (б) послать замечания или новые идеи в теле письма. Оно может быть вполне неформальным, содержать мнения и даже личные замечания.

Особенность электронной почты в том, что она влияет на *качество* коммуникации. Интенсивность электронной переписки может резко вырасти. Все мы сталкивались с такими случаями, когда вежливый обмен электронными письмами вдруг оживляется, и даже до такой степени, что корреспонденты, кажется, кричат друг на друга по проводам. Неудобство электронной коммуникации в том, что мы не можем смотреть в глаза собеседнику, жестикулировать, не остается места для интерпретаций и для нюансов. Электронная почта слишком жесткая в этом смысле.

И эта ее особенность влияет и на научную коммуникацию. Интересной историей поделился с нами гарвардский математик Артур Джаффе [JAF]; она иллюстрирует сказанное:

> В 1982 г. Саймон Дональдсон, который тогда как раз заканчивал работу над докторской диссертацией в Оксфорде, предложил изучать пространство решений [уравнений поля] Янга—Миллса на 4-мерных многообразиях как способ определять новые инварианты таких многообразий. После первой работы Дональдсона на эту тему в 1983 г. появились буквально сотни статей, целая индустрия методов и результатов, которые привели к изучению родственных задач…
>
> Однажды в 1994 г. все изменилось: Зайберг и Виттен предположили, что возможен более простой подход к решению. Я слышал об этом в заключении работы физического семинара в MIT 6 октября 1994 г.
>
> После этого семинара некоторые участвовавшие в нем математики из Гарварда и MIT сообщили эту идею своим друзьям в Оксфорде, Калифорнии и в других местах. Отклики пошли как лавина. Математики в разных университетах услышали весть и потеряли сон. Они передоказывали главные теоремы Дональдсона и устанавливали новые результаты денно и нощно. Работа двигалась, появились истории про то, как молодые математики, страшась за свою карьеру, не спали ночами, чтобы объявить свои самые свежие

> результаты электронно, возможно часом или даже минутами раньше конкурентов из других университетов. Это была гонка авторитетов, в которой сон и здоровье были принесены в жертву, чтобы остаться вровень с лавиной все новых результатов. Десятилетняя теория Дональдсона была переписана, перепроверена и обобщена в последние три недели октября 1994 г.

Электронная коммуникация — почта и Интернет — поразительно и глубоко изменила развитие математики. Изменилась природа нашего общения. Статьи, рассылаемые по почте или загружаемые на серверы препринтов, не публикуются традиционным способом[1]. Они не аннотируются и не проверяются. Нет никакого фильтра на уместность или корректность. Никто не проверяет их на отсутствие плагиата или наличие клеветы и наветов[2]. Есть только недифференцированный поток информации и псевдоинформации.

А конечный пользователь должен как-то определить, что стоит читать, а что нет. Традиционный уважаемый журнал проводит серьезную фильтрацию. В его собственных интересах поддерживать высокие стандарты и публиковать только лучшие работы. Именно поэтому у таких журналов есть преданные читатели, которые готовы платить довольно высокую цену за современные научные журналы[3]. Ученый в поисках литературы скорее всего будет тянуться к именам, которые ему известны и которым он доверяет. Довольно легко с помощью Google найти отдельного автора или его работы. Они могут быть загружены на его личный веб-сайт или на сервер препринтов, откуда их несложно скачать и распечатать. Но такая система не лучшим образом подходит для *новичков*. Начинающий математик или другой ученый может не быть широко известен, так что вряд ли какой-либо зубр из Гарварда будет проводить компьютерный поиск его работ.

Для многих математиков размещение работы в Интернет заменило работу с традиционными издателями традиционных журналов. Когда вы размещаете работу в Интернете, нет нужды иметь дело с *надутыми* редакторами и *самоуверенными* референтами. Вы просто размещаете ее и продолжаете заниматься своими делами. Вы получаете отклики от заинтересованных читателей, но они будут в основном доброжелательными и благоприятными. Главное в том, что Интернет великолепно справляется с широким распространением работы, и делает это практически

[1] Позднее они могут быть опубликованы в реферативном журнале, но не сразу.

[2] Для проверки на плагиат можно использовать Google, и преподаватели часто так и делают.

[3] Цена может составлять 500 или 1000 долларов за год или даже гораздо выше. Один научный журнал о мозге стоит 23 000 долларов в год.

бесплатно. Он не вполне годится для архивирования, так как никто не знает, как архивировать электронные медиа. Каждая копия электронного продукта неустойчива. Пятна на солнце, космические лучи или электромагнитный шторм могут в мгновение ока стереть все данные на Земле. Новый вирус может одновременно разрушить 95% компьютеров в мире. Сайты-зеркала, резервные копии, модифицированный протокол ханойской башни и другие приемы могут в какой-то мере обезопасить наши электронные медиа. Но сделать предстоит еще очень много. Любой экземпляр бумажного журнала более устойчив. Напечатайте тысячу экземпляров нового выпуска и разошлите их по библиотекам всего мира, тогда вы в какой то мере будете уверены, что хотя бы несколько штук сохранятся в течение сотен лет.

Хотя существуют электронные журналы, ведущие обозрение и реферирование в традиционной манере и в соответствии с высокими стандартами, они в меньшинстве. Многие электронные журналы свободны для всех — а отсюда ожидаемые следствия и побочные эффекты. У бумажных журналов тоже есть побочные эффекты. Редакторы и референты перегружены работой. Статей слишком много[1)]. Электронное распространение научных работ поднимает ряд важных вопросов. Для составления их перечня мы воспользовались работой Артура Джаффе [JAF] (полезную информацию можно почерпнуть также в книге [KRA3]):

- Как можно поддерживать стандарты качества, когда объем публикаций теоретически неограничен? Например, как можно продолжать гарантировать серьезное реферирование несмотря на то, что объем растет очень быстро благодаря распространению текстовых редакторов? Это явление вот-вот затопит существующую систему. На самом деле публикаций так много, что тщательное реферирование сложно встретить уже сейчас.
- Как можно организовать публикации так, чтобы можно было найти нужную? Обычный интернет-серфинг иллюстрирует эту проблему.
- Как можно устанавливать приоритет идей и присваивать рейтинг? Этот вопрос усложняется не только объемами, но и еще различными версиями одной и той же работы. Возможность интерактивных комментариев еще больше все запутывает. Не будут ли некоторые авторы

[1)] Журнал Math Reviews Американского математического общества, который архивирует и реферирует большинство новых математических статей, рассматривает более 75 000 статей в год.

впадать в секретность, чтобы гарантировать себе приоритет? Не будут ли другие преувеличивать свои утверждения? Не потеряется ли часть работы потому, что в свое время была не в моде?

- Как не допустить повальных поветрий на публикации об ошеломительных прорывах в долгосрочных исследованиях? В какой мере частота цитирования может быть принята за признак успеха?
- Как можно архивировать нашу работу? Иначе говоря, как можно гарантировать доступ к сегодняшним публикациям через 5, 10, 30 или 100, или 300 лет? Библиотеки научились жить с бумагой, и слово записанное обычно можно прочитать. Однако технологии быстро развиваются. Форматы, языки и операционные системы изменяются. В Американском математическом обществе хранится целая комната компьютерных пленок 10-летней давности, которыми нельзя пользоваться из-за того, что операционная система изменилась. Можно ли гарантировать, что математическая культура не исчезнет из-за таких изменений в программном обеспечении, медиа или других технологиях, которые сделают слишком дорогим доступ к некоторым старым работам?

Глава 9

СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЖИЗНЬ

Математик — это машина по переработке кофе в теоремы.

— Пол Эрдёш

Мы горевать о том не станем,
Мы силу обретем в том, что осталось позади.

— Уильям Вордсворт

Воспитание — это повторение цивилизации в миниатюре.

— Герберт Спенсер

Большинство ...исследований в первобытном лесу математики остаются изолированными иллюстрациями. Эвристические соглашения, рисунки и диаграммы из одной области мало связаны с другой. В каждой области недоказанные результаты размножаются, но остаются гипотезами, устойчивыми представлениями или просто курьезами, которые распространяются по Интернету как фольклор.

— Дж. Борвейн, П. Борвейн, Р. Гиргенсон, С. Парнс

Правда — это ложь, и все наши пророки в тюрьме.

— Мэнсон Чарльз

Можно сказать, что ныне достигнута абсолютная строгость.

— Анри Пуанкаре

9.1 МИР, В КОТОРОМ МЫ ЖИВЕМ

За двести лет до появления этой книги типичный математик был увлеченным, независимым, во многих отношениях самодостаточным одиноким волком. Академических должностей было мало, грантов (ни государственных, ни иных) не существовало. Если математику везло, то он мог найти покровителя, который поддерживал его в финансовом и других отношениях. У Эйлера и Декарта такие покровители были. У Галуа и Римана — нет. Сегодня математическая жизнь совсем не такая. В мире тысячи колледжей и университетов, в одних только США больше 4100. Математиков приглашают на работу многие государственные агентства и лаборатории, а также частные фирмы — от General Electric до Microsoft и Aerospace Corporation. Некоторые математики работают консультантами, и очень многие работают в издательском мире.

В наше время математическая жизнь предстает перед нами в самых разных аспектах. Некоторые математики, особенно университетские, изучают математические теории и доказывают теоремы. Другие, особенно (но не исключительно) те, что заняты в производстве, разрабатывают приложения математики. Некоторые создают компьютерные продукты, основанные на математических идеях. Другие работают в финансовом секторе, занимаясь финансовыми прогнозами и разрабатывая инвестиционные стратегии. Некоторые работают в страховании, составляя таблицы смертности и создавая планы пенсионного обеспечения.

Математик может быть (финансово) поддержан университетом или колледжем, государственным агентством, коммерческим нанимателем, грантодателем, финансовым бенефициаром; эти источники могут комбинироваться. Большинство математиков хорошо зарабатывают, а некоторые даже очень хорошо.

Некоторые математики оказывали техническое консультирование для фильма A Beautiful Mind и для телешоу Numbers, а другие работали с Pixar и другими высокотехнологичными фирмами, создавая спецэффекты для Голливуда.

В старину математика была кустарным производством. Сейчас она — жизненно важная часть нашей действительности, вплетенная в каждый аспект человеческого существования. Математическая жизнь — это тяжелый труд, но он рождает удовлетворение и смысл. Математическая жизнь имеет много аспектов и предлагает много возможностей.

9.2 МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИНСТИТУТЫ

Большинство математических институтов финансируются из государственных источников. Французский математический институт в Бюр-сюр-Иветт и Люмини, Английский институт Исаака Ньютона в Кембридже, Канадская международная исследовательская станция в Банфе, знаменитый Бразильский институт IMPA (Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada), Немецкий математический научно-исследовательский институт в Обервольфахе, — все они содержатся на государственные деньги. В США восемь федеральных математических институтов. Но в США есть и частно финансируемые математические институты.

Первый частный математический институт был основан в 1930-х гг. Луисом Бамбергером, владельцем сети магазинов Бамбергера. Работая с выдающимся академиком Авраамом Флекснером, Бамбергер вдохновился идеей создать «Институт бесполезного знания». Так родился Институт перспективных исследований в Принстоне, Нью Джерси. Расположенный в Фульд Холл на заповедных землях, этот институт — настоящий рай для очень продвинутых исследований в математике, астрофизике, истории, социальных науках и других областях. Когда Флекснер с коллегами учреждали Институт перспективных исследований, одной из первых задач для них стал отбор руководства. Его члены работали бы на постоянной основе, получали бы заоблачные зарплаты и разрабатывали бы направления интеллектуального развития страны. Поэтому отбор требовался весьма тщательный. Оказалось, что единственной областью, в которой достигли согласия по кандидатуре, была математика (и математическая физика). С математики и начали, пригласив Альберта Эйнштейна. Это приглашение сразу же придало вес институту. С годами Институт перспективных исследований обзавелся мощным и влиятельным руководством. В нем проходило множество важных конференций и интеллектуальных событий. Это был потрясающий успех в среде научных институтов.

Джон Фрай учился в колледже университета Санта Клара, где и попал под чары математики, во многом благодаря преподавателю Джеральду Б. Александерсону. В колледже Фрай был звездой футбола и другом старшекурсника Брайана Конри. В дальнейшем Фрай стал успешным бизнесменом. Его отцу принадлежала сеть супермаркетов, и однажды он раздал своим детям по одному миллиону долларов, чтобы посмотреть, каких успехов они смогут добиться. Джон Фрай создал очень успешную сеть Fry's Electronics универсальных магазинов электроники. Уже есть 33 таких магазина в четырех штатах; сеть собирается расширяться на всю страну и во всем мире, и состояние Джона Фрая перевалило за миллиард. Несмотря на успех и богатство (или благодаря им), Фрай не переставал интересоваться математикой. Уже много лет он коллекционирует редкие математические книги. В его коллекции есть книга Непера о логарифмах, некоторые из первых книг Эйлера, первое издание Principia Исаака Ньютона с автографом Стивена Хокинга (который в настоящее время занимает кафедру Ньютона в Кембриджском университете).

В 1994 г. Джон Фрай решил основать математический институт (AIM, The American Institute of Mathematics — Американский математический институт), который теперь расположен в Пало Альто, Калифорния, где раньше располагалось руководство Fry's Electronics. Ежегодно институт получает солидное финансирование от Джона Фрая, а также от Федерального национального научного фонда (NSF — National Science Foundation; Принстонский институт перспективных исследований тоже пользуется его поддержкой). Директор AIM — Брайан Конри, старинный друг Фрая по колледжу.

AIM приобрел 1900 акров земли в Морган Хилл (Калифорния, к юго-востоку от Силиконовой Долины), там сейчас строится для него здание. Оно создается по образу и подобию средневековой мавританской крепости, известной как Альгамбра (красный замок); только втрое больше. На том же участке расположено прекрасное поле для гольфа, где Джон Фрай иногда играет со своими друзьями. А еще он нанял двух знаменитых поваров, — раньше они работали в фешенебельном отеле на севере Калифорнии. Сейчас они время от времени готовят для Фрая и его друзей по гольфу, но когда новый институт отстроят, эта парочка будет кормить работающих там математиков.

В семью математических институтов с частным финансированием входит и Математический институт Клэя в Кембридже, Массачусетс. Основанный в 1998 г. на деньги Лэндона Т. Клэя (венчурного капиталиста, прямого потомка Кассиуса Клэя, генерала Гражданской войны между Севером и Югом), этот институт действительно пустил волну. Такое случается, когда в кармане есть 50 миллионов долларов. Институт Клэя сделал одну замечательную вещь — установил «Задачи тысячелетия». Это семь хорошо известных задач, которые считаются самыми выдающимися, важными и трудными нерешенными задачами в математике[1] — вызов математикам XXI века. Между прочим, институт Клэя обещает миллион долларов за решение любой из этих семи задач[2].

Вот список этих семи задач:

- Гипотеза Берча и Свиннетрота—Дайера (алгебраическая геометрия).
- Гипотеза Ходжа (алгебраическая геометрия).
- Уравнения Навье—Стокса (математическая физика, дифференциальные уравнения в частных производных).
- P- и NP-задачи (логика, теоретические компьютерные дисциплины).
- Гипотеза Пуанкаре (топология).
- Гипотеза Римана (аналитическая теория чисел, комплексный анализ).
- Теория Янга—Миллса (математическая физика, дифференциальные уравнения в частных производных).

Институт Клэя принял строгие правила о том, как будут оцениваться предлагаемые решения этих задач. Должны выполняться следующие требования:

> За два года до рассмотрения институтом предложенное решение должно быть опубликовано в одном из реферируемых математических журналов, пользующихся мировым признанием; за эти два года (после публикации) решение должно быть в целом принято математическим сообществом; после

[1] Подробное и заслуживающее доверия обсуждение этих задач можно найти в [CJW], полезно обратиться также к работе [DEV1]. Ситуация напоминает то, что сделал Гильберт в 1900 г. Однако есть два важных отличия. Одно из них заключается в том, что на этот раз список задач составлял целый комитет выдающихся математиков. Другое — в том, что к каждой из этих новых задач прилагается чек в миллион долларов. Только одна задача входит и в список Гильберта, и в список Клэя — это гипотеза Римана.

[2] Одна уже решена Перельманом, отказавшимся от миллиона. — *Прим. перев.*

> этого двухлетнего срока SAB (Scientific Advisory Board — научный совет института Клэя) будет принимать заключение, заслуживает ли решение более подробного рассмотрения.... SAB будет специально изучать вопрос о том, не публиковались ли ранее какие-либо результаты, сыгравшие ключевую роль в рассматриваемом решении. SAB может (хотя не обязан) дать рекомендацию признать эти заслуги в решении задачи, а также может (хотя не обязан) дать рекомендацию включить автора предшествующей работы в список награжденных.

Впервые премия Клэя была присуждена в марте 2010 г. Григорию Перельману за доказательство гипотезы Пуанкаре. Перельман отказался от премии так же, как в 2008 г. отказался от медали Филдса. Перельман не общается с прессой и живет в затворничестве с матерью. В разд. 10.5 мы подробнее расскажем о результате Перельмана[1].

9.3 МАТЕМАТИЧЕСКАЯ КОММУНИКАЦИЯ

Традиционный способ публикации математического исследования — как способ застолбить участок и привлечь внимание к новому важному результату — банален. Делается это так. Вы записываете свои идеи тщательно и подробно, с полными доказательствами от руки на бумаге[2] размером $8\frac{1}{2}$ дюймов $\times 11$ дюймов. Вы несколько раз перечитываете текст, исправляете его, проверяя все детали. Вы особенно заботитесь о том, чтобы список литературы был точным и полным, чтобы отдать должное всем, кто работал в этом направлении до вас. Вы перепроверяете все цитаты и формулировки использованных результатов. Вы изо всех сил стараетесь, чтобы ваши доказательства были неопровержимы как скала.

Когда вы уверены в своей победе, вы печатаете текст. *Когда-то давно* это делалось довольно примитивным способом. На факультете работала секретарша, которая печатала на бумаге все слова, оставляя пробелы (подходящего размера) для математических формул. Эти формулы потом вписывались от руки, обычно самим автором.

---

[1] Традиция предлагать денежное вознаграждение за решение различных математических задач существует уже очень давно. Эндрю Уайлс получил целый ряд премий: the Schock Prize, the Prix Fermat, the Cole Prize, the Wolfskehl Prize и другие почести за доказательство Великой теоремы Ферма. Математик Пол Эрдёш часто предлагал денежные награды за решение своих любимых задач. Хотя он был очень ограничен в средствах, эти вознаграждения он всегда выплачивал.

[2] Если только вы американец. Европейцы пользуются стандартной бумагой ISO A4. Соединенны Штаты — одна из немногих стран, не признающих этот международный стандарт (потому что он основан на метрической системе мер).

Не так давно (с 1961 по 1985 г.) создание математической статьи стало мытарством нового типа. Какая технология была *тогда* доступна типичному математическому факультету для переноса математики на бумагу? В то время только одна: IBM Selectric Typewriter (его изобрел Элион Нойес из компании IBM). Если вы когда-нибудь видели такую машину, то знаете, что у нее не было специальных отдельных печатных деталей с символами, которые последовательно ударяли по странице — именно так были устроены печатные машинки, еще в XX в. IBM Selectric был устроен совсем по-другому. В нем был металлический шар (или *элемент*) диаметром примерно в полтора дюйма, вся поверхность которого была покрыта различными символами. Когда вы нажимали на клавишу, шар быстро вращался, так что нужная металлическая литера поворачивалась к странице, а затем отпечатывалась на ней через специальную чернильную ленту.

На стандартном, принятом по умолчанию, шаре в машинке IBM Selectric имелись обычные буквы алфавита a, b, c, d, …, A, B, C, D, …, цифры 1, 2, 3, …, стандартные типографские символы вроде &, %, # и так далее. Но был и другой шар, на котором располагались буквы греческого алфавита или даже еврейского. И еще один — со знаками интеграла, производной и другими, нужными для математических текстов. И так далее. На одном элементе было 88 символов. Для IBM Selectric существовали различные шрифты, а со временем появились разные размеры шрифтов, пробелов и другие изощренные возможности. Именно с помощью IBM Selectric создавались математические рукописи четверть века назад.

Чтобы использовать такую машину эффективно и успешно, требовались талант и обучение, и конечно же, много практики. Математическая статья, исполненная на IBM Selectric, выглядела профессионально подготовленной и легко читаемой. Но все равно она была *далека* от полиграфического издания. Математические тексты включают сложные сочетания символов различных размеров, например таких:

$$\frac{\int_a^b \dfrac{ax^2+b}{\sin\frac{x}{3}-\operatorname{tg}\frac{x^3}{2}}\,dx}{\ln(e^{2x-x^2}-x^{3^b})} = \frac{\det\begin{pmatrix} x^3 & y-3 & \dfrac{z}{w} & y^z \\ \dfrac{\sin x}{\cos y} & \operatorname{tg} x\cdot x^x & x^3\cdot y^2 & \dfrac{x}{\cos x} \\ \dfrac{y-x}{x-z} & (x-w)\cdot e^{\operatorname{ctg} x} & \cos\left(\dfrac{x}{y}\right) & x^{z^y} \\ x & 0 & y & e^x \end{pmatrix}}{\dfrac{x^3-x}{y^3+y}} = \frac{\dfrac{a}{b}-\dfrac{b^a}{c^d}}{\dfrac{x^3}{y}+\dfrac{y^3}{x}}.$$

А печатная машинка по природе своей приспособлена для *моноширинной* печати. Это означает, что все символы имеют одинаковый размер и ширину и что все пробелы между ними тоже равны. Вертикальные пробелы в машинописи устроены довольно сложно. Поэтому IBM Selectric позволяла подготовить читаемый математический текст, однако его нельзя было назвать божественно прекрасным.

Все изменилось в начале 1980-х гг. Дональд Кнут из Стэнфордского университета изобрел издательскую систему TEX. Эта книга подготовлена в этой системе[1]. Именно в ней набирается большинство математических текстов в наше время. TEX — это язык программирования высокого уровня, как `Fortran` или `Java`. Это *не* текстовый редактор. Когда вы создаете документ в TEXе, то на самом деле даете команду, в каком месте (с точностью до миллионной доли дюйма) и как расположить каждый символ и каждое слово на странице. Есть мнение, что изобретение TEXа — самое важное событие в истории книгопечатания со времен Гутенберга и его печатного пресса.

Чтобы упростить использование TEXа, в 1983 г. Лесли Лампорт создал пакет LATEX. Лампорт разработал полезные макросы, которые делают TEXнические команды, особенно команды форматирования, проще и интуитивно понятнее. Чтобы читатель получил представление о том, как работают TEX и LATEX, рассмотрим пример. Пользователь создает новый файл и с помощью текстового редактора набирает LATEX-код, скажем, такой:

```
***********************************************************
\documentclass{article}

\newfam\msbfam
\font\tenmsb=msbm10 \textfont\msbfam=\tenmsb
\font\sevenmsb=msbm7 \scriptfont\msbfam=\sevenmsb
\font\fivemsb=msbm5 \scriptscriptfont\msbfam=\fivemsb

\def\Bbb{\fam\msbfam \tenmsb}
\def\RR{{\Bbb R}}
\def\CC{{\Bbb C}}
\def\QQ{{\Bbb Q}}
\def\NN{{\Bbb N}}
\def\ZZ{{\Bbb Z}}

\begin{document}
```

[1] И перевод этой книги тоже. — *Прим. перев.*

```
Пусть $f$ --- непрерывная функция, отображающая множество
комплексных чисел $\CC$ на себя. Рассмотрим вспомогательную
функцию
$$
g(z) = \frac{\int_a.b \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z
+ \delta} \, dz}{[\cos z].z \cdot z.{\sin z}} \, .
$$
Тогда
$$
g \circ f (z)
$$
действует естественным образом на банаховом пространстве
непрерывных функций, область определения которых ---
единичный интервал $I$.

\end{document}
```

****

Затем пользователь компилирует этот исходный код, пользуясь стандартным LaTeX-компилятором, который можно купить или скачать из Интернета.

****

Пусть f — непрерывная функция, отображающая множество комплексных чисел $\mathbb{C}$ на себя. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$g(z) = \frac{\int_a^b \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \, dz}{[\cos z]^z \cdot z^{\sin z}} \, .$$

Тогда

$$g \circ f(z)$$

действует естественным образом на банаховом пространстве непрерывных функций, область определения которых — единичный интервал I.

****

Пользователь может вывести этот результат на экран или распечатать на принтере, отправить по факсу или электронной почте, вывести в pdf-файл или ps-файл, или еще что-нибудь с ним сделать. TeX — мощное и гибкое орудие, которое вошло в жизнь каждого математика.

В наши дни большинство математиков умеют им пользоваться и набирают свои статьи именно в TeXe. Поэтому большинство математических статей выполнены на высоком полиграфическом уровне, как они могли бы выглядеть в книге. Математические символы нужного размера и стиля располагаются в нужном месте, как в первоклассной математической монографии. Это открывает много возможностей.

Статью, подготовленную в TEXe, легко экспортировать в PostScript или формат, доступный программе Acrobat (такой как *.pdf). Такой файл уже легко и удобно размещать в Интернете. Все математические формулы, весь текст, все рисунки и графики в статьях в формате pdf будут выглядеть так же, как в бумажной статье или в книге. Поэтому очень многие математики решают распространять свои работы именно в таком виде, как только завершают их. Для этого и существуют сервисы электронных препринтов. Сервер препринтов — это компьютер, подключенный к сети Интернет, который служит форумом для математических работ. На нем архивируются тысячи статей в привлекательном и доступном виде, а конечный пользователь может выбрать формат каждой статьи, в котором сохраняются все математические обозначения, весь текст, все рисунки и формулы.

Сервер препринтов — это центр обмена информацией для новой математической работы. Он делает доступными плоды нашего труда каждому, у которого есть доступ в Интернет. Нет ничего лучше для быстрого и бесплатного распространения новых научных идей.

Однако следует подчеркнуть, что на серверах препринтов *нет никаких ограничений* на загружаемые туда работы. Нет реферирования и предпросмотра. Так и должно быть. Люди, организующие работу сервера, не несут никакой ответственности за загружаемые туда работы (а вот если бы они вели реферирование, это *накладывало бы* на них определенную юридическую и моральную ответственность). Более того, это даже желательно, чтобы сервер препринтов работал без человеческого вмешательства. У каждого должно быть право и возможность разместить на сервере статью без помощи или вмешательства тех, кто организует работу сервера.

Самый выдающийся, влиятельный и важный сервер математических препринтов в наши дни — `arXiv`. Запущенный в Лос-Аламосе Паулем Гинспаргом (несмотря на возражения и отсутствие поддержки начальства) этот сервер сначала был предназначен для небольших статей по физике высоких энергий, а сейчас превратился в большое хранилище, которое содержит среди других направлений физику и математику. На `arXiv` каждому желающему доступны десятки тысяч статей для бесплатного и удобного скачивания. И каждый день число их растет лавинообразно. Гринспаргу присуждена стипендия Мак-Артура за работу по развитию `arXiv`. Тем временем он перевелся в Корнуэлльский университет, где преподает физику. Туда же перебрался `arXiv` — хэппи энд для всех.

Глава 10

ЗА ПРЕДЕЛАМИ КОМПЬЮТЕРОВ: СОЦИОЛОГИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ДОКАЗАТЕЛЬСТВА

Это одна из тех задач [задача Кеплера об упаковке сфер], которая убеждает нас, что мы не столь умны, как нам кажется.

— Дуг Мюдер

Упаковка будет как можно более плотной, так что никаким другим способом нельзя уложить больше шариков в тот же контейнер.

— Иоганн Кеплер

Стало наглядно понятно, насколько доказательство зависит от аудитории. Мы доказываем утверждения в социальном контексте и адресуем их определенной аудитории.

— Уильям Тёрстон

Найдем ли мы на рубеже веков много открытых вопросов, на которые идут в атаку команда исследователей и автоматизированная программа рассуждений, покажет время. Ясно, что предыдущее десятилетие продемонстрировало резкий рост в этом отношении, что иногда приводит к ответам на вопросы, остававшиеся открытыми в течение десятилетий. Таким образом, видно, что программы автоматических рассуждений время от времени делают свой вклад в математику и логику.

— Кит Девлин

Любые истины легко понять, когда они открыты. Сложность в том, чтобы открыть их.

— Галилео Галилей

Математики вроде французов. Когда говоришь с ними, они переводят твои мысли на свой язык и сразу получается что-то совсем другое.

— Иоганн Вольфганг фон Гёте

10.1 КЛАССИФИКАЦИЯ КОНЕЧНЫХ ПРОСТЫХ ГРУПП

Идея группы возникла в начале XIX в. в работах Эвариста Галуа (1812–1832) и Огюстена Луи Коши. Она стала одним из краеугольных камней современной *абстрактной алгебры*. Что же такое группа?

Сама по себе идея чрезвычайно проста. Группа — это множество (или набор объектов) G, снабженное бинарной операцией, которая удовлетворяет трем аксиомам. Давайте посмотрим на математику в действии. Как раз сейчас мы встретили определения и аксиомы.

Что такое «бинарная операция»? Это такой способ скомбинировать два элемента группы G так, чтобы они дали другой элемент этой группы. Например, если мы рассматриваем множество целых чисел, то обычное сложение — бинарная операция. Оно позволяет нам скомбинировать два целых числа так, чтобы получилось третье:

$$2 + 3 = 5.$$

Мы скомбинировали числа 2 и 3, чтобы получилось 5. Умножение — тоже бинарная операция. Вот пример умножения:

$$2 \cdot 3 = 6.$$

Мы скомбинировали 2 и 3 и получилось 6.

Эти два последних примера очень уж бесхитростны. Бывают ли более экзотические примеры бинарных операций? Рассмотрим матрицы размера 2×2. Они умножаются по такому правилу:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\alpha + b\gamma & a\beta + b\delta \\ c\alpha + d\gamma & c\beta + d\delta \end{pmatrix}.$$

Видно, что таким образом комбинация двух матриц 2×2 дает одну матрицу такого же размера.

Так что в группе G задана бинарная операция так, как показано выше; мы будем обозначать ее знаком $\cdot$ (это общепринятое обозначение, даже если в каком-то конкретном случае операция оказывается сложением или умножением или еще каким-нибудь другим способом комбинировать элементы). Перечислим аксиомы, которые управляют поведением бинарной операции:

1. Бинарная операция ассоциативна:
$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c.$$
2. Существует специальный элемент $e \in G$, называемый *единицей группы*, такой, что $e \cdot g = g \cdot e = g$ для каждого $g \in G$.
3. У каждого элемента $g \in G$ существует *обратный элемент* g^{-1} такой, что
$$g \cdot g^{-1} = g^{-1} \cdot g = e.$$

Оказывается, группы возникают во всех областях математики, физики и даже в инженерных науках. Приведем несколько примеров.

- *Целые числа*, снабженные бинарной операцией сложения, образуют группу. Сложение целых чисел ассоциативно: известно, что $a + (b + c) = (a + b) + c$. Единицей (тождественным элементом) здесь является 0, так как $0 + a = a + 0 = a$ для всех целых a. И наконец, для произвольного целого a обратным элементом по сложению является $-a$.

- *Положительные действительные числа* (т. е. все положительные целые, рациональные и иррациональные), снабженные бинарной операцией умножения, образуют группу. В этой ситуации ассоциативность — стандартный арифметический факт. Тождественный элемент — единица, а для любого положительного элемента a обратным элементом по умножению является $\frac{1}{a}$.
- *Матрицы* 2×2 с ненулевым определителем, таким что

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc \neq 0,$$

снабженные бинарной операцией матричного умножения (определенной выше), образуют группу. Ассоциативность матричного умножения — стандартный факт линейной алгебры. Единичным элементом является матрица

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для заданной матрицы A можно вычислить обратную матрицу:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{d}{ad - bc} & \dfrac{-b}{ad - bc} \\ \dfrac{-c}{ad - bc} & \dfrac{a}{ad - bc} \end{pmatrix}.$$

Мы предлагаем читателю выполнить простейшее матричное умножение и убедиться, что

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- *Теория групп* используется для описания ограниченных операторов в гильбертовом пространстве. Согласно глубоким идеям Вернера Гейзенберга (1901–1976), Эрвина Шрёдингера (1887–1961) и Джона фон Неймана, такие операторы можно использовать для объяснения структур квантовой механики.
- Каждый сотовый телефон закодирован копией *чисел Кэли*. Это особая группа, нашедшая применение в математической физике, которая используется для кодирования информации, передаваемой сотовым телефоном.

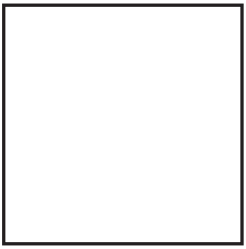


Рис. 10.1. Квадрат

Группы — это универсальные математические объекты, они используются для описания, контроля или анализа большого числа самых разных физических явлений, поэтому задача классификации всех групп представляет большой интерес. Большого успеха в этом направлении удалось добиться в отношении *конечных простых групп*. Конечными называют такие группы, в которых конечное число элементов. Приведем один элементарный пример конечной группы. Рассмотрим многоугольник (скажем, *квадрат*), такой как изображен на рис. 10.1. Он обладает определенными симметриями: мы можем перегнуть его слева направо; сверху вниз; вдоль одной диагонали; вдоль другой диагонали; повернуть его на 90°, 180° или 270°. Набор всех этих симметрий (рис. 10.2) образует группу, в которой бинарной операцией является композиция (последовательное выполнение) операций. Ясно, что в этой группе конечное число элементов.

«Простая группа» — несколько более техническое понятие. Группа называется *простой*, если ее нельзя представить в виде композиции двух других групп. Известна фундаментальная теорема о структуре, гласящая, что *любая* конечная группа состоит из более простых. Так

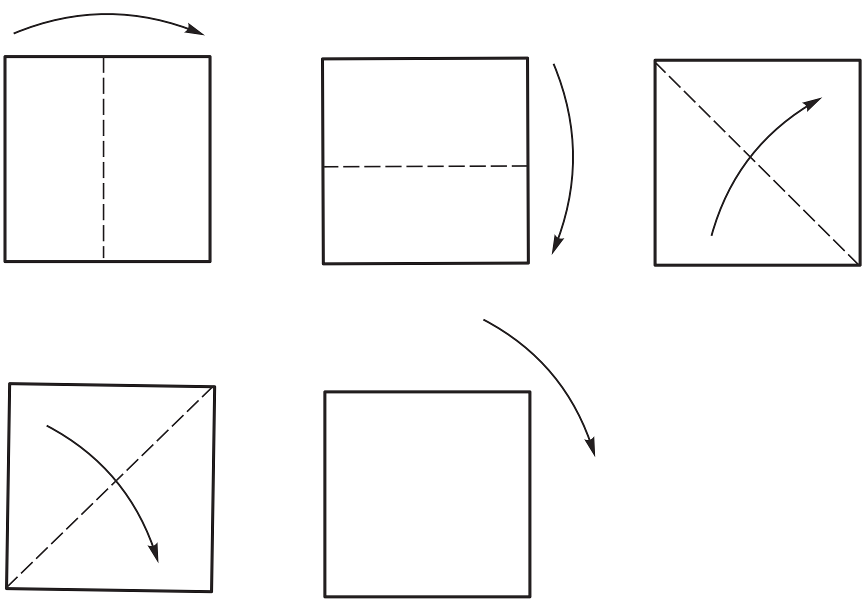


Рис. 10.2. Симметрии квадрата

что в определенном смысле задача классификации всех конечных групп сводится к задаче классификации всех конечных простых групп.

Классификация конечных простых групп — один из величайших триумфов математики XX в. С нашей точки зрения это достижение интересно тем, что соответствующий математический результат невозможно приписать какому-либо одному ученому. Нельзя его назвать работой двух соавторов или небольшой команды, работающей в одном математическом институте. Классификация конечных простых групп следует из целого ряда работ сотен математиков разных стран, и начало этому ряду было положено в середине XIX в.

Классификация конечных простых групп занимает более 10 000 страниц математического текста. Единого опубликованного изложения доказательства не существует[1], хотя в некоторой форме доказательство существует с 1981 г. С тех пор в нем обнаруживались пробелы[2], но все, известные к настоящему моменту, уже восполнены.

Вещь, ближе всего подходящая к «записи» классификации конечных простых групп, — четырехтомная работа «Классификация конечных простых групп» Горенштейна, Лионса и Соломона. Это 2139 страниц сжатых математических рассуждений, которые дают основную идею программы. Однако сам Майкл Ашбахер, ведущий авторитет в этой области, недавно дал оценку, что *полное доказательство* должно занимать более 10 000 страниц. При этом надо не забывать, что имеются в виду 10 000 страниц современного математического арго — сжатого, короткого, оставляющего значительную часть работы читателю.

В начале 1970-х гг. Даниэль Горенштейн (1923–1992) из Ратгерского университета убедил всех, что святой Грааль близок. Он собрал более 100 экспертов в этой области на конференцию и взял на себя труд организовать их в армию, которая бы атаковала значительную часть труда по составлению доказательства. Он подвел итог состоянию дел на тот момент и уточнил, что уже завершено и что еще нужно доделать, и смог убедить коллег восполнить пробелы и доказать результаты, которые

[1] Нечто похожее на изложение классификации конечных простых групп, имевшейся в 1994 г., есть в книге [GLS]. С тех пор доказательство существенно эволюционировало.

[2] В математике бывают пробелы и Пробелы. Самый большой Пробел в программе классификации конечных простых групп — классификация «квазитонких» групп. Эта задача была поставлена перед молодым ассистентом в Университете западного побережья и являлась темой его диссертации. Но оказалось, что в его рассуждении имелись значительные *лакуны*. Они не так давно были восполнены и подчищены экспертами Майклом Ашбахером и Стивеном Смитом (см. [ASM]). Их двухтомник, посвященный вопросам квазитонких групп, содержит 1200 страниц!

никак не поддавались. Он назначил конкретные задачи отдельным людям и командам со всего мира. Процитируем Майкла Ашбахера:

> … Данни Горенштейн начал рассуждать о глобальной стратегии доказательства. Действительно, он привлек внимание к определенным подзадачам, которые казались поддающимися решению, или почти поддающимися; он дал представление о подходах к некоторым подзадачам и о том, как различные модули могут быть скомпонованы в доказательство. Хотя программа время от времени была далека от того, что в конце концов вышло, в других случаях его предвидения были довольно точны. В любом случае, Горенштейн сфокусировался на задаче классификации конечных простых групп, и в процессе его усилия стали более явными. Он в некоторой мере структурировал задачу и по ходу дела постоянно прояснял — что именно уже сделано, и что сделать еще только предстоит. Короче говоря, Горенштейн управлял сообществом теоретиков, занимавшихся конечными простыми группами, и в несколько меньшей степени — построением самого доказательства.

В конце концов, в конце 1970-х гг. наступил момент, когда в программе оставалась последняя дыра. Еще в 1973 г. Бернд Фишер и Роберт Грисс предсказали, что существует «наибольшая» спорадическая простая группа, получившая название *монстр*. Подозревали, что в ней

$$808017424794512875886459904961710757005754368000000000$$

элементов, но никому не удавалось описать эту группу, и даже не было уверенности в ее размере. Ученые вычислили таблицу ее элементов задолго до того, как обнаружили саму группу. Так что было много чего известно об этом монстре, *кроме* того, что он в действительности существует. Группа обладала особой притягательностью, поскольку разложение на простые множители

$$808017424794512875886459904961710757005754368000000000 =$$
$$= 2^{46} \cdot 3^{20} \cdot 5^{9} \cdot 7^{6} \cdot 11^{2} \cdot 13^{3} \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 41 \cdot 47 \cdot 59 \cdot 71$$

выражает атомные веса составляющих одной важной молекулы. В 1980 г. Гриссу удалось построить группу-монстр как автоморфизм алгебры Грисса (фактически группа может быть порождена двумя матрицами размера 196882×196882 над группой из двух элементов, а Джон Хортон Конвей смог упростить и эту конструкцию). Единственность этой особой группы установили Грисс, Майерфранкенфельд и Сегев в 1990 г. Это был последний штрих во всей программе. Классификация конечных простых групп была (в принципе) завершена!

После этого естественным для Даниэля Горенштейна шагом должен был стать ряд публикаций, в которых содержалось бы полное доказательство, начиная с первых шагов XX в. и до самых глубоких идей последнего времени. По оценкам, такая работа заняла бы много томов общим объемом во много тысяч страниц. К настоящему времени эта всеобъемлющая работа по классификации конечных простых групп не завершена.

И даже сейчас эксперты признают, что статус и ценность этого обширного доказательства все еще под сомнением. Эксперт Майкл Ашбахер [ASC] говорит:

> Во-первых доказательство Классификации очень длинное и запутанное. Полагаю, что оно занимает где-то 10 000 страниц в сотнях статей, написанных сотнями математиков. Было бы сложно установить в точности, какие именно статьи в действительности содержат необходимые этапы доказательства; и мне неизвестно ни одной опубликованной его схемы. Это последнее затруднение скоро будет преодолено: сейчас разрабатывается программа с целью тщательно записать в одном месте полную и по возможности упрощенную версию большей части доказательства. Однако до сих пор его первоначальный вариант не был улучшен или упрощен, как можно было бы ожидать …Алгебраисты, которые занимаются теорией групп, уже четверть века как согласились принять теорему о Классификации, несмотря на то что в то время еще было точно известно о существовании лакун в доказательстве. К настоящему времени все известные лакуны заполнены. Самая значительная из них (относящаяся к так называемым квазитонким группам) устранена совсем недавно, в двухтомной работе Ашбахера и Смита. Но на протяжении 25 лет доказательство Классификации не развивалось, как того можно было бы ожидать. Появились определенные упрощения и концептуальные улучшения некоторых этапов, действует программа по аккуратной записи доказательства в одном месте. Почти полностью исключена опора на компьютер при доказательстве существования и единственности так называемых спорадических групп. Однако большая часть доказательства сохранила свой вид и сложность.

Сейчас специалисты в теории конечных простых групп работают над доказательством «второго поколения». Оно должно быть более доступным, внятным и (есть надежда) сравнительно коротким. Такое математическое достижение следует задокументировать вне зависимости от того, сколько в нем страниц, но если оно будет короче и привлекательнее записано, то увеличится вероятность, что кто-нибудь сможет его прочесть, понять, проверить и усвоить.

Это целая сага, песнь духу сотрудничества, который распространен среди современных математиков. Но по дороге не обошлось без кочек и оврагов. Одному математику из Университета западного побережья досталась определенная часть программы. Он работал над ней несколько лет, создал рукопись в несколько сотен страниц, но в конце концов отчаялся и не закончил работу. К несчастью, за это время Горенштейн умер и мир потерял следы этого маленького кусочка пазла. Время от времени на конференциях кто-нибудь задавался вопросом: «А что там с квазитонкими штуками, что-нибудь делается?» — на что ему отвечали: «Не переживай, программа так тщательно разработана, этот вопрос обязательно кто-нибудь рассматривает. И потом, у нас есть дела поважнее». Наконец, Филдсовский медалист Жан-Пьер Серр написал статью о нетривиальной лакуне в доказательстве, которая обязательно должна быть устранена. Статья Серра произвела фурор, и, в конце концов, Ашбахеру и Смиту [ASM] пришлось проработать идеи в этой области и записать их. Получился двухтомник в 1200 страниц — всего лишь для того, чтобы заполнить одну лакуну.

Конечно же, как мы уже говорили, в мире есть специалисты, которые тратят практически все свое время на изучение классификации конечных простых групп и поиск способов упростить и прояснить рассуждения. Время от времени кто-нибудь обнаруживает значительный дефект в общей картине. Но программа устойчива, пробелы заполняются, и есть все основания полагать, что мало-помалу появится многотомник, в котором записано доказательство теоремы, для которого двух веков оказалось мало.

Сага о конечных простых группах все еще ждет своих томов. Отчасти проблема в том, что этому начинанию ничто человеческое не чуждо. Ключевые участники старятся, выходят на пенсию, умирают... Нельзя поручиться в том, что завет Горенштейна будет исполнен в том виде, как создавался.

10.2 ГИПОТЕЗА БИБЕРБАХА — ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛУИ ДЕ БРАНЖА

Гипотеза Бибербаха — один из старейших вопросов в теории комплексной переменной. Она относится к природе коэффициентов степенных рядов некоторых типов функций, аналитических на единичном диске комплексной плоскости. Рассмотрим аналитическую функцию

$$f(z) = z + \sum_{j=2}^{\infty} a_j z^j,$$

определенную на единичном диске $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Мы считаем, что функция переводит различные точки z_1, z_2 в различные. Гипотеза заключается в том, что j-й коэффициент a_j не может быть больше (по модулю, т. е. абсолютной величине) j.

Подробностями мы здесь не будем заниматься. Отметим только, что это довольно технический математический вопрос, интересующий только

Комплексный анализ

Большой пласт в истории математики связан с решением полиномиальных уравнений. Допустим, задан многочлен (полином) $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_kx^k$, и стоит задача найти все его корни — такие значения переменной x, которые обращают его в нуль. У этой задачи тяжелая судьба, так как, например, у многочлена $p(x) = x^2 + 1$ действительных корней нет. Подставьте вместо x любое действительное число, — меньше единицы в результате ни за что не получится.

Пришлось изобрести комплексные числа, чтобы создать множество, на котором у всех многочленов есть корни. Оказалось, что комплексные переменные и комплексные функции — мощнейший инструмент для моделирования многих явлений природы. Динамика жидкостей, аэродинамика, геофизика, космология и многие другие области хорошо поддаются комплексному анализу. В наше время теорию функций комплексной переменной должен изучить каждый инженер.

специалистов, и что Луи де Бранж из Университета Пердью погрузился в него со всей страстью.

У Луи была репутация талантливого математика, творца новых прекрасных идей. Но еще он был известен чудачествами, поскольку слишком часто кричал «Волки!». Подчеркнем, что ошибаются все математики. Любой первоклассный ученый рискует, работая над сложной задачей, попасть «пальцем в небо», и при этом пребывать в абсолютной уверенности, что ему удалось получить решение. Ошибки бывают. Почти каждому хорошему математику случалось опубликовать статью, содержащую ошибку. А некоторым «посчастливилось» написать совершенно неверные работы. Учтите, что эти неверные места пропускают редакторы и референты, — такие вот ошибки иногда попадаются.

В математическом анализе есть еще одна известная задача — «задача об инвариантном подпространстве». Очень многие хотели бы решить ее, тогда раскрылась бы природа ограниченных операторов в гильбертовом пространстве (именно таким языком пишется современная теория квантовой механики). Но преуспеть не удалось еще никому. К несчастью, Луи заявил, что он-то смог ее решить, однако со своим решением сел в лужу. И это было не впервые — ранее де Бранж утверждал, что доказал гипотезу Рамануджана. (Позднее это смог сделать Филдсовский медалист Пьер Делинь.)

Так что кредит доверия к де Бранжу был на нуле, когда в 1984 г. он заявил, что справился с классической гипотезой Бибербаха — задачей, впервые сформулированной в 1916 г. Чтобы еще больше все запутать, де

Бранж не стал публиковать свое доказательство в статье на 20, 30 или 40 страниц, которую можно было сесть и прочитать. Вместо этого Луи де Бранж заявил, что доказательство — часть нового издания его книги «Гильбертовы пространства целых функций» [DEB1]. Вряд ли нашелся бы кто-нибудь, кто решился бы проработать 326-страничную книгу, чтобы выяснить, действительно ли автору удалось доказать гипотезу. Даже если не принимать во внимание предыдущие истории, доказательство Луи де Бранжа могло запросто пылиться в книге много лет, — вряд ли кто захотел бы потратить время на его проверку.

Но провидение было на стороне Луи де Бранжа! Морозной зимой 1984 г. он отправился в творческий отпуск, — в Математический институт имени Стеклова в Ленинграде. А у русских серьезные и влиятельные математические традиции, замечательная решимость и трудовая этика. Они провели с де Бранжем целый семестр, отцеживая его доказательство гипотезы Бибербаха из трехсотстраничной рукописи. При этом обнаружилось несколько недочетов и русские помогли их восполнить. Эти парни — настоящие герои в буквальном смысле этого слова. Они сделали эту работу.

В результате в журнале Acta Mathematica появилась 16-страничная статья [DEB2], любой желающий может ее прочесть и проверить доказательство. Его изучили и одобрили уже сотни математиков. Ни у кого нет сомнений, что гипотезу Бибербаха удалось доказать, причем именно Луи де Бранжу (с помощью потрясающей команды петербургских математиков).

Но это еще не конец истории. Луи де Бранж придерживался общепринятой в среде математиков практики рассылать экземпляры статьи еще до формальной публикации. Такая неопубликованная статья называется *препринтом*. Фактически это *рукопись*, хотя она и не написана от руки, а напечатана. Это официальное провозглашение факта, который, по мнению ученого, ему удалось доказать, вместе с собственно доказательством. Луи разослал сотни экземпляров по всему земному шару. Среди адресатов этой рассылки были Кристиан Поммеренке и Карл Фитцджеральд. А затем удача отвернулась от Луи. Фитцджеральд и Поммеренке обнаружили интересные и значимые способы упростить и прояснить рассуждения де Бранжа. Их идеи были достаточно важны, чтобы оправдать публикацию отдельной статьи. Они записали свои идеи и подали их в журнал Transactions of the American Mathematical Society (см. [FIP]). Из-за различных технических причин вышло так, что очень короткое (всего 8 страниц) доказательство Фитцджеральда/Поммеренке гипотезы Бибербаха вышло из печати *раньше* оригинального доказательства самого де Бранжа.

Луи не обрадовался. Хотя Фитцджеральд и Поммеренке очень уважительно к нему отнеслись (даже в названии своей статьи они указали его имя, а не самого Бибербаха!), без сомнения, ситуация была несимпатичной. На конференции, созванной с целью чествовать Луи как героя дня, Карл Фитцджеральд предоставил ему слово. Профессор де Бранж встал и провозгласил во всеуслышание, что Фитцджеральд и его соавтор — самые настоящие гангстеры, укравшие его идеи. Все это пахло очень неаппетитно.

И даже это еще не конец. Ленард Вайнштайн в Станфордском университете написал диссертацию (его идеи опубликованы в [WEI]), в которой существенно упростил доказательство де Бранжа. Новое доказательство, которое начинается с классического уравнения Левнера, опирается только на математический анализ и занимает всего четыре страницы. Хотя оно не было широко известно, но стало существенным шагом вперед. Однако Дорону Цайлбергеру [ZEI] удалось продвинуться еще дальше. В своей статье «Опирающееся на университетский курс алгебры и формального анализа доказательство гипотезы Бибербаха (по Л. Вайнштайну)», [EKZ], Цайлбергер и Шалош Б. Экхад дают доказательство гипотезы Бибербаха всего в нескольких строках! Оно заключается в проверке сложного комбинаторного тождества, а сама проверка может быть выполнена на компьютере. Стоит отметить, что первоначально Цайлбергер и Экхад планировали назвать свою статью «Карманное доказательство гипотезы Бибербаха для студентов». Однако по своим старомодным обычаям редакторы не пропустили бы статью с таким названием, так что название стало таким, как сказано выше. Особенно интересно отметить, что Шалош Б. Экхад — вовсе *не* человек. Это прозвище компьютера Цайлбергера!

10.3 КАК ВУ ЙИ ХСИАНГ РЕШИЛ ЗАДАЧУ КЕПЛЕРА ОБ УПАКОВКЕ СФЕР

Как и его брат Ву Чанг Хсианг из Принстонского университета, Ву Йи Хсианг из университета Беркли завоевал в 1960-х гг. репутацию специалиста в теории действий групп на топологических пространствах. В то время эта область росла как на дрожжах, и оба брата получили должности на математических кафедрах мирового уровня. Позднее интересы Ву Йи стали меняться, и братья обратились к захватывающей задаче, появление которой восходит ко временам сэра Уолтера Рэлея. Мы все знаем о ключевой роли Рэлея в истории Соединенных Штатов. Помимо прочего, именно он несет ответственность за наше пристрастие к табакокурению. В нем было что-то от авантюриста и даже пирата. Однажды он задал своему канониру вопрос о том, как экономнее всего складывать пушечные ядра. Оказалось, этот вопрос имеет математическую

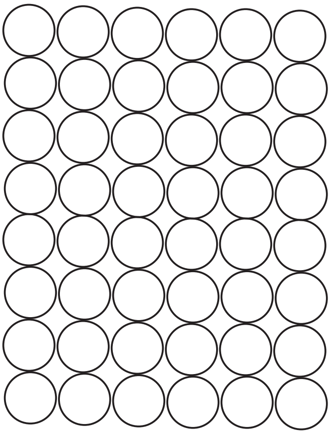


Рис. 10.3. Не лучшая упаковка кругов

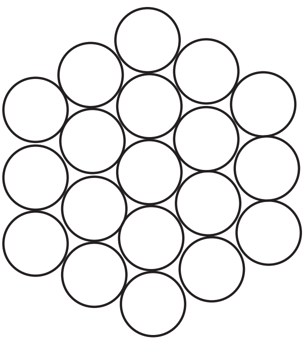


Рис. 10.4. Лучшая упаковка кругов

подоплеку, и с течением времени его передали выдающемуся математику и астроному Иоганну Кеплеру. Вот классическая формулировка задачи Кеплера: «Как эффективнее всего располагать в пространстве шары одного размера?» Кеплер поставил этот вопрос в брошюре под названием «Strena sue de nive sexangula», опубликованной в 1611 г. Интересно.

Между прочим, с этим вопросом продавцы фруктов сталкиваются каждый день. Допустим, сотрудник супермаркета хочет разложить апельсины (мы считаем, что все они приблизительно одного размера и формы). Как это сделать лучше всего? Как поместить в ограниченное пространство как можно больше апельсинов? Вопрос может показаться легкомысленным, но на самом деле он очень глубокий, и ответ на него ни в коем случае не очевиден. А вот ответ на аналогичный вопрос для пространства двух измерений известен уже давно, и он заслуживает внимательного изучения. Давайте вначале посмотрим на рис. 10.3. Здесь изображены двумерные шары (мы по привычке будем называть их кругами) одного радиуса, упакованные на плоскости. Такую упаковку можно назвать «прямоугольной»; она представляет собой один из очевидных способов эффективной упаковки кругов на плоскости. Оказывается, это не лучший способ. В прямоугольной упаковке круги занимают приблизительно 0,7854 площади, а 0,2146 площади остается ими не покрытой. Изощренное упражнение теории матриц — показать, что наилучшая *упаковка* кругов на плоскости — *шестиугольная*, она изображена на рис. 10.4.

Несложные вычисления показывают, что эта упаковка действительно лучше первой — круги теперь занимают 0,9069 площади, — и можно доказать, что это действительно оптимальный метод[1]. Задача Кеплера об упаковке сфер заключается в том, чтобы найти аналогичный ответ в пространстве трех (и больше) измерений.

[1]История этого доказательства интересна. Около двух веков назад Карл Фридрих Гаусс показал, что шестиугольная упаковка лучше всех других *регулярных упаковок*, а в 1940 г. венгр Ласло Фейеш Тот показал, что она *лучше любых* других *упаковок*.

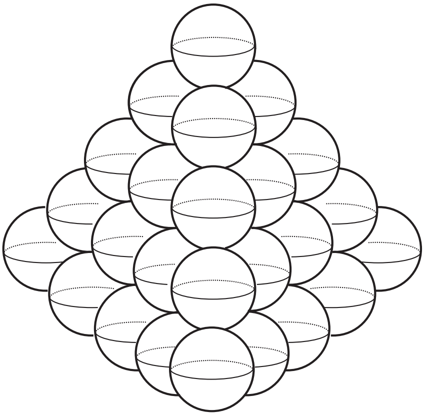


Рис. 10.5. Трехмерный аналог плоской шестиугольной упаковки кругов

Часто считают, что трехмерный аналог плоской шестиугольной упаковки и есть оптимальное решение для сфер в пространстве трех измерений (рис. 10.5). Именно так сейчас раскладывают апельсины в супермаркете, а раньше так складывали ядра возле пушки. Плотность такой упаковки равна $\alpha = 0,74048$. Это означает, что 74,048 процентов объема занимают ядра, а 25,952 процентов — воздух. Сама Природа, упаковывая атомы в молекулы именно так, дает нам основания верить в то, что эта упаковка самая оптимальная. Но никаких доказательств до недавнего времени не существовало.

Впервые Кеплер сформулировал свою задачу в 1611 г. Так что это одна из старинных неприступных задач математики. Первого результата по этой проблеме добился Гаусс. Он показал, что гипотеза Кеплера верна, если заранее принять предположение, что сферы должны быть уложены в регулярную решетку. Так что если бы для гипотезы Кеплера существовал контрпример, он должен был описывать шары, уложенные как-нибудь нерегулярно. В наше время серьезно подошел к этой задаче Ласло Фейеш Тот ([FTO]). В 1953 г. он доказал, что задачу можно свести к конечному (хотя и очень большому) количеству вычислений, используя идеи линейного программирования Джорджа Данцига. Архитектор, геометр и предприниматель Бакминстер Фуллер в 1975 г. заявил, что доказал гипотезу Кеплера, но его доказательство оказалось ошибочным.

Интересные идеи об этой задаче в пространствах более высоких измерений предлагались Конвеем из Принстонского университета ([CON]). Ву Йи Хсианг предложил воспользоваться новой моделью сферической тригонометрии. Он фактически построил эту теорию заново, чтобы решить задачу Кеплера в пространстве размерности три. В 1993 г. он написал большую статью [HSI1] (92 страниц), а затем вспомогательную статью [HSI2], в которой объяснялось, о чем идет речь в первой, и приводилась схема решения задачи Кеплера об упаковке сфер. Эти статьи произвели фурор, ведь уже много лет за эту задачу никто даже и не брался.

Но спустя не такое уж большое время специалисты стали сомневаться в результатах Хсианга. Он утверждал: «Это самая худшая из возможных конфигураций шаров и мы должны ограничиться ее изучением». К несчастью, Хсианг не дал убедительных разъяснений, что задача сводится к указанному частному случаю. Более того, считается, что в задачах такого рода наихудших случаев *не бывает*. Следует разрабатывать аргументы, которые относятся ко всем случаям сразу. Одним из лидеров антихсианговского движения был Томас Хэйлс из университета Мичиган (сейчас университет Питтсбурга). Он опубликовал в Mathematical Intelligencer статью [HAL1], в которой вежливо и подробно разбиралось решение Хсианга. Надо отметить, что другие, включая Конвея, призывали Хсианга признать свои ошибки. Конвей опубликовал важную книгу [CON] по данной теме, и даже не упомянул в ней Хсианга. Но именно Хэйлс закусил удила и публично заявил, что Хсианг ошибся. Хсианг ответил Хэйлсу в работе [HSI4].

Томас Хэйлс мутил воду неспроста. Он придумал *собственное* доказательство гипотезы Кеплера, которое планировал опубликовать в виде серии статей. Хэйлс изучил работу Фейеша Тота и понял, что задача сводится к отысканию минимума функции от 150 переменных, для чего требуется решить около 100 000 задач линейного программирования[1]. В 1992 г. с помощью своего студента Сэмюэля Фергюсона Хэйлс приступил к построению доказательства знаменитой гипотезы. По ходу дела они написали шесть статей. Последняя деталь головоломки нашла свое место в статье «Доказательство гипотезы Кеплера» [HAL2], и это отдельная история.

Основная статья Хэйлса в рукописном виде занимала более 200 страниц. Он предложил ее журналу Annals of Mathematics. (Все статьи Хэйлса, включая последнюю, десятую, вышли в журнале Discrete & Combinatorial Geometry Journal издательства Springer в 2010 г.)

Annals of Mathematics — журнал высокого уровня, у него довольно строгие правила. Он вообще не рассматривает слишком длинные статьи. И отдает предпочтение только современным задачам. И наконец, в этот журнал принимают только статьи, написанные в классической математической форме. Можно сказать, что Annals of Mathematics — бастион традиционного математического доказательства, понимаемого как искусно выстроенная цепочка следствий, связанных между собою строгими правилами математической логики. Статья Томаса Хэйлса, сколь высокой оценки она ни заслуживала, не дотягивала до стандартов. Она во многом опиралась на компьютерные вычисления (как и решение задачи о четырех красках за

[1] Линейное программирование разработал Джордж Данциг в конце 1940-х гг. Оно используется для нахождения экстремальных точек областей, определяемых линейными уравнениями. Эта методика очень широко применяется, например при составлении расписаний авиаперелетов, передаче сообщений по Интернету и при обработке запросов к Гуглу.

четверть века до того). Но Роберт Макферсон, главный редактор журнала, испытывал своего рода склонность к компьютерным доказательствам. Ему нравилась сама идея — доказывать ветхую задачу с помощью компьютера. И редактор решил статью принять.

Но кто мог бы ее отрецензировать? Макферсон смог использовать положение и влияние Анналов, чтобы собрать команду из двадцати венгерских математиков под началом Габора Фейеша Тота (сына Ласло Фейеша Тота, пионера изучения задачи Кеплера, — о нем уже говорилось) с целью проработать статью и вынести вердикт. Они потратили несколько лет, вникая в подробности этой длинной и громоздкой работы. Рецензирование оказалось трудоемким и утомительным, так что состав рецензентов менялся: кто-то покинул команду, кто-то вышел на пенсию, кто-то умер. В конце концов они сказали, что верность математической части работы они подтверждают, но работу компьютера проверить невозможно, так что решительное заключение дать нельзя. За этими словами видна не вся суть.

Двадцать венгерских математиков в течение трех семестров вели семинар, посвященный этой статье. В общей сложности они проработали над ней четыре года. А в конце сказали, что на 99% уверены, что она верна.

Но Макферсон не сдался. Он принял статью Хэйлса для публикации в Annals of Mathematics (см. [HAL2]). По этому поводу Макферсон писал Хэйлсу:

> Рецензенты вложили много энергии, я бы сказал, беспрецедентно много. В течение долгого времени они вели семинар на эту тему. Много людей работали, и работали не покладая рук. Они проверили большое количество локальных утверждений и каждый раз обнаруживали, что ваше утверждение корректно. Некоторые из этих утверждений были поначалу крайне неочевидны, и для их проверки требовались недели. …Они не смогли подтвердить корректность доказательства, и не смогут сделать это в будущем, так как иссякла энергия, которую они могут посвятить этой задаче.

Первоначально Макферсон планировал предпослать публикации предупреждение, своего рода отказ от ответственности:

> Анналы не могут утверждать, что эта статья корректная. Тем не менее мы чувствуем, что она стоящая.

Вот вам и эталон современной математики! Подумайте о давней традиции математического доказательства. Подумайте, что оно собой представляет. Именно оно отличает математику от биологии, физики и инженерных наук. Мы, математики, не проводим экспериментов и не делаем правдоподобных выводов (которые могут быть опровергнуты позднее, и часто оно так и бывает). Вместо этого мы доказываем теоремы —

раз и навсегда. Как только теорема доказана, а ее доказательство проверено и одобрено, эта теорема остается навечно. Она так же верна и полезна сейчас, как и в момент доказательства. Мы уверенно пользуемся теоремой Пифагора, раз уж Пифагор доказал ее 2500 лет тому назад. У нас нет никаких сомнений в теореме о простых числах, поскольку Адамар и де Валле Пуссен доказали ее за век до нас. Анналы всегда строго придерживались традиционного понимания математических теорем и доказательств. Все статьи придирчиво рецензировались. Журнал позиционировался как площадка для записи главных математических достижений и в нем *всегда* старались публиковать только безупречные статьи. Очень редко появлялись исправления или отзывы статей, опубликованных в «Annals of Mathematics». Но сейчас журнал отступал от выбранной линии. Маститые анналы собрались опубликовать результат, истинность которого никто не мог подтвердить! И вдобавок они решили признать эту неувязку в специальном *предупреждении*, отказавшись при этом от ответственности!

В этой книге вы уже не раз видели, что математика — это вполне человеческое предприятие, а не сухие вычисления, как многие подозревают. Человек может повлиять на направление, в котором развивается отрасль науки, или на задачи, над которыми идет работа, или на ценность, которая приписывается той или иной работе. Именно люди решают — кому получить награду, кому достанется желанная должность, кого выберут в Национальную академию наук. Люди определяют, что принимать в качестве доказательства, какие математические факты считать установленными.

Когда Джон Хортон Конвей узнал о планах относительно статьи Хэйлса в анналах, он всполошился и позвонил Макферсону, чтобы поделиться с ним своими соображениями. Позиция Конвея заключалась в том, что в анналах не следовало публиковать статью с предупреждением. Само слово «анналы» наводит на мысль о том, что журнал и его содержание — о вечных и непреходящих истинах. Такой журнал должен быть витриной математических истин, которые уже установлены. И никак иначе. Конвей убедил Макферсона отказаться от предупреждения, которое заменили на фразу в поддержку статьи[1]. Отметим, согласно веб-странице журнала Annals of Mathematics, статья была получена 4 сентября 1998 г., а принята к печати 16 августа 2005 г. Хорошо известно, что некоторые журналы до крайности неторопливы. Полтора-два года — типичный срок, за который журнал принимает статью, рецензирует, набирает и выпускает в печать.

[1] По крайней мере, собрались заменить. В действительности статья [HAL2] вышла в свет без всяких предварительных замечаний — ни в виде поддержки, ни в виде отказа от ответственности.

Медленному журналу на это может потребоваться три года или даже больше. Но семь лет — это уж слишком. Правда, надо помнить, что больше четырех из них ушли на рецензирование!

Текущая версия событий заключается в том, что анналы опубликовали *схему* доказательства Хэйлса. Эта схема носит название «Доказательство гипотезы Кеплера» и занимает 121 страницу ([HAL2]) в ноябрьском выпуске 2005 г. Подробности появились позднее и совсем в другом месте — в июле 2006 г. в журнале Discrete and Computational Geometry. Июльский номер был полностью отдан работе Хэйлса, а всего доказательству было посвящено 10 статей общим объемом 265 страниц, последняя статья вышла в 2010 г.

Это тоже новшество для почтенного журнала. Annals of Mathematics — барышня старомодная. Она публикует только полные, самодостаточные статьи с полными доказательствами новых важных результатов. Публикация статьи Томаса Хэйлса — попытка освоить новые территории. И ведь это пример для других журналов. Может случиться так, что все традиции обнародования результатов математических исследований изменятся под влиянием таких решений[1].

Имеющих склонности к техническим деталям беспокоит то, что решение Хэйлса задачи Кеплера использует программное обеспечение CPlex при работе с задачами линейного программирования. Проблема в том, что хотя программа CPlex надежна, она не указывает верные цифры в ответах. Специалисты по численному анализу полагают, что это ошибка разработчиков. Возможно, именно это соображение подтолкнуло к проекту FlySpeck (это рассчитанная на 20 лет программа, которая даст компьютерное подтверждение доказательства Хэйлса—Фергюсона).

Увлекательно и подробно история задачи Кеплера об упаковке сфер и связанных с ней математических вопросов изложена в работе [ASW]. В 2007 г. Американское математическое общество вручило Фергюсону и Хэйлсу премию Робинсона — это достойная награда за их достижения.

[1] На одной встрече в Англии, обсуждая изменения в природе математического доказательства, Макферсон высказался о статье Хэйлса в анналах. Он утверждал, что в анналах новая практика принятия компьютерных и частично компьютерных доказательств, хотя формальных записей о таком решении не делалось. Кроме того, Макферсон утверждал, что обычный процесс рецензирования «сломался» в случае решения задачи Кеплера об упаковке сфер. Как мы видим, проблема значительно глубже, чем это простое объяснение.

10.4 ПРОГРАММА ГЕОМЕТРИЗАЦИИ ТЁРСТОНА

В 1866 г. Альфред Нобель (1833–1896) изобрел динамит — и это событие имело далеко идущие последствия. Возникла новая технология, обеспечившая строительство Панамского канала и других крупных инженерных проектов того времени. Потребности в тринитротолуоле были высоки, и Нобель стал успешным и богатым. Очень богатым. Как это бывает со многими влиятельными и богатыми людьми, к концу жизни Нобель стал задумываться о наследстве, которое оставит после себя. Он решил учредить премию — награду за особые достижения. Такая премия должна обеспечивать славу и почести награжденному, и помимо того значительное финансовое вознаграждение. Так родилась Нобелевская премия. Она основана по завещанию Альфреда Нобеля в 1895 г. и вначале присуждалась в области мира, литературы, химии, психологии или медицины; в 1901 г. к этому списку добавилась физика.

Альфред Нобель был практиком до мозга костей. Совершенно невозможно вообразить, чтобы он учредил премию, скажем, по метафизической эпистемологии. Точно так же ему в голову не пришла мысль о математике. Так что нобелевских премий по математике не бывает. Но история — забавная штука. С незапамятных времен математики рассказывают друг другу, что настоящая причина, по которой Нобель не дал премии математикам, в том, что когда-то один математик умыкнул у него жену. Эта басня требует некоторых пояснений.

У Альфреда Нобеля был знаменитый современник — Гёста Миттаг-Леффлер (1846–1927), ученик самого Карла Вейерштрасса и сам блестящий математик. Он удачно женился, и потому проживал в большом особняке в Дюрсхольме, неподалеку от Стокгольма[1]. Миттаг-Леффлер был настоящей знаменитостью. Он одевался как денди и был известным человеком в городе. Нобель же был неряшливым грузным одиноким *холостяком*. Он никогда не был женат, и по-видимому, даже подружки у него никогда не было[2]. Он ужасно завидовал Миттаг-Леффлеру и его образу жизни. Вдобавок сотрудницей Миттаг-Леффлера была очень красивая и умная женщина-математик Соня Ковалевская, некоторое время она жила в его доме. Похоже, их отношения были не только платоническими. Как бы

[1] Дюрсхольм был и остается в наше время шикарным местом. Обычные шведы не могут позволить себе там жить. Городок просто уставлен особняками иностранных послов в Швеции.

[2] В недавнем времени биографы Нобеля стали отступать от «официальной» версии его жизни, которую Нобель сам составил и одобрил. В более новых книгах рассказывается о том, что после смерти Нобеля появилась женщина, претендовавшая на его наследство и утверждавшая, что фактически была его женой.

то ни было, Миттаг-Леффлер олицетворял собой образ жизни, который Нобель осуждал. Миттаг-Леффлер был самым выдающимся и знаменитым ученым во всей Швеции. Возможно, если бы существовала Нобелевская премия в математике, Миттаг-Леффлеру ее бы присудили. Как раз это и могло повлиять на решение Нобеля *не* учреждать премии по математике.

Сложилось так, что Нобелевской премии по математике нет и не было. Точка[1]. Это событие повлекло интересные последствия. Миттаг-Леффлер здорово обозлился на отсутствие Нобелевской премии по математике, ведь он тоже рассчитал, что был бы верным кандидатом в лауреаты такой премии. Так что он привлек значительные ресурсы, чтобы учредить *премию Миттаг-Леффлера по математике*. При этом явно указал, что его медаль должна быть вдвое больше нобелевской. Миттаг-Леффлер был основателем очень престижного математического журнала Acta Mathematica. Лауреат премии Миттаг-Леффлера получал полное издание журнала в кожаном переплете. Кроме того, в его честь устраивали грандиозный банкет с французским шеф-поваром. Миттаг-Леффлеру удалось в разных отношениях обойти Нобелевскую премию.

Кроме одного. В то время как Нобелевская премия процветала более столетия, премию Миттаг-Леффлера присуждали только раз или два. В первый раз — Шарлю Валле Пуссену, блестящему специалисту в области анализа Фурье. Профессор Валле Пуссен очень кстати проводил отпуск в Альпах, и ему вручили Acta Mathematica в кожаном переплете, а шикарный французский обед доставили прямо в горы.

Всякий, кто задумывался, в чем здесь дело, сообразил бы, что премии такого рода выживают в зависимости от того, как основатель инвестирует средства. Награды выплачиваются каждый год из дохода от инвестиций. Именно тут поджидал Миттаг-Леффлера печальный исход. Он решил

[1] Следует, однако, отметить, что Нобелевская премия — органическое создание. Она растет и изменяется. Например, в 1966 г. появилась Нобелевская премия по экономике. Уже позднее к Нобелевским были причислены премия Хольгера Крафорда и премия Рольфа Шока. Фонд Крафорда основан большой фармацевтической семьей, деньги Шока имеют такого же рода происхождение. А на эти две новые премии математиков выдвигать можно. Профессор Луи Ниренберг из Института Куранта математических наук первым получил Крафордскую премию. Премия Шока была присуждена профессору Элиасу Штайну из Принстонского университета. И суммы здесь сравнимы с Нобелевскими премиями. Еще одна новая премия, впервые присужденная в 2004 г., — Абелевская премия. Ее учредило Норвежское правительство в честь знаменитого норвежского математика XIX в. Нильса Хенрика Абеля. Она ближе всех подошла к Нобелевской премии по математике.

вложиться в итальянскую железнодорожную систему и в немецкие бонды Первой мировой войны. Вот и конец премии Миттаг-Леффлера[1)].

Одно из следствий этой колоритной истории заключается в том, что математики установили собственную премию. Это медаль Филдса, и учредил ее Джон Чарльз Филдс из Канадского математического общества. В 1924 г. Филдс председательствовал на Международном математическом конгрессе в Торонто. Кроме того, он был редактором трудов конгресса и предложил, чтобы значительные средства, вырученные от продажи этих трудов, пошли на учреждение премии для молодых математиков-исследователей. В 1932 г. Международный конгресс проходил в Цюрихе, там-то и одобрили учреждение этой новой награды. Назвали ее медалью Филдса. Изначально правила присуждения премии не накладывали заметных ограничений на кандидатов. Но в обычай вошло не награждать медалью Филдса математиков старше 40 лет: сороковой день рождения кандидата должен случиться не ранее 1 января года присуждения медали.

Цель премии — поддержать подающих надежды молодых математиков. Впервые присужденная в 1936 г. — Ларсу Альфорсу и Джессу Дугласу — медаль была скромным признанием развивающегося таланта. Со временем *медаль Филдса стала величайшей наградой, которой может добиться математик.* Получить медаль Филдса — значит буквально стать канонизированным в математических кругах. Филдсовские медалисты составляют очень узкий круг избранных. Всего в истории было 49 Филдсовских медалистов; последние четыре добавились в 2006 г.

Дизайн Филдсовской медали разрабатывал канадский скульптор Р. Тайт МакКензи. Она составляет 2,5 дюйма в диаметре. На аверсе изображен профиль Архимеда, повернутый вправо, а также надпись на латыни «Transire suum pectus mundoque potiri» (Подняться над собой и объять мир). На реверсе — латинская же надпись

CONGREGATI
EX TOTO ORBE
MATHEMATICI
OB SCRIPTA INSIGNIA
TRIBUERE,

что переводится как «Избранные в целом мире математики, награжденные за значительный вклад».

[1)] Ну, почти. Поиск в Интернете показал, что и в наши дни до сих пор присуждаются какие-то рудименты премии Миттаг-Леффлера. Но с первоначальной суммой они не сравнимы.

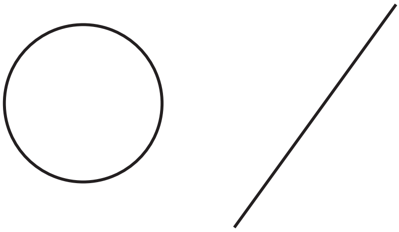


Рис. 10.6. Классификация одномерных многообразий

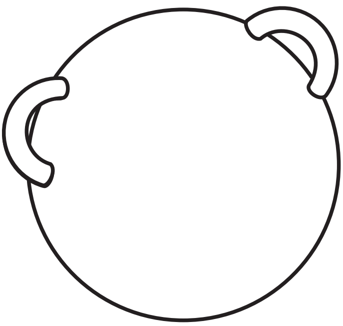


Рис. 10.7. Классификация двумерных многообразий

Уильям П. Тёрстон получил медаль Филдса в 1982 г. в Варшаве, Польша. Он написал блестящую работу по теории расслоений (это такая область топологии — части современной геометрии) — свою докторскую диссертацию! Полученные результаты буквально перевернули всю эту область науки, решили много выдающихся задач и открыли новые пути. Так что признание было безусловно заслуженным. Тёрстон продолжил работу во всех областях топологии низких размерностей. Он стал образцом для всех математиков, молодых и старых. У него было много блестящих учеников, и его интеллектуальное влияние распространялось и по этому каналу тоже.

В 1977 г. (первая формальная публикация была в 1982 г. в [THU1]) Тёрстон сделал потрясающее открытие. Он нашел способ классифицировать все трехмерные многообразия. Идеи Тёрстона получили название «Программа геометризации». Математики называют многообразием поверхность определенной размерности. Такая поверхность может существовать, а может и не существовать в нашем обычном пространстве; она может быть абстрактной конструкцией. Классические результаты XIX в. говорят о том, что все одномерные и двумерные многообразия вполне понятны и классифицированы. Одномерные многообразия — это прямая линия и окружность (рис. 10.6). Любая одномерная «поверхность» путем изгибаний и растяжений может стать эквивалентной окружности или прямой. Любая двумерная поверхность (в обычном пространстве) путем изгибаний и растяжений может стать эквивалентной сфере, к которой приделано несколько ручек (рис. 10.7).

Тёрстону пришла в голову смелая идея — разбивать любое трехмерное многообразие на куски, на каждом из которых реализуется одна из восьми классических геометрий [1)]. Тёрстон подробно изучил, какими должны быть эти восемь геометрий. Его теорема дала теорию структуры трехмерных многообразий.

---

1) Еще в XIX в. итальянский математик Луиджи Бианки (1856–1928) первым идентифицировал эти восемь основных геометрий. Но Тёрстон видел дальше, чем Бианки или кто-либо еще: он сообразил, как их можно использовать.

Конечно же, трехмерные многообразия гораздо сложнее вообразить (не говоря уж — классифицировать), чем одномерные и двумерные. До Тёрстона об этой проблеме было почти ничего не известно. Трехмерные многообразия интересны с точки зрения космологии и общей теории относительности — именно потому, что мы живем в трехмерном пространстве. Для чистых математиков интерес в этом вопросе, движущую силу в нем составляла знаменитая гипотеза Пуанкаре. Он сформулировал ее в 1904 г. в Париже: каждое трехмерная поверхность с геометрией/топологией сферы эквивалентна сфере. Пуанкаре сформулировал ее, основываясь на ранних исследованиях гомологии сферы. У него были некоторые соображения по доказательству, но они оказались несостоятельными. Чары этой задачи захватили математиков на целый век. У нее есть следствия, важные для геометрии нашей вселенной, так что она оказалась в центре внимания и математиков, и космологов. Раз в несколько лет возникают слухи, проникающие даже в популярные издания, о новом доказательстве гипотезы Пуанкаре. В 1986 г. о ее доказательстве заявил Колин Рурк из Уорвика. Благодаря его замечательной репутации это доказательство продержалось некоторое время, пока его не препарировали на семинаре в Беркли. В 2002 г. о доказательстве заявил М. Дж. Данвуди из Саутгемптонского университета. Он даже написал пятистраничный препринт, но это начинание тоже быстро заглохло.

Многие математики безуспешно пытались доказать гипотезу Пуанкаре. Но если программа геометризации Тёрстона была бы верна, то гипотеза Пуанкаре оказалась бы ее простым следствием. Так что в воздухе витало воодушевление утверждением Тёрстона. Его прежние работы пользовались заметным успехом — некоторые даже считали его величайшим геометром всех времен и народов — и он почти никогда не ошибался. Все были уверены, что для нас всех открывается новая глава в математике.

Но с доказательством случилась незадача. Программа геометризации — это не то, что можно доказать на странице или двух. Это огромное предприятие, которое ставит с ног на голову весь предмет. Это то, что историк науки Томас Кун [KUH] назвал бы «сдвигом парадигмы». Хотя Тёрстон был абсолютно убежден, что смог доказать свой новый взгляд на геометрию и топологию пространств низких размерностей (по крайней мере для некоторых ключевых классов), ему не удалось сообщить свое доказательство кому-либо еще. Было так много идей, так много новых конструкций, так много незнакомых артефактов, что было практически невозможно записать доказательство. Через некоторое время Тёрстон составил свои «Записки» [THU4], в которых объясняет программу геометризации.

Важно понимать, что значит слово «записки» для математика. Как мы уже видели в этой книге, у математиков есть традиция, восходящая к Евклиду и даже ранее, строго выводить все идеи, пользуясь жесткими правилами логики, и записывать все согласно строгому аксиоматическому методу. Корректно записанная математика — точная, ясная, кристальная, соответствующая стандартам и проверенным временем моделям. В противовес этому современная математика — быстро растущая область, в которой каждую неделю возникают новые идеи. Новые захватывающие концепции и техники появляются с волнующей частотой. Нередко бывает так, что математик не хочет тратить время на записывание своих идей в линейном, строгом виде. Если идея масштабная и важная, то на написание строгой версии могут уйти годы. Часто математики чувствуют, что у них просто нет на это времени. И тогда есть распространенный выход — «записки». Математик читает цикл лекций или курс (на уровне аспирантуры) и договаривается с кем-либо из студентов, что тот тщательно все законспектирует. Затем профессор скоренько редактирует эти записки и распространяет их. Мы уже упоминали, что Принстонская математическая библиотека — обширная коллекция такого рода записок. Многие математики сточили зубы, пытаясь разгрызть этот гранит науки, и заложили таким образом базис своего математического образования.

Так обстояли дела Уильяма Тёрстона около 1980 г.[1]. Он был автором одной из самых глубоких и захватывающих новых идей прошедших десятилетий. Он потратил бы очень много времени на то, чтобы придать этим идеям законченную форму и подковать их обычным математическим

[1]Гипотеза Пуанкаре — одна из тех задач, что часто проникают в популярные издания. Это действительно масштабная математическая задача, и если кто-то утверждает, что решил ее, — это новость! В середине 1990-х Валентин Поенару заявил, что нашел доказательство гипотезы Пуанкаре. Поенару — профессор Парижского университета, человек определенной репутации. Свои мысли он изложил в рукописи в 1200 страниц. К несчастью, пробиться сквозь этот трактат не смог ни один эксперт, так что по работе Поенару не было высказано никакого четкого суждения. В 1999 г. он опубликовал работу, в которой подвел итог своим усилиям. Поенару принадлежит много важных идей в топологии пространств низкой размерности. Но до сих пор нет вердикта — доказал он гипотезу Пуанкаре или нет.

В 2002 г. о *доказательстве* гипотезы Пуанкаре объявил М. Дж. Данвуди. Приятная новость была в том, что его статья занимала всего пять страничек, прочитать ее мог любой. Здесь же была и новость неприятная. Именно то, что статью мог прочитать любой, и означало, что ее нельзя было отнести к традиционной, строгой чистой математике, записанной обычным жаргоном. На самом деле статья была довольно неформальной. Сложно было сказать, стоит ли воспринимать работу всерьез (несмотря даже на то, что Данвуди — серьезный математик с солидной репутацией). В конце концов, работу Данвуди сочли ошибочной.

формализмом. Так что он прочел лекции и составил по ним записки. Математический факультет Принстонского университета размножил эти записки и продавал экземпляры каждому, кто был готов внести скромную плату.

Эти записки были настоящим блокбастером. По всей планете распространились их экземпляры. Там было так много прекрасных новых идей, они повлияли и даже в корне изменили исследовательские программы многих математиков, ведь в этих записках были начертаны новые пути. Беда была в том, что никто не верил, что эти записки составляли доказательство программы геометризации. Для Тёрстона это было ударом. Он продолжал разъезжать по миру и читать лекции, его ученики защищали диссертации и зажигали светила на математическом небосводе. Но он чувствовал, что ему — ограниченному временем и традиционным математическим языком — удалось лишь записать и распространить свои идеи. Загвоздка оказалась в том, что математическое сообщество — именно оно *всегда* выносит окончательный вердикт, что считать верным и общепризнанным, — было не готово одобрить его работу.

Тёрстон был *не на шутку* уязвлен таким положением дел. В 1994 г. он опубликовал статью «О доказательстве и прогрессе в математике» [THU2], где поднята полемика о природе математического доказательства. Здесь же, sotto voce, математическое сообщество обвиняется в том, что оно слишком медленно усваивает новые идеи. Эта статья вызвала эмоции в широком спектре — от удивления до гнева и фрустрации.

Много лет спустя Тёрстон опубликовал более формальную книгу [THU3] в престижной математической серии издательства Принстонского университета, в которой приступил к систематическому изложению деталей своей программы геометризации. В этом трактате он начал с азов и не оставил никаких деталей для додумывания. Он действительно изобрел новый взгляд на геометрию. В создании этой книги решительную роль сыграл его бывший аспирант Сильвио Леви. Она представляет собой замечательный и плодотворный вклад в математическую литературу. Недавно эта книга получила престижную награду AMS Book Prize. Но надо подчеркнуть, что эта книга — только первый шаг в долгом путешествии. Если сага Тёрстоновского доказательства программы геометризации будет создаваться в таком виде, то потребуется еще много таких томов. А их пока что-то не видно.

10.5 АТАКА ГРИГОРИЯ ПЕРЕЛЬМАНА НА ГИПОТЕЗУ ПУАНКАРЕ И ПРОГРАММУ ГЕОМЕТРИЗАЦИИ ТЁРСТОНА

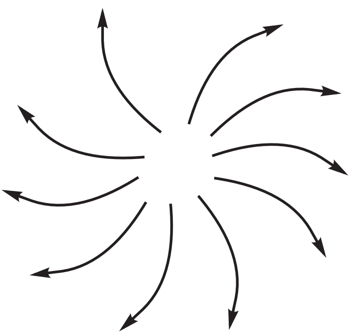


Рис. 10.8. Поток Риччи

В 1982 г. математик Ричард Гамильтон придумал новую технику в геометрическом анализе. Метод под названием «*потоки Риччи*», — это способ изучения потока, генерируемого каким-нибудь источником вроде потока тепла (рис. 10.8). Гамильтон предложил записывать дифференциальное уравнение на данном многообразии, которое задает расстояние (математики называют его метрикой) и движение многообразия, так что скорость в любой данной точке может быть выражена через кривизну. Возможно, на эту идею Гамильтона натолкнуло наблюдение над замкнутой одномерной кривой на плоскости, когда вы то же самое делаете с ней: в процессе кривая сглаживается, все ее зубчики, изгибы и впадинки исчезают и она превращается в окружность (рис. 10.9).

Предполагается, что примерно то же самое происходит с многообразием более высокой размерности, когда оно попадает в поток Риччи. Беда в том, что для высоких размерностей все становится куда сложнее. Трудно доказать существование решения дифференциального уравнения в частных производных. Кроме того, в процессе деформирования (очень приблизительно мы изобразили его на рис. 10.9) могут возникнуть неприятные сингулярности. Особенно досаждают так называемые «сигары», они напоминают длинные тонки трубки, примерно как на рис. 10.10.

Существует изощренный метод, разработанный в Принстонском университете Биллом Браудером и Джоном Милнором, под названием «теория хирургии». Этот метод позволяет разрезать эти досадные сингулярности — словно бы скальпелем, — а потом затыкать образовавшиеся дырки.

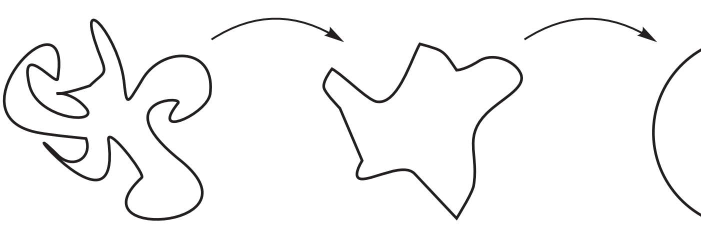


Рис. 10.9. Сингулярности потока Риччи

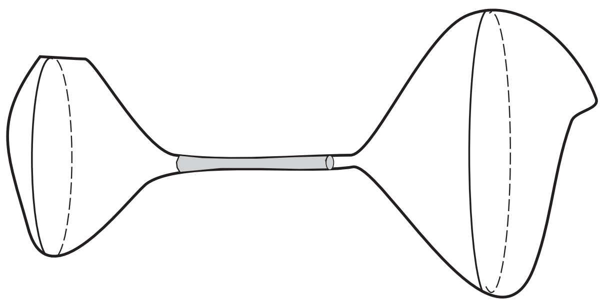


Рис. 10.10. «Сигара» в потоке Риччи

Проблема в том, что в ситуации с гипотезой Пуанкаре сингулярности могут выйти из-под контроля. Они бывают как гидра — одну удалишь, и на ее месте возникает несколько других. (Блестящая догадка Григория Перельмана, работу которого мы будем обсуждать ниже, как раз и состояла в том, чтобы показать, что сингулярности возникают за конечное время. Это дает возможность их контролировать и, в конце концов, избавиться от них. Процесс последовательного исключения сингулярностей приводит к многообразию поприятнее — т. е. приближает к цели.)

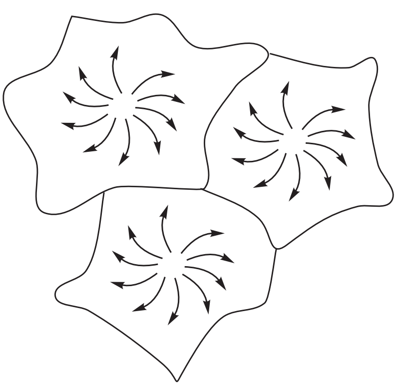


Рис. 10.11. Поток Риччи порождает декомпозицию геометрий

Гамильтон видел, что его метод потенциально может поддержать метод, предложенный Тёрстоном в его «программе геометризации». Можно начать с потоков Риччи в различных точках на поверхности и сформировать таким образом «геометрические участки», существование которых предсказывал Тёрстон (рис. 10.11). Смысл каждого из этих участков в том, что он содержит «идеальную геометрию» — такую, в которой миниатюрный обитатель такого участка, вооружившись рулеткой для специальной метрики на этом участке, не сможет отличить одну точку от другой.

Гамильтону удалось доработать эту методику, чтобы полностью осуществить идею только для двумерных поверхностей. (Да и в размерности три он смог продвинуться так далеко, что убедил многих в том, что это возможный способ доказательства гипотезы Пуанкаре, однако некоторые сложные оценки не позволили ему дойти до конца.) Как мы уже говорили, двумерные поверхности уже были классифицированы в середине XIX в. Жорданом и Мёбиусом. Хотя

Гамильтон применил потоки Риччи к изучению двумерных поверхностей, никаких новых знаний от этого не добавилось. Но он смог получить некоторые частные результаты о существовании решений для потоков Риччи в размерности 3, правда, только для очень малых временных интервалов. Он смог сделать интересные утверждения о кривизне Риччи, но этого было недостаточно, чтобы доказать гипотезу Пуанкаре в трех измерениях. В этой точке потоки Риччи замерли больше чем на 20 лет[1)].

Вот тут-то на поле брани появляется Григорий Перельман. Он родился в 1966 г. и очень рано выказал блестящие способности, хотя особой склонности стать математиком у него не было. Его отец, инженер, давал ему интересные задачки и книги, но в профессию Перельман вступил бочком, по-крабьи.

В 1982 г. он стал победителем в Международной математической олимпиаде. Вскоре после этого защитил диссертацию в Ленинградском государственном университете и стал работать в Математическом институте Стеклова в Ленинграде (это самый престижный математический институт в России). Он принял участие в некоторых программах в Нью-Йоркском университете и SUNY at Stony Brook в 1992 г. и оставил такое впечатление, что сразу же получил оттуда серьезные карьерные предложения. Но не принял их. Он производил впечатление очень необычного человека. Он отрастил ногти до 6 дюймов («Раз уж они растут, почему я должен мешать им?»), придерживался спартанской диеты из хлеба, сыра и молока и вообще был чрезвычайно эксцентричным.

В 1993 г. Перельман получил стипендию в университете Беркли. Тогда же его пригласили выступить на Международном математическом конгрессе в Цюрихе (1994 г.). Ему предлагали работу в Стэнфорде, Принстоне, Институте перспективных исследований и в университете Тель-Авива. Но он не согласился ни на одно из этих предложений. Когда его просили предоставить автобиографию для получения работы, Перельман отвечал: «Если они знают мои работы, моя автобиография им не нужна. Если они ее спрашивают, значит, не знакомы с моими работами».

В 1996 г. Перельман отказался от престижной награды для молодых математиков от Европейского математического общества. Говорят, что Перельман утверждал, будто комитет по награждению не в состоянии

[1)]Гамильтон — настоящий герой в этой истории. Именно ему пришла в голову идея, открывшая подступы к гипотезе Пуанкаре. Хотя сам он не смог довести наступление на нее до победы, им восхищались и Перельман, и Шин Тун Яу. В августе 2006 г. он выступил с ключевым обращением о статусе гипотезы Пуанкаре на Международном математическом конгрессе.

оценить его работу. Но к этому моменту уже было хорошо известно, что Григорий Перельман — человек странный.

В 2002 г., точнее 11 ноября, Перельман написал работу, ставшую прорывом: «Формула энтропии для потока Риччи и ее геометрические приложения» [PER1]. На четвертой странице введения там было утверждение, что в разд. 13 он даст набросок доказательства гипотезы геометризации (Тёрстона). Доказательство действительно представляло собой набросок, так что читатель оставался в неведении, что же именно в работе [PER1] доказывается, а что — нет. Но работа зажгла в мире костер.

19 ноября 2002 г. геометр Виталий Капович отправил Перельману сообщение по электронной почте:

> Привет, Гриша! Неловко беспокоить тебя, но очень многие спрашивают о твоем препринте «Формула энтропии для потока Риччи…». Правильно ли я понимаю, что хотя пока ты не можешь завершить все шаги в программе Гамильтона, ты все же достаточно продвинулся, и после восполнения недостающих деталей сможешь доказать геометризацию? Виталий.

На следующий день Перельман ответил «Правильно. Гриша». Это сообщение от математика выдающихся способностей и результатов стало взрывом.

10 марта 2003 г. Перельман подготовил еще один препринт: «Поток Риччи с хирургией на трехмерных многообразиях» [PER2]. Помимо прочего, эта новая статья включала многие детали доказательства, набросок которого появился в первой.

В апреле 2003 г. Перельман прочел ряд лекций в первоклассных американских университетах, включая MIT (альма-матер многих выдающихся специалистов), SUNY at Stony Brook, Нью-Йоркский и Колумбийский. Возникло довольно сильное впечатление, что люди стали очень серьезно воспринимать программу Перельмана. В июле того же года Перельман обнародовал третью статью «Конечное время вырождения для решений потока Риччи на некоторых трехмерных многообразиях» [PER3]. Эта статья давала упрощенный вариант доказательства одной части программы геометризации; этого результата достаточно, чтобы вывести истинность гипотезы Пуанкаре.

Можно сравнить девятимесячный период жизни Перельмана с ноября 2002 г. по июль 2003 г. с «чудесным годом» (1905 г.) Альберта Эйнштейна, на протяжении которого он опубликовал четыре статьи, полностью изменившие современную физику. В одной из этих статей Эйнштейн ввел специальную теорию относительности почти мимоходом[1], но потребовалось несколько лет, чтобы эта идея получила признание. Именно эти четыре статьи положили начало всему. Так и с Перельманом. Его три статьи возвестили, что поток Риччи для размерности 3 укрощен. Можно доказать утверждения «программы геометризации» Тёрстона, а значит, можно доказать гипотезу Пуанкаре.

Надо подчеркнуть, что три статьи Перельмана наполнены оригинальными захватывающими идеями. Но написаны они довольно неформально. И Перельман не планировал публиковать их. Они размещены в Интернете на сервере препринтов arXiv (см. разд. 8.3) и там хранятся до сих пор. Им не суждено удостоиться реферирования, по крайней мере, сколь бы то ни было официально. Так что дело за математическим сообществом — оценить, что предлагают эти статьи и насколько они вписываются в картину современной математики. Приятное неформальное обсуждение гипотезы Пуанкаре и вклада Перельмана можно найти в [STRZ].

Очень редко мы встречаем в математике тот уровень воодушевления и интенсивной деятельности, к которым привели три статьи Перельмана. По всему миру прошли конференции. Высоко почитаемый Математический институт Клэя (Кембридж, Массачусетс) профинансировал работу двух математиков (Брюса Кляйнера и Джона Лотта) в Мичиганском университете, чтобы они развили идеи Перельмана и построили подробное проверяемое доказательство программы геометризации. Еще два выдающихся математика (Джон Морган из Колумбии и Ган Тян из Принстона, тоже при поддержке института Клэя) потратили много времени и усилий, чтобы записать все детали программы Перельмана для гипотезы Пуанкаре. Их книга [MOT] уже вышла из печати.

Во всей этой истории есть несколько необычных штрихов, которые требуют пояснений. Как мы уже выше обсуждали, Математический институт Клэя (см. разд. 9.2) предложил награду в миллион долларов за решение любой из семи ключевых задач современной математики. Гипотеза Пуанкаре — одна из них, и Перельман в каком-то смысле ее доказал. Это единственный человек, который может претендовать на одну из премий Клэя. Все это очень здорово.

Но есть здесь тонкости. Перельман не играет по правилам премии института Клэя. Во-первых, он не опубликовал ни одну из трех статей.

Свою революционную работу о гипотезе Пуанкаре и программе геометризации Тёрстона он засунул в arXiv и никуда более. Он и не намерен публиковать свои работы в традиционном виде. Поэтому никто

[1] В том смысле, что относительность даже не упомянута в заголовке!

их не реферирует и не дает отзывы. Да и сами статьи, как ни грустно об этом говорить, написаны вовсе не в том строгом, жестком, «пленных не берем» стиле, как это принято в математике. Они написаны неформально и вольно, некоторые детали приходится принимать на веру.

Сам Перельман — несмотря на привлекательные предложения от математических кафедр лучших университетов США — вернулся в С.-Петербург, чтобы позаботиться о матери. Он не склонен к общению и обычно не отвечает на письма. Похоже, что его позиция такова: он сделал свою работу, записал и распространил ее результаты и больше ему добавить нечего. Должность Перельмана в институте Стеклова приносит ему менее 100 долларов в месяц. Однако в жизни он настоящий аскет. Те должности на Западе, которые он отверг, обеспечили бы ему шестизначные зарплаты. Перельман же утверждает, что в краткий период своей работы на Западе он заработал столько, что ему хватит на всю оставшуюся жизнь.

Но это еще не все про Перельмана. Самая последняя информация о нем — он отказался и от места в институте Стеклова, так что теперь может наслаждаться уединением. Он проводит время, слушая оперу и подолгу гуляя. В математической жизни он больше не участвует.

Перельман говорит, что больше не имеет отношения к математике. Из-за «конкурентной» статьи Као и Чжу (ниже мы о ней еще расскажем), из-за жестких нападок высокопоставленных математиков Перельман решил, что профессии математика недостает этичности. Он говорит, что оставил математику, чтобы не участвовать в суете:

> Пока я не был на виду, у меня был выбор. Либо совершать отвратительные вещи, либо, если я этого не хочу, превратиться в домашнее животное. Теперь же, когда я привлекаю очень много внимания, я не могу оставаться домашним любимцем и молчать. Поэтому мне пришлось уйти.

Все это довольно грустно и напоминает судьбу Филдсовского медалиста Александра Гротендика (р. 1928). Гротендик получил Филдсовскую медаль в самом начале своей работы (в функциональном анализе) над ядерными пространствами. Позднее его интересы изменились и вместе со своим учителем Жаном Дьедонне он развивал основания алгебраической геометрии. Вряд ли в XX в. был другой математик, который бы снискал больше почестей или внимания, чем Гротендик. Много лет он занимал кафедру в престижном Институте высших научных исследований — собственно, он эту кафедру и основал (вместе с Дьедонне). Но в возрасте сорока лет Гротендик решил оставить математику. Отчасти это решение было обусловлено практикой правительственного финансирования, но в не меньшей степени — недостатком этичности в профессиональном сообществе. Даже в 1988 г. Гротендик отказался от престижной премии Вольфа; его замечания указывают на то, что его по-прежнему отталкивал недостаток этических стандартов среди математиков. Сейчас Гротендик живет в Пиренеях и углублен в себя, чтобы не сказать больше. Он верит, что большая часть человечества одержима дьяволом.

На Международном математическом конгрессе в Мадриде в 2008 г. Перельмана наградили медалью Филдса (кроме него еще троих — Андрея Окунькова, Теренса Тао и Венделина Вернера). Без сомнения, это наивысшее достижение в карьере математика[1]. Перельман не приехал за наградой; он формально (заранее) отказался от нее. Решение наградить Перельмана (и еще троих математиков помимо него) было принято Филдсовским комитетом в мае 2006 г. Президент Международного математического союза сэр Джон М. Болл приехал в С.-Петербург, чтобы убедить Перельмана принять эту медаль. Перельман был благодарен, провел с Боллом много времени, но в решении отказаться от награды остался непреклонен. Он ясно показал, что для него важно решить задачу, а не получить приз.

Перельман не захотел публиковать свое доказательство, поскольку это сделало бы его законным претендентом на одну из семи премий тысячелетия от института Клэя. Кроме того, Перельман боялся, что если получит миллион долларов, то в России его ограбит какой-нибудь гангстер. В 2010 г. премию Клэя ему все же присудили, но Перельман от нее отказался. Он не дает интервью и живет в уединении.

На Международном математическом конгрессе в 2008 г. Ричард Гамильтон прочитал ключевую пленарную лекцию. Ее тема — объявить, и не просто объявить, а убедить в этом математическое сообщество, что все в порядке, гипотеза Пуанкаре действительно доказана. В ходе лекции Гамильтон рассказал, что построил собственное, «альтернативное» доказательство гипотезы Пуанкаре еще в августе 2006 г. Позднее на другой конференции в 2007 г. в Китае Гамильтон заявил, что записал половину своего доказательства, правда, столкнулся с некоторыми трудностями. Продолжения пока не было.

Постскриптум к захватывающей истории про Перельмана. Как раз когда писалась эта книга, швейцарский математик Петер Мани-Левитска объявил о своем доказательстве гипотезы Пуанкаре. Он написал об этом 20-страничную статью, вполне самодостаточную. После этого он покинул

---

[1] Быть награжденным медалью Филдса в математике — все равно, что быть канонизированным святым в католической церкви. К тому же процедура выбора кандидатов ничуть не проще.

свою академическую должность и с тех пор о нем ничего не было слышно. Его доказательство основывалось на комбинаторных методах, восходящих к самым первым идеям (высказанным еще самим Пуанкаре) о гипотезе Пуанкаре. И хотя Мани-Левитска не тополог, его можно назвать одним из выдающихся специалистов в области этих комбинаторных методов. Одни говорят, что несколько избранных экспертов изучают сейчас доказательство Мани-Левитска. А другие — что его статью принял журнал Commentarii Mathematici Helvetici (это говорит о том, что статью *кто-то* прочел и дал на нее отзыв). В чем можно быть уверенным, так это в том, что все посвященные поклялись хранить молчание об этой истории. Сложно найти информацию, на которую можно положиться.

Последовало и еще одно продолжение — 334-страничная статья Хуай Донг Као и Кси Пинг Чжу, опубликованная в журнале Asian Journal of Mathematics ([CAZ]), ее цель — доказать *и* программу геометризации, *и* гипотезу Пуанкаре. Это журнал Филдсовского медалиста С. Т. Яу, так что эта публикация имеет определенный вес. Можно отметить что публикации статьи Као и Чжу не предшествовало реферирование или рецензирование. Яу получил одобрение от редакции, но *не показал* ей саму статью. Кроме того, Као — ученик Яу. Возможно, Яу — главный эксперт в геометрических приложениях методов нелинейных уравнений в частных производных. Он, несомненно, тщательно вычитал статью, а это много значит.

Яу агрессивно продвигал работу Као и Чжу. А вот Перельман скептически отнесся к вкладу этой статьи. Она стала для него лакмусовой бумажкой, выявившей общий этический фон в математической профессии. К несчастью, позднее выяснилось, что от статьи действительно дурно пахнет. Во многом потому, что она отчасти списана с работы Кляйнера и Лотта. За это недоразумение были принесены извинения, но ситуация так до конца и не разрешилась.

Благодаря очень аккуратно написанной книге Моргана и Тиана (в ней 473 страницы) [MOT], мы можем утверждать, что работа Перельмана тщательно отреферирована и одобрена. Два ведущих мировых специалиста объявили ее (после значительной обработки) корректной. Книгу Моргана и Тиана можно купить, но можно и скачать в Интернете; так что проверить ее может любой желающий в любой точке земного шара. Поэтому сагу о гипотезе Пуанкаре можно считать завершенной. Многие эксперты говорят, что следует подождать еще немного, чтобы все тонкие междисциплинарные аспекты доказательства смогли устояться и быть усвоенными. Интересно, что сам Анри Пуанкаре подумал бы о жизни своей программы и об окончательном решении задачи?

Каждый январь Американское математическое общество устраивает совместную встречу с Математической ассоциацией Америки. В 2007 г. такая встреча прошла в Новом Орлеане, штат Луизиана. Джеймс Артур, президент общества, решил отметить доказательство гипотезы Пуанкаре на этой встрече. Был запланирован целый день лекций и обсуждений. С рассказом о гипотезе Пуанкаре и программе геометризации с утра должны были выступить Филдсовские медалисты Джон Милнор и Уильям Тёрстон. Днем планировались выступления Ричарда Гамильтона, Джона Моргана и Джона Лотта с рассказом о собственном вкладе в программу. К несчастью, Гамильтон отказался; он сослался на другие обязанности и общую загруженность. После долгих прений было решено пригласить ему на замену Чжу. Но тогда Лотт заявил, что на одной лекции с Чжу выступать не будет. Президенту Американского математического общества пришлось предпринять значительные усилия, чтобы спасти ситуацию, но безрезультатно. В конце концов, торжественное событие пришлось отменить. Остается надежда на то, что нечто подобное удастся организовать в будущем.

Глава 11

ДОКАЗАТЕЛЬСТВА, УСКОЛЬЗАЮЩИЕ ИЗ РУК

Современная математика почти характеризуется использованием строгих доказательств. Эта практика, результат буквально тысячелетий усовершенствования, дала математике ясность и надежность, недостижимые ни в каких других науках. Но она же делает математику медленной и сложной: возможно, это самая дисциплинированная интеллектуальная деятельность человека. Группы и отдельные представители в математическом сообществе время от времени пытались отказаться от навязчивой дотошности в доказательствах. Результаты были неоднозначными, а иногда катастрофическими.

— Артур Джаффе, Фрэнк Куинн

В анализе нет теорем — одни только доказательства.

— Джон Гарнетт

Смирись, немощный ум!

— Блез Паскаль

Интуиция прекрасна, но небеса математики требуют иного … С богословской точки зрения мы спасаемся не только верой, но и делами.

— Саундерс Маклейн

Творю молитву,
Уверен, что Природа не предаст
Ее любивший дух…

— Уильям Вордсворт

11.1 ГИПОТЕЗА РИМАНА

Бернхард Риман (1826–1866) — один из настоящих гениев в математике XIX в. Он прожил всего 39 лет, бедность и плохое здоровье его доконали. Всю свою жизнь он с трудом сводил концы с концами и только под конец, уже смертельно больным, получил должность профессора. А глубокое математическое наследие Римана до сих пор оказывает глубокое влияние.

Когда Риман сдавал устный экзамен в Геттингене, Карл Фридрих Гаусс предложил ему рассказать о геометрии. Даже на нетерпеливого и заносчивого Гаусса Риману удалось произвести впечатление; он совершенно по-новому подошел к предмету. Учитывая работы Бойяи (1802–1860) и Лобачевского (1793–1856) по неевклидовой геометрии, Риман предложил стратегическую программу построения на многообразиях и поверхностях таких геометрий, которые бы сохраняли хорошо знакомые всем ключевые черты евклидовой геометрии, но были бы приспособлены к особенностям своих пространств. Подход Римана к геометрии интенсивно изучается и сегодня.

У него были широкие математические интересы. В анализе он определил наиболее широко распространенный интеграл. Он сделал глубокий вклад в теорию тригонометрических рядов и рядов Фурье. Он добился фундаментального прогресса в теории комплексной переменной. В своей основополагающей работе [RIE] о *количестве простых чисел, меньших заданной величины*, Риман развил некоторые ключевые идеи о распределении простых чисел. Напомним, что простыми называют положительные целые числа, которые делятся только на себя и единицу. По традиции ее не считают простым числом. Запишем несколько первых простых чисел:

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31 \ldots.$$

Основная теорема арифметики гласит, что каждое положительное целое число единственным образом раскладывается в произведение простых. Например,

$$17\,640 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^2.$$

Ясно, что простые числа — это кирпичики всех наших знаний о натуральных числах. На простых числах основаны ключевые идеи современной криптографии. На них же базируются многие идеи в области сжатия изображений и обработки сигналов. И один из *важнейших* вопросов — как распределены простые числа.

Гаусс в молодости изучал таблицы простых чисел. Эти таблицы занимали целые страницы и содержали тысячи простых чисел. На основании своих наблюдений Гаусс высказал гипотезу. Для любого натурального числа n обозначим $\pi(n)$ количество простых чисел, которые не больше n. Например, $\pi(50) = 15$, так как до 50 встречается всего 15 простых чисел:

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47.$$

Дальше, $\pi(100) = 25$, потому что после 50 встречаются еще такие простые числа:

$$53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.$$

Гаусс предположил, что для больших n значение $\pi(n)$ примерно равно $n/\log n$. Существовала и уточненная версия гипотезы Гаусса, она гласит, что предел отношения

$$\frac{\pi(n)}{n/\log n}$$

при n, стремящемся к бесконечности, равен 1.

Гауссу не удалось доказать свою гипотезу, но он был убежден в ее истинности. В конце концов, эта так называемая теорема о простых числах была доказана в 1896 г. (независимо друг от друга) Жаком Адамаром (1865–1963) и Шарлем Валле Пуссеном (1866–1962). Их доказательство замечательно тем, что глубоко опирается на комплексный анализ (эта область далека от теории чисел и по форме, и по стилю). Центральную роль в их работе над теоремой о простых числах сыграла знаменитая дзета-функция Бернхарда Римана.

Риман ввел ее в упоминавшейся уже статье *О количестве простых чисел, меньших заданной величины*. Это аналитическая функция комплексной переменной, которая определена как сумма бесконечного ряда

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}\,.$$

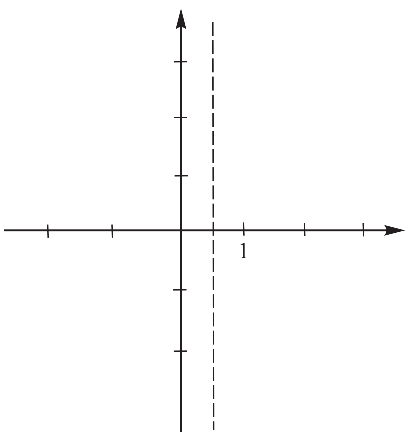


Рис. 11.1. Критическая прямая

Один из первых результатов, доказанных Риманом об этой функции, и заключался в том, что она тесно связана с количеством простых чисел. И Риман *высказал гипотезу* о том, что ему известно расположение всех нулей функции (точек, где она обращается в нуль). Эта информация крайне важна для изучения распределения простых чисел. Знаменитая гипотеза Римана, возможно, самая важная нерешенная задача современной математики, относится к расположению нулей дзета-функции Римана. Гипотеза заключается в том, что за исключением нескольких явных и неинтересных нулей, которые Риман нашел на множестве отрицательных целых чисел, все остальные нули (а их бесконечно много) расположены на критической прямой — на декартовой плоскости эта прямая задается уравнением $x = \frac{1}{2}$ (см. рис. 11.1). Г. Х. Харди (1877–1947) смог показать, что действительно на критической прямой расположено бесконечно много нулей.

Известно, что все нули дзета-функции (за исключением тривиальных на отрицательной части действительной оси, как мы уже отмечали) лежат в критической полосе, которая представляет собой множество комплексных чисел, действительная часть которых лежит в промежутке от 0 до 1

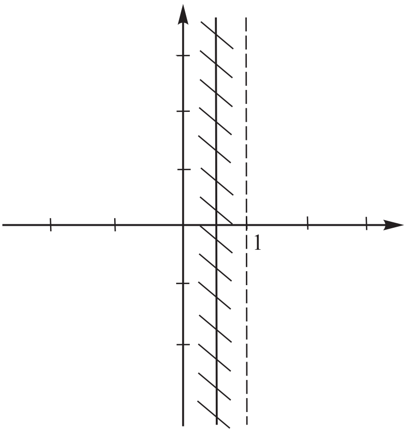


Рис. 11.2. Критическая полоса

(см. рис. 11.2). Вопрос в том, действительно ли эти нули из критической полосы все оказываются на критической прямой. Брайан Конри из Американского математического института доказал[1)], что на критической прямой лежит не менее $\frac{2}{5}$ корней функции Римана.

У гипотезы Римана яркая история (замечательный источник подробностей по этой теме — книга [SAB]). Ей уделил время каждый великий математик со времен Римана. А *иллюминаты* придумали для нее специальное обозначение RH — просто и со смыслом. Однажды настанет день, когда какой-нибудь математик прочтет лекцию, которую в подражание Эндрю Уайлсу (см. разд. 11.8) закончит тем, что изобразит на доске двойную стрелку, которая ведет к RH. Это станет днем славы.

Одним из тех, кто размышлял о RH с подлинной страстью, был Годфри Харди. Каждый год со своим другом Харальдом Бором (1887–1951) он проводил отпуск в Дании. И первым пунктом в их программе отпуска всегда стояло «доказать гипотезу Римана». И именно этот пункт им ни разу не привелось исполнить.

Харди, убежденный холостяк, был человеком эксцентричным. Он был убежден, что Бог — сущность крайне враждебная[2)]. Из этого убеждения имелось следствие: Бог имеет что-то против самого Харди. Когда он ходил на свои любимые состязания по крикету, то всегда брал с собой зонтик в уверенности, что именно зонтик гарантирует сухую погоду: Бог никогда бы не даровал Харди удовлетворение от правильного отношения к погоде. Однажды Харди надо было пересечь Ла Манш — разумеется, на корабле, — причем море было настолько бурным, что имелась реальная вероятность не

[1)] Конри основывался на одной более ранней работе математика из Массачусетского технологического института Нормана Левинсона, написанной на смертном одре (в свою очередь Левинсон использовал результаты ключевой работы Филдсовского медалиста Атле Зельберга). Вначале Левинсон думал, что может доказать, что 100% нулей дзета-функции из критической полосы лежат на критической прямой. Но затем ему пришлось подкорректировать доказательство и саму формулировку — не 100, а только 99%. В конце концов, Левинсону удалось доказать, что на критической прямой расположены 33% нулей. Результат Конри — $\frac{2}{5}$ или 40% — явно лучше, но похоже, что на этой цифре метод Левинсона исчерпал себя.

[2)] На самом-то деле Харди был атеистом, но любил отпускать про Бога шуточки.

Гипотеза Римана

Гипотеза Римана — это предположение о расположении нулей некоторой аналитической функции комплексной переменной. Для математика такой вопрос представляет собой значительный интерес. Но гипотеза Римана особенно важна, из нее следует ценная информация о распределении простых чисел. На этой информации основаны (например) многие технологии в криптографии. Очень много статей из самых разных областей математики начинаются словами «Предположим, что имеет место гипотеза Римана» или, наоборот, словами «Пусть гипотеза Римана неверна». Тот, кому удастся доказать гипотезу Римана, автоматически станет величайшей фигурой в истории математики, оказав грандиозное влияние на все области нашей науки.

вернуться из путешествия. В качестве страховки Харди отослал Харальду Бору открытку, в которой написал, что доказал гипотезу Римана. Теперь Харди мог быть уверен, что Бог не доставит ему удовольствия утонуть вместе с кораблем и оставить весь мир в уверенности, что вместе с ним в пучину отправилось и доказательство RH.

Ганс Радемахер (1892–1969) в 1945 г. объявил, что опроверг гипотезу Римана. Он был выдающимся математиком из Пенсильванского университета, и его слова были восприняты весьма серьезно. Говорят, что он высказал свою идею самому Полу Эрдёшу, и Эрдёш благословил ее. В те дни Интернета еще не было, а международные телефонные звонки считались чудовищно дорогими. Поэтому Радемахер, по обычаю того времени, приготовил открытки с формулировкой своего результата. В последнюю минуту Эрдёш воззвал к осторожности, но открытки все равно были разосланы.

Ошибку нашел не кто иной, как Карл Людвиг Зигель. Вся история даже попала на страницы журнала Time 30 апреля 1943 г. В статье имелся портрет Римана с подписью «Понимают немногие, не доказал никто.». Репортер писал:

> Для математика верный способ достичь бессмертной славы — доказать или опровергнуть гипотезу Римана… Обычный человек не в состоянии ее понять, и ни одному математику не удалось доказать ее.
>
> В прошедшем месяце в университет Чикаго, в офис д-ра Адриана Альберта (1905–1972), редактора Трудов Американского математического общества, пришла электризующая новость. Молния от секретаря общества, профессора Пенсильванского университета Джона Р. Клайна, требовала остановить печатный станок — на подходе была статья, опровергающая гипотезу Римана. Ее автор — профессор Ганс Адольф Радемахер, немец, укрывшийся в Пенсильвании.

> Следом за телеграммой пришло письмо от самого профессора Радемахера о том, что его вычисления были проверены и одобрены знаменитым математиком Карлом Людвигом Зигелем из Принстонского института перспективных исследований. Редактор Альберт приготовился публиковать историческую статью в майском номере. Американские математики в нарастающем гуле слухов затаили дыхание. В последний момент профессор смиренно телеграфировал, что произошла ошибка; при перепроверке математик Зигель обнаружил пробел (неустранимый) в рассуждениях Радемахера. Американские математики чувствуют себя словно на следующее утро после празднования ложного перемирия. По словам редактора Альберта, «Вся история породила много несбывшихся надежд».

В наше время доказательством гипотезы Римана занимался Луи де Бранж (р. 1932), прославившийся благодаря гипотезе Бибербаха (см. разд. 10.2). При этом Луи поддался своей старой дурной привычке — он не однажды объявлял, что доказательство готово. Более того, он не однажды готовил рукопись. Но это еще не все. Он даже сделал продуманное обращение в фонд National Science Foundation с просьбой спонсировать конференцию, посвященную его доказательству гипотезы Римана. Все доказательства де Бранжа оказались ошибочными, и деньги на конференцию так и не выделили[1].

В отличие от Великой теоремы Ферма, над которой Эндрю Уайлс работал в тайне из опасения, что его сочтут ненормальным, гипотезу Римана решительно можно отнести к мейнстриму в математике. Она на острие математической важности и влиятельности, и даже частичный результат (вроде драматической теоремы Брайан Конри, о которой мы рассказывали выше) вызывает значительный интерес. В 1996 г. Американский математический институт спонсировал конференцию, на которой обсуждалось современное состояние задачи. Там были такие светочи науки, как Филдсовский медалист Алан Коннес (р. 1947), Атле Сельберг (1917–2007) и Пол Коэн (1924–2007). Высказывались очень смелые взгляды, а Коннес заявил, что у него есть очень важные идеи. После этого он написал несколько остроумных статей.

Пока писалась эта книга, в архиве препринтов arXiv появилась новая статья [XJLI] Ксиан Чжина Ли под названием «Доказательство гипотезы Римана». Отметим, что Ли — один из соавторов упомянутой выше статьи,

[1]Честно говоря, есть мнение, что спорные части рассуждения де Бранжа можно поправить, если обратиться к знаниям и талантам некоторых израильских математиков. Несчастливая политическая ситуация в этой части света не позволяет де Бранжу воспользоваться их талантами (как он сделал в 1984 г. — с математиками Петербурга). С другой стороны, специалисты Брайан Конри и Ксиан-Чжин Ли опубликовали статью [COL], в которой перечислены ошибки в рассуждениях де Бранжа.

в которой разбираются ошибки в рассуждении де Бранжа. Статья Ли основана на идеях Алана Коннеса. Заслуживает ли это доказательство доверия, пока не выяснилось.

Подчеркнем, что гипотеза Римана — все еще не решенный вопрос. Нельзя даже сказать, что мы в двух шагах от доказательства. Есть много обнадеживающих частных результатов, но конца пока не видно.

11.2 ГИПОТЕЗА ГОЛЬДБАХА

Гипотеза Гольдбаха — задача, которая мучила математиков еще в XVIII в. Кристиан Гольдбах (1690–1764), выдающийся специалист в теории чисел, много переписывавшийся с Леонардом Эйлером, в 1742 г. поставил такой вопрос:

> Можно ли каждое четное число, большее 2, записать в виде суммы двух простых чисел?

Это глубокий вопрос, он интересен серьезному математику и понятен каждому дилетанту. Вроде бы все ясно:

$$4 = 2 + 2, \quad 6 = 3 + 3, \quad 8 = 5 + 3, \quad 10 = 5 + 5, \quad 12 = 7 + 5, \quad 14 = 7 + 7$$

и так далее. С использованием компьютера утверждение проверено для всех чисел до 10^{18}. Но, как в этой книге неоднократно подчеркивалось, даже такая масштабная проверка не сравнится со строгим математическим доказательством. Математическое доказательство должно быть исчерпывающим и относиться ко *всем* четным целым числам, которые больше 2. Компьютер может проверить лишь конечное их количество.

Это задача из тех, что с легкостью попадают в популярные издания. Ее легко понять, а решение оценил бы весь мир. Суть ее легко уловить, и это искушает работать над задачей самых разных людей — не только профессионалов. Так что в газетах встречались самые разные сообщения о «решении», но все они оказались ложными.

Существует более слабое утверждение, которое могло бы следовать из гипотезы Гольдбаха. Известное под названием *слабой гипотезы Гольдбаха*, оно гласит, что любое нечетное число больше 7 можно представить в виде суммы трех простых.

Работы Виноградова (1891–1983) в 1937 г. и Теодора Эстерманна (1902–1991) в 1938 г. показали, что в виде суммы двух простых можно представить почти все четные числа (в том смысле, что доля четных чисел, представимых в виде суммы двух простых, стремится к 1) . В 1930 г. Лев Шнирельман доказал, что любое четное число $n \geqslant 4$ можно представить в виде суммы не более чем 300 000 простых. Этот результат постепенно улучшали различные авторы; наилучший известный на сегодня результат получен в 1985 г. Оливье Рамаром и гласит, что каждое четное число $n \geqslant 4$ можно представить в виде суммы не более чем шести простых. А если бы удалось доказать слабую гипотезу Гольдбаха, из нее немедленно следовало бы, что любое четное число $n \geqslant 4$ представимо в виде суммы не более чем четырех простых слагаемых.

Метод, который обычно используется для работы с гипотезой Гольдбаха, называется *решетом Эратосфена*; он восходит к работам Эратосфена (276–194 до н. э.). Эратосфену было интересно найти все простые числа. В числовом ряду они не образуют никакой закономерности, похоже, что они распределены среди целых чисел случайно (и этот факт был бы одним из следствий гипотезы Римана).

Эратосфен, как это было принято у древних греков, был очарован простыми числами. Он родился на севере Африки, в Ливийской Кирене. Его учителями были Лизаниас Киренский и Аристон Хиосский. Последний привлек его в философскую школу стоиков. Около 240 г. до н. э. Эратосфен стал третьим библиотекарем великой александрийской библиотеки (позднее ее разрушили дикие орды). Одна из важнейших работ Эратосфена — Platonicus — трактат, объясняющий математику, лежащую в основе «Республики» Платона.

Чтобы составить список всех простых чисел, Эратосфен придумал *решето*, — метод, который до сих пор используется при работе с гипотезой Гольдбаха. Вот в чем суть метода.

Составим таблицу натуральных чисел.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64
65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96

. . . .

Начнем с того, что вычеркнем единицу. Потом вычеркнем все числа, кратные двум (но не саму двойку):

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	9	~~10~~	11	~~12~~	13	~~14~~	15	~~16~~
17	~~18~~	19	~~20~~	21	~~22~~	23	~~24~~	25	~~26~~	27	~~28~~	29	~~30~~	31	~~32~~
33	~~34~~	35	~~36~~	37	~~38~~	39	~~40~~	41	~~42~~	43	~~44~~	45	~~46~~	47	~~48~~
49	~~50~~	51	~~52~~	53	~~54~~	55	~~56~~	57	~~58~~	59	~~60~~	61	~~62~~	63	~~64~~
65	~~66~~	67	~~68~~	69	~~70~~	71	~~72~~	73	~~74~~	75	~~76~~	77	~~78~~	79	~~80~~
81	~~82~~	83	~~84~~	85	~~86~~	87	~~88~~	89	~~90~~	91	~~92~~	93	~~94~~	95	~~96~~

. . . .

Продолжаем — теперь вычеркиваем все кратные числа 3 (но не саму тройку):

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~	11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~
17	~~18~~	19	~~20~~	~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	25	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~	31	~~32~~
~~33~~	~~34~~	35	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~	41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~
49	~~50~~	~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	55	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~	61	~~62~~	~~63~~	~~64~~
65	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~	71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	77	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	85	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~	91	~~92~~	~~93~~	~~94~~	95	~~96~~

. . . .

Видно, что среди вычеркнутых чисел *простых нет* — они делятся или на два, или на три, или на два и три одновременно. Теперь будем вычеркивать числа, которые делятся на 5 (интересно, почему мы пропустили 4?), кроме самого числа 5. Вот что получается:

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~	11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~
17	~~18~~	19	~~20~~	~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~	31	~~32~~
~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~	41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~
49	~~50~~	~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~	61	~~62~~	~~63~~	~~64~~
~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~	71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	77	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~	91	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~

. . . .

И еще разочек, теперь будем вычеркивать числа, кратные 7, кроме самого числа 7 (6 можно спокойно пропустить; почему?).

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~	11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~
17	~~18~~	19	~~20~~	~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~	31	~~32~~
~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~	41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~
~~49~~	~~50~~	~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~	61	~~62~~	~~63~~	~~64~~
~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~	71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~	~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~

. . . .

Ну, и для чего все это было нужно? Оставшиеся (*незачеркнутые*) числа *не кратны* ни 2, ни 3, ни 5, ни 7. Если процесс продолжать неограниченно долго, то оставшиеся числа будут не кратны вообще ничему, кроме себя. Все это простые числа:

$$2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19,\ 23,\ 29,\ 31,\ 37,\ 41,\ 43,\ 47,\ 53,$$
$$59,\ 61,\ 67,\ 71,\ 73,\ 79,\ 83,\ 89\ \ldots$$

И так далее. Ни одного простого числа мы не пропустили. Решето Эратосфена находит их все до единого.

Здесь можно поставить очень интересные вопросы. Мы замечаем, что в нашем списке встречаются пары «соседних» простых чисел, отличающихся на 2:

$$\{3,5\},\quad \{5,7\},\quad \{11,13\},\quad \{17,19\},\quad \{29,31\},\quad \{41,43\},\quad \{71,73\}.$$

Сколько всего таких пар? Может ли их быть бесконечно много? На сегодняшний день ответ на этот вопрос неизвестен. Никому.

Вот еще одна старинная задача. Правда ли, что в списке простых чисел можно найти сколь угодно длинные арифметические прогрессии? (В арифметической прогрессии числа располагаются на равных расстояниях одно за другим.) Например, 3, 5, 7 — это список простых чисел, причем расстояние между соседними всегда одно и то же (здесь 2). Между числами 41, 47, 53, 59 тоже одинаковые расстояния (они равны 6). Только в 2004 г. Грину и Тао удалось доказать, что среди простых чисел *можно выделить* сколь угодно длинные арифметические прогрессии.

А вот вопрос вопросов: сколько всего простых чисел? Может быть, 100? Или 1 000 000? Еще Евклид показал, что их бесконечно много, в этой книге мы эту задачу уже обсуждали (см. разд. 2.3).

Итак, решето Эратосфена — это систематичный метод вычеркивания элементов множества натуральных чисел так, что остаются только те, что мы ищем. Многие известные попытки доказать гипотезу Гольдбаха так или иначе опирались на решето. Хотя эта задача не настолько ключевая или важная, как гипотеза Римана, она привлекает значительное внимание. Даже такие маститые ученые как Брун, Радемахер, Виноградов, Чен, Хуа, Бомбьери и Иванич работали над гипотезами Гольдбаха и простых близнецов (ее мы обсудим в следующем разделе). Возможно, методы, изобретенные для решения этих задач, важнее самих задач.

11.3 ГИПОТЕЗА ПРОСТЫХ БЛИЗНЕЦОВ

Гипотеза простых близнецов — еще одна неподатливая задача, суть которой доступна всем без исключения. *Простыми близнецами* мы называем пару простых чисел, разность между которыми равна ровно 2. Среди простых близнецов назовем

$$\{3,5\},\{5,7\},\{11,13\},\{17,19\},\{29,31\},\{41,43\}\ldots$$

Чем дальше мы углубляемся в множество натуральных чисел, тем реже среди них попадаются простые близнецы. Возникает вопрос: правда ли, что этих пар бесконечно много?

В поисках простых близнецов мы, разумеется, тоже можем прибегнуть к помощи компьютера. Найдены уже миллиарды пар. И решето Эратосфена тоже поможет, им уже пользовались при атаках на эту задачу.

Виноградов (опираясь на идеи Харди и Литтлвуда) разработал метод тригонометрических сумм для исследования гипотезы простых близнецов.

В 1919 г. специалист в теории чисел Вигго Брун доказал неожиданный результат: ряд, составленный из чисел, обратных простым близнецам, сходится. Поразительным этот результат представляется вот почему: давно известно (доказательство построил Эйлер еще в XVIII в.), что сумма чисел, обратных всем простым, наоборот, *расходится*. Между прочим, это доказывает (и доказательство очень отличается от Евклидова), что простых чисел бесконечно много.

В 1966 г. Жингрун Чен показал, что существует бесконечно много простых чисел p таких, что $p+2$ — либо простое число, либо полупростое (т. е. равно произведению двух простых). Чен прибегает к теории решета Эратосфена, причем использует общий подход и к гипотезе простых близнецов, и к гипотезе Гольдбаха.

Ни одну из этих двух гипотез нельзя назвать ключевой для современной математики. Они представляют собой сноски петитом в книге истории математики. Однако над этими задачами (подчеркнем еще раз) работали выдающиеся математики. Истинную значимость гипотез нельзя оценить, пока мы не убедимся, что они верны, и не проработаем после этого с ними некоторое время.

Великая теорема Ферма выглядит великой — в общепринятом смысле, — поскольку привлекала так много именитых ученых. Из попыток ее доказать выросли теория колец, теория идеалов и многие другие ключевые идеи абстрактной алгебры. Гипотеза простых близнецов далека от такого изобилия, хотя, конечно же, тоже привела к некоторым интересным исследованиям и некоторым новым идеям.

Математик, который разгрызет один из этих двух старых орешков (Гольдбаха или простых близнецов), в значительной мере прославится и пожнет какие-то лавры. Но не такие, как при доказательстве гипотезы Римана или Пуанкаре.

11.4 СТИВЕН ВОЛЬФРАМ И НОВАЯ НАУКА

Стивен Вольфрам — *вундеркинд* современной науки. Он получил ученую степень в Калтехе (Калифорнийский технологический) в возрасте 20 лет. Всего через год он получил стипендию Мак-Артура — став самым молодым стипендиатом за всю историю! Большинство получивших эту стипендию — а это значительная сумма, 500 000 долларов или даже больше — кладут деньги в банк и этим ограничиваются. Но у Вольфрама объявилась предпринимательская жилка, и он основал компанию (сейчас она называется Wolfram Research) и разработал одну из первых алгебраических систем для персональных компьютеров (этот вопрос обсуждался в разд. 7.2 и 8.2). Этот продукт под названием Mathematica по-настоящему изменил действительность для специалистов в математике. Если ранее компьютеры использовались только для численных выкладок, то теперь они научились решать алгебраические задачи, решать дифференциальные уравнения, вычислять интегралы и производные, работать с матрицами и выполнять много других математических операций. Mathematica умеет чертить потрясающие графики и диаграммы. Сегодня многие тысячи математиков зависят от Mathematica, ведь это базовый инструмент их исследований. И вдобавок ко всему прочему, Стивен Вольфрам теперь — богатый человек.

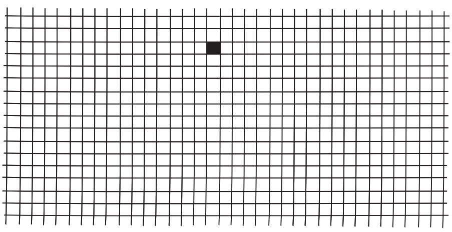


Рис. 11.3. Исходная конфигурация клеточного автомата

Как мы уже говорили, Вольфрам не просто замечательный ученый, но человек разнообразных талантов. Когда он работал в университете Иллинойса, то одновременно читал лекции по компьютерным наукам, математике и физике — беспрецедентный факт в истории университета. Одно из важнейших его достижений в математике — создание теории клеточных автоматов. Что это за зверь? Клеточный автомат — это графическая система, которая исходит из массива клеток на клетчатой бумаге и правил, по которым эти клетки могут эволюционировать. Например, можно начать с единственной клетки, как показано на рис. 11.3. Обратите внимание, что ключевая клетка *закрашена*, а остальные — *нет*. Правило может быть таким[1], как например, на рис. 11.4.

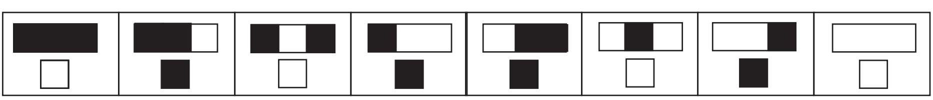


Рис. 11.4. Правило 90-клеточного автомата Вольфрама

Этот рисунок надо понимать так. В первой ячейке изображены три клетки, все три закрашены. Если мы на плоскости встречаем такую тройку клеток, центральную надо сделать неокрашенной. Во второй ячейке

[1]Это правило 90 из книги [WOL].

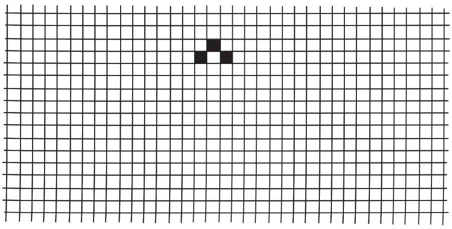


Рис. 11.5. Первая итерация правила 90

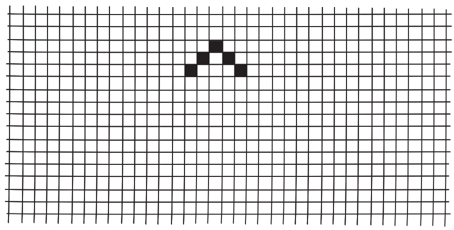


Рис. 11.6. Вторая итерация правила 90

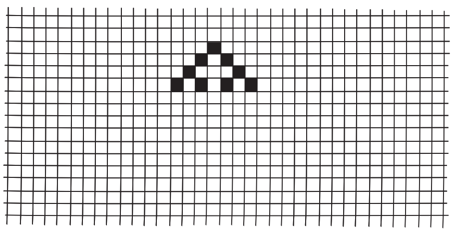


Рис. 11.7. Третья итерация правила 90

изображена другая тройка, в ней две левые клетки окрашены, а самая правая — нет. Если на плоскости нашлась такая тройка, среднюю клетку в ней следует оставить окрашенной. И так далее. Заметим, что результат применения этого правила к N-й строке клетчатой бумаги записывается в $(N+1)$-ю строку.

Если применить это правило к исходной конфигурации с рис. 11.3 (нужны ячейки 7, 6 и 4 этого правила), мы получим рис. 11.5. Применим его еще раз — придем к рис. 11.6. Еще раз — к рис. 11.7. И так далее.

Замечательны клеточные автоматы тем, что, исходя из незамысловатой конфигурации и набора очень простых правил, можно получить что-то донельзя сложное. На рис. 11.8–11.10 изображены конфигурации, порожденные довольно простыми клеточными автоматами[1].

Со временем клеточные автоматы стали для Вольфрама навязчивой идеей. Он убежден, что по этой же модели работает сама Природа. Пятна на леопардовой шкуре, узор снежинок, структура человеческого мозга — по мысли Вольфрама, куда ни кинь, попадешь в структуру, описываемую клеточным автоматом. Он написал 1286-страничную книгу [WOL], в которой подробно изложил свою теорию. Книга привлекла много внимания, об

[1] Джон Хортон Конвей придумал игру «Жизнь», которая представила клеточные автоматы вниманию широкой публики и сделала их популярными.

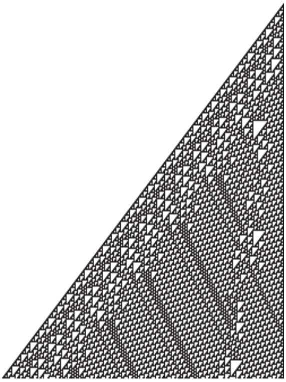


Рис. 11.8. Первый клеточный автомат

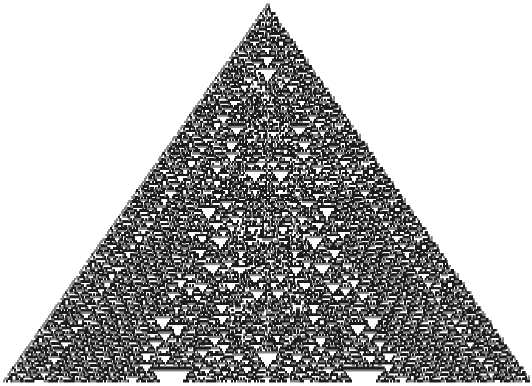


Рис. 11.9. Второй клеточный автомат

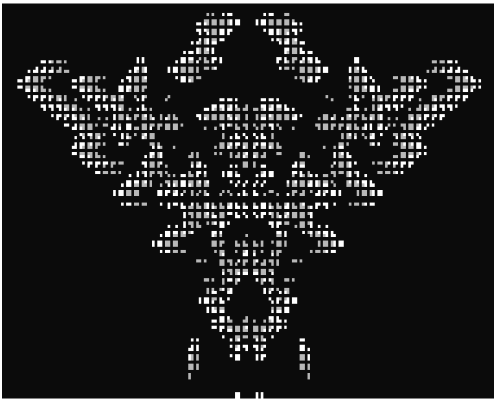


Рис. 11.10. Третий клеточный автомат

этом можно прочитать в обзоре [KRA6] и на сайте

http://www.math.usf.edu/~eclark/ANKOS_reviews.html.

Однако A New Kind of Science — вовсе *не* «Начала» Ньютона и даже не «Происхождение видов» Дарвина. Как высоко ее ни оценивай, она не изменила ничьих взглядов на мир. Она даже не изменила школьного расписания (хотя Вольфрам предсказывал, что должна). Она не убедила никого ни в чем.

Учитывая миссию данной книги и то, что теория клеточных автоматов относится к математике, затронутая тема заслуживает рассмотрения на этих страницах. По образу мышления Вольфрам — физик. Он не связывает себя строгими рамками доказательств вроде тех, которые мы здесь обсуждали. Но он знает чертовски много из математики. Он знает о том, что такое стандарты, он хорошо знаком со стандартами в мире теоретической физики. К несчастью, книга [WOL] не отвечает этим стандартам. Как это могло случиться, почему Вольфрам допустил такой ляп?

На страницах [WOL] Вольфрам говорит, что пишет для широкой аудитории. Он полагает, его идеи так важны, что можно перескочить через обычную процедуру обсуждения во влиятельных научных кругах и обратиться сразу к широкой аудитории. К сожалению, один из результатов такого решения — он не умеет писать изощренно и строго. Он не может позволить себе точного доказательства или рассуждения. У него нет возможности опираться на научную литературу. В конце концов, перед нами расстилается панорама не вполне определенной дискуссии, и честно говоря, из нее сложно сделать какой-нибудь вывод. Рассуждения в [WOL] носят феноменологический характер, и убедительными их назвать *нельзя*.

В книге Вольфрама *много* вычислений, *много* рисунков и *много-премного* описаний, *но очень мало научного текста*. Вольфрам хочет избежать обычной процедуры проверки со стороны научных редакторов, поэтому ему приходится изъясняться на общедоступном языке. И это само по себе накладывает жесткие ограничения на то, что автор может сделать и может сказать. Он ведь не может полагать, что читателю известны основы физики — теория относительности или квантовая механика, или теория струн. Он не может даже требовать знания анализа (который, в конце концов, составляет фундамент современной физики). Вольфрам пританцовывает вокруг ключевых идей, не в силах всерьез обратиться ни к одной из них.

И это очень важно. Угловатые научные тексты беспощадно сложны. Любителям научная литература попросту недоступна. Им недостает практики и техники. Но это не проклятие науки или научной литературы. Это просто факт — наука сложна и требует техники. Она требует изощренности в понимании lingua franca. Пытаясь перескочить этот барьер, Вольфрам оказывается на ничейной территории. Ученые не могут понять, о чем он толкует, поскольку его формулировки расплывчаты и неточны. Дилетанты тоже не понимают, о чем это он, ведь предмет разговора не поддается обыденным фразам. Для своего послания Вольфрам избрал неверный носитель, и тот по предопределению не сработал.

В этом урок для читателей этой книги. Записывать и читать сухие аналитические доказательства, как и любые другие строгие рассуждения, — тяжелая работа. Но, в конце концов, она окупается. Формальное доказательство доступно любому человеку, обладающему определенной подготовкой. и оно аккуратно читается во всех странах, во всех культурах и во все времена. Через 100 лет оно останется таким же верным и понятным, как сейчас. Идеи Вольфрама на короткое время привлекли внимание, но сейчас их уже поглотили пески времени.

11.5 БЕНУА МАНДЕЛЬБРОТ И ФРАКТАЛЫ

Развитие теории фракталов — замечательное явление в современной математике. Созданная в 1982 г. Бенуа Мандельбротом (1924–2010) геометрия фракталов стала еще одной моделью для постижения нашего мира. Изображения фракталов вы видите на рис. 11.11–11.13. Последний представляет собой знаменитое множество Мандельброта. Свою нашумевшую книгу [MAN1] Мандельброт начинает замечанием о том, что

> облака — это не сферы, горы — не конусы, побережья — не дуги окружностей, кора деревьев не гладкая, а молния в небесах не вычерчивает прямую линию.

Объекты природы очень сложны. Как правило, границы их извилисты до крайности. Геометрическое явление — предмет изысканий Мандельброта — заключается в том, что если взять кусочек объекта и раздуть (растянуть его), то он будет выглядеть так, как и прежде (см. рис. 11.14).

Мандельброт не просто изобрел новую ветвь математики (а вот множество Мандельброта на самом деле изобрел не он, оно появилось ранее в работе [BRM]). Он считает, что создал новый способ *заниматься* математикой, и вволю потешается над традиционными математиками (которые придерживаются традиционного стиля в математике, см. [MAN2]). Новая методология Мандельброта в чем-то напоминает Вольфрамово изучение клеточных автоматов и феноменологична по сути. Как правило,

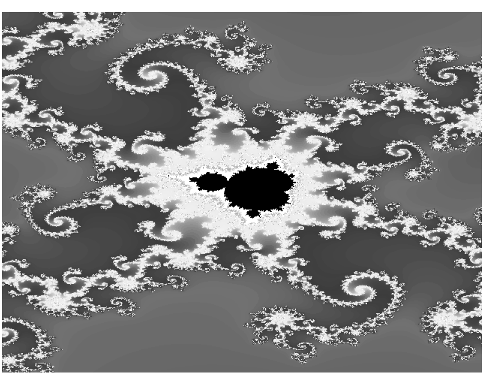


Рис. 11.11. Первый фрактал

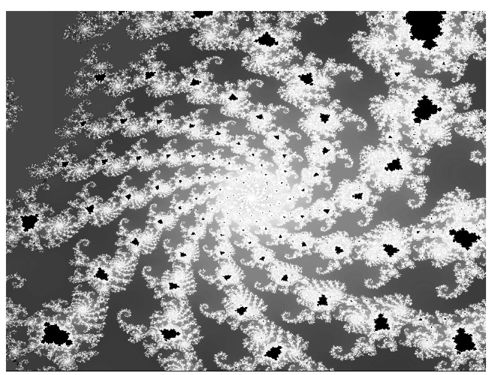


Рис. 11.12. Второй фрактал

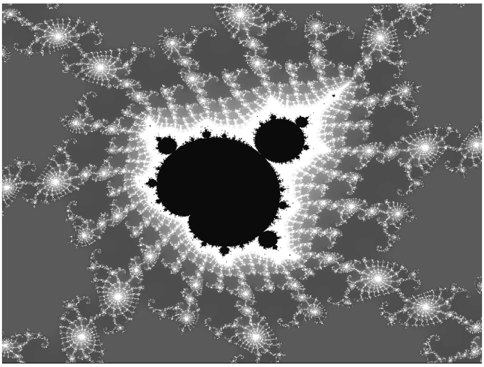


Рис. 11.13. Множество Мандельброта

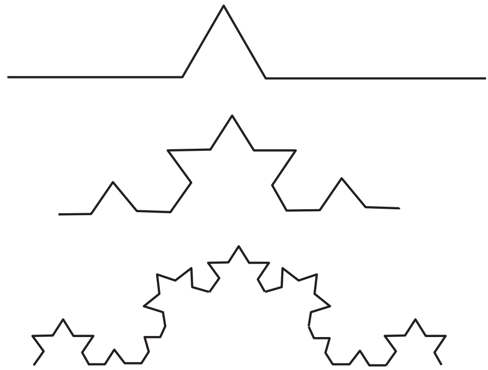


Рис. 11.14. Масштабирование фрактала

фрактальные геометры не формулируют и не доказывают теорем. Вместо этого они создают компьютерные графические изображения, описывают их и делают на их основе выводы.

Нетрудно догадаться, что геометрия фракталов чрезвычайно популярна среди любителей математики и математически подкованных учителей. Дилетанты любят фракталы, потому что в этой теме ощущают причастность к современной математике, к исследованиям на переднем крае науки. Учителя любят фракталы потому, что получают возможность показать ученикам настоящую современную математику, просто демонстрируя картинки и комментируя их. Много лет Мандельброт (служащий

Фракталы

Фрактал — это геометрический объект, обладающий некоторыми свойствами самоподобия. Если увеличить часть фрактала, то получится изоморфное изображение исходного объекта. Изобретение фракталов обычно приписывают Бенуа Мандельброту.

У многих фракталов дробная размерность, что только добавляет им мистичности. Благодаря математику Джону Хаббарду у нас есть прекрасная возможность получать на компьютере цветные изображения различных фракталов.

К фракталам прибегают для моделирования различных понятий физики и приложений. Их часто используют для обнаружения изъянов в структурах и для построения изображений. Фракталы изменили наш взгляд на математику и физику мира.

Геометрия фракталов — это целая индустрия; их используют для создания противошумных фильтров, алгоритмов сжатия изображений и анализа инвестиционных стратегий.

IBM) олицетворял исследования в этой компании. В своих рекламных роликах IBM гордо показывала нам Мандельброта и рисунки фракталов. И IBM за это вознаградила Мандельброта, предоставив свои финансовые мощности, чтобы Мандельброт получил место преподавателя в Йельском университете, и престижную премию Барнарда — не говоря о прочем.

Надо сказать, что в некоторых областях математики и естественных наук фракталы чрезвычайно полезны. Физики все время ищут новые модели природы, а фракталы дают новый язык для формулирования законов нашего мира. В некоторых важнейших физических журналах больше половины представленных статей посвящены фракталам. В Австралии статистики используют фракталы для моделирования полупроницаемых мембран. Сам Мандельброт прибегал к околофрактальным идеям, работая для AT&T над задачей снижения шумов.

Фрактальная геометрия — это и новый способ описания формы, и новый способ размышлять о математике. Она *не* вписывается в Евклидову парадигму теорем и доказательств. Фактически она олицетворяет новый экспериментальный подход к математике, дополняющий более известные и традиционные методологии.

11.6 РОДЖЕР ПЕНРОУЗ И «НОВЫЙ УМ КОРОЛЯ»

Как-то раз в середине 1980-х гг. известный британский физик Роджер Пенроуз из Оксфордского университета смотрел по телевизору захватывающую передачу об искусственном интеллекте. Речь шла о том, что скоро машина сможет мыслить как человек. Пенроуза чуть не хватил удар, он завелся не на шутку, отложил все свои исследовательские проекты и решил написать книгу, в которой опровергнет все, что услышал в этой передаче. В результате появился «Новый ум короля» [PEN1], — книга, повлиявшая на современные представления о мышлении. Она сразу стала бестселлером, несмотря на то что технически очень сложна и не каждый университетский профессор может до конца разобраться в ней.

Пенроуз — выдающийся ученый. У него высочайшая математическая подготовка, и ему удалось сделать заметный вклад в современную математическую мысль. Но в последние десятилетия его главные работы относились к теоретической физике. Он близко знаком со Стивеном Хокингом. Пенроуз обладает обширными познаниями в разных областях науки, и его глубокая эрудиция проявляется в книге.

Если попытаться выразить его мысль как можно проще, Пенроуз в своей книге говорит о том, что компьютер может только выполнять процедуру, заданную алгоритмом, как правило, *компьютерной программой*.

А математик, например, приходит к математическим истинам, руководствуясь вдохновением, интуицией и даже верой. Эти ментальные действия *невозможно* алгоритмизировать. Пенроуз мог бы пойти дальше и указать, что создание произведения искусства — в поэзии, музыке, литературе, скульптуре, танцах или живописи — не происходит по алгоритму, а эвристически, с опорой на жизненный опыт творца.

Интеллектуальное, академическое воплощение тезиса о том, что машины могут, или однажды смогут думать, — этот предмет называется «искусственным интеллектом» или ИИ. ИИ в наших университетах ввели только лет сорок назад — в основном благодаря поддержке военных. Понятно, что военные лидеры, которые должны помнить о вооружении и боевых действиях, хотели бы иметь машину, которая может оценить ситуацию на поле боя и определить, как развернуть войска или куда направить вооружение. Они хотели бы иметь машину, которая может строить оптимальные стратегии бомбардировки. Многие годы (начиная с дней сэра Уолтера Рэлея) наводка и расположение артиллерии — один из важнейших источников задач математического анализа, для построения вычислительных машин и развития определенных ветвей математики (таких как сферическая геометрия и геодезия). В наше время все усложнилось и потребности технологии невразумительны.

Можно сказать, и это часто делают скептики и пессимисты, что в области ИИ мало чего удалось достичь. Да, конечно же, у нас есть зачаточные роботы. Есть машины, которые могут ходить по комнате, не наталкиваясь на мебель. Есть «роботы», которые могут пропылесосить вашу гостиную или выкосить ваш газон. На современном производстве монотонные работы, которые раньше выполнялись на конвейерной линии, сейчас выполняются роботами. Но робота, который умеет завязывать шнурки, еще не создали.

ИИ повлиял на некоторые другие области, которые играют заметную роль в современных теоретических компьютерных науках; одна из них — «экспертные системы». Но сегодня нет, и в обозримом будущем не появится, машин, которые могут *думать*.

Рассуждение, в которое нас вовлекает Роджер Пенроуз, довольно изощренное. Если подходить как математик, вначале нужно определить, что значит «мыслить». Естественно здесь рассматривать вопросы о теореме Гёделя о неполноте и машине Тьюринга. Тезис Чёрча — почтенная установка современной логики — гласит, что любая эффективно вычислимая функция рекурсивна. Что это означает? *Рекурсивная функция* — и в этом важная идея Курта Гёделя — это функция, которая строится на основе нескольких самых основных шагов, которые может выполнить машина.

Существует техническое, точное математическое определение рекурсивной функции, и его можно найти в учебниках, например [WOLF] и [KRA4]. Довольно сложно объяснить, чем же рекурсивная функция эффективно является — большая часть современного представления о тезисе Черча касается построения правильного определения этого понятия. Грубо говоря, *эффективно вычислимая функция* — та, значения которой может найти машина. В основании тезиса Чёрча лежит интуитивное представление о том, что любая «эффективно вычислимая функция» должна сводиться к простым алгоритмизуемым шагам. Поэтому она должна быть рекурсивной.

Один подход, который мы здесь рассмотрим, заключается в том, что любая эффективно вычислимая функция или любая процедура машины Тьюринга — это пример человеческой мысли. Ясно, что по своему определению это такая операция, которая может быть выполнена компьютером. Но Пенроуз убеждает нас, что это крайне ограниченное представление о том, чем в действительности является человеческая мысль. «Девятая симфония», «Война и мир» и даже само изобретение компьютера никогда не смогли бы осуществиться только в результате механизированного или процедурного мышления. Творческая мысль не рождается алгоритмами.

Естественно рассматривать построения Пенроуза с точки зрения теоремы Гёделя о неполноте. В любой логической системе, которая не проще арифметики, найдутся истинные утверждения, недоказуемые в рамках этой системы. Поэтому компьютер всегда будет ограниченным в своих достижениях, какой язык и какую систему логики мы бы ни использовали. Человек может работать с утверждением Гёделя эвристически, или собирая данные, или ограничиваясь правдоподобными рассуждениями, или привлекая вероятностные соображения. Человек может шагнуть за рамки логической системы и воспользоваться любыми средствами для построения доказательства. А компьютер не сможет подойти к задаче вообще. Компьютерные специалисты (см.[MCC]) любят указывать, что компьютерный язык LISP очень подходит для работы с явлением Гёделя. И мы можем строить системы, которые избегают гёделевских утверждений. Однако рассуждение Гёделя о неполноте имеет подлинный философский вес.

Легко представить себе, что для многих классически образованных математиков-теоретиков очень важно овладеть идеями Пенроуза. Мало кто из нас хочет верить, что наступит день, когда нас вытеснят машины, работающие на силиконовых чипах. В сообществе специалистов по компьютерным наукам есть и те, которые с энтузиазмом Пенроузу оппонируют. Четко и занимательно написанная статья [MCC] — пример аргументов, противостоящих идеям Пенроуза.

Сообщество ученых, занимающихся проблемами ИИ, продолжает процветать — в МИТ и Калтех, например, есть энергичные группы. В этой дисциплине, без сомнения, имеется много интересных вопросов. Но если вы посетите встречи специалистов ИИ, то поразитесь, как много времени они проводят, споря об определениях. Как математики мы понимаем важность формулирования верных определений, с тем чтобы все дальнейшее из них следовало. Но этому этапу мы уделяем небольшое время, а затем двигаемся дальше. В предмете искусственного интеллекта больше органических компонентов, ведь это попытка применить математические принципы к функционированию человеческого мозга — и поэтому на него воздействуют силы и давления, к которым теоретическая математика нечувствительна. Роджер Пенроуз задел за живое, размышляя об усилиях ИИ-сообщества. Его идеи звучат в математических науках.

11.7 ЗАДАЧА P/NP

Теория сложности — это инструмент для измерения того, насколько сложна задача (с вычислительной точки зрения) или сколько времени компьютер будет работать над ее решением. Как уже в этой книге было сказано, вычисления (и теория вычислений) занимают все больше места в современной математике. Особый интерес представляет вопрос о том, какие задачи можно решить за разумное время, а какие потребуют неопределенного или практически нереального времени. Последние называют *вычислительно сложными*, а первые — *осуществимыми*. Например, задача разложения на множители 200-значного целого числа вычислительно дорогая. Ее решение может занять годы, даже на самом быстродействующем компьютере. Но, допустим, вместо этой задачи я ставлю другую:

> Дано 200-значное число N. Утверждается, что два 100-значных числа p и q являются его простыми делителями. Проверьте это утверждение, пожалуйста.

А вот эта задача занимает всего несколько секунд (они будут израсходованы в основном на то, чтобы ввести числа в компьютер).

Здесь мы рассмотрим вопросы, относящиеся к *задаче NP-полноты*. Многие считают, что это самая важная задача в математике и компьютерных науках. У нее есть далеко идущие следствия, касающиеся того, что мы можем делать с компьютерами сейчас и что мы сможем делать с ними в будущем. Многие фундаментальные идеи в криптографии опираются на вопросы вычислительной сложности. В этом разделе мы обсудим некоторые из этих идей.

11.7.1 Сложность задачи

Теория сложности — это средство измерения того, насколько задача сложна или сколько компьютерного времени потребуется для ее решения. Мы измеряем сложность следующим образом. Допустим, что в формулировку частного случая задачи входят n заданных начальных значений. Сколько шагов[1] займет ее выполнение (как функция от n)? Можем мы построить эффективную оценку числа этих шагов, которая работала бы для асимптотически больших значений n?

Рассмотрим пример: n игральных карт рассыпали на пол. Ваша задача — собрать их по порядку. Сколько шагов займет этот процесс?

Не более чем за n шагов (просто проверив каждую карту) вы сможете положить на место первую карту. Не более чем за $n-1$ шагов вы положите на место вторую карту, и не более чем за $n-2$ — третью. И так далее. В конце концов, вам потребуется не более

$$n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 1 = \frac{n(n+1)}{2}$$

шагов, чтобы сложить всю колоду по порядку. Формулу суммы, которой мы воспользовались, обычно приписывают Гауссу; поскольку выполняется оценка $\frac{n(n+1)}{2} \leqslant n^2$, мы заключаем, что у этой задачи *полиномиальная сложность степени 2* (по крайней мере не больше), где 2 — степень мажорирующего одночлена. А теперь сравним этот первый пример со знаменитой задачей о коммивояжере: заданы n городов, причем каждые два из них соединены дорогой (рис. 11.15), а каждой дороге приписана цена. Задача в том, чтобы найти маршрут, который проходит через все города, в конце приводит в исходную точку и имеет наименьшую стоимость.

На уровне эффективной вычислимости мы видим, что поиск решения задачи о коммивояжере сводится к проверке всех возможных порядков городов (ведь ясно, что коммивояжер может посещать города в любом порядке). Этих порядков всего $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \cdots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$. Мы можем оценить это число по формуле Стирлинга:

$$n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \sqrt{2\pi n}.$$

Ясно, что задачу нельзя решить (очевидным способом) за полиномиальное число шагов. Поэтому мы говорим, что это задача (потенциально) *экспоненциальной сложности*. На самом деле для строгого доказательства этого утверждения требуется еще несколько аргументов.

[1] Здесь «шаг» — это элементарное действие, которое может выполнить компьютер или робот. На этом шаге не проводится никаких «размышлений».

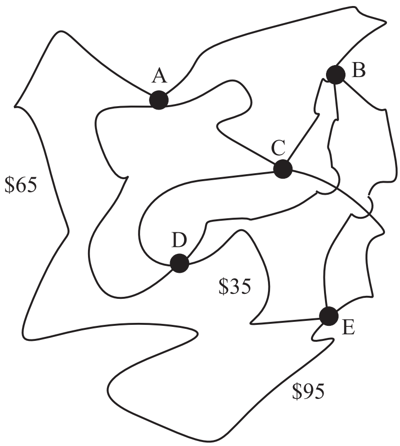


Рис. 11.15. Задача о коммивояжере

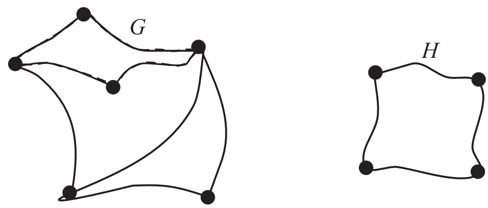


Рис. 11.16. Задача о подграфе

Еще одна знаменитая задача экспоненциальной сложности — *задача о подграфе*. Пусть G — граф. Иначе говоря, G — набор вершин и ребер, которые соединяют некоторые пары вершин. Пусть H — другой граф. Вопрос в том, содержит ли G подграф, изоморфный H (рис. 11.16). (Два графа называют *изоморфными*, если существует взаимно однозначное отображение их вершин и соответствующих ребер.)

11.7.2 Сравнение полиномиальной и экспоненциальной сложности

С точки зрения теоретических компьютерных наук довольно интересно знать, какова сложность задачи — полиномиальная или экспоненциальная, ведь именно эта информация указывает на то, насколько затратным будет решение с точки зрения вычислений. В области компьютерных игр (к примеру) она позволяет сказать: будет ли некоторое действие выполняться с реалистичной скоростью или растянется во времени.

В дальнейшем мы ограничим наше внимание на так называемых «задачах принятия решения». Ответом в таких задачах может быть только «да» или «нет». Примером задачи, которая *не* относится к этому классу, может служить задача оптимизации (вроде того, чтобы найти конфигурацию, которая что-то там максимизирует). Но даже большинство задач оптимизации можно превратить в задачи принятия решений, введя дополнительный параметр, играющий роль верхней границы. Ограничивать себя только задачами принятия решений — не такое уж суровое требование, однако оно сделает изложение прозрачным.

11.7.3 Полиномиальная сложность

Говорят, что задача относится к классу **P**, если существуют многочлен p и (детерминистская) машина Тьюринга (ДТМ), для которых любой набор вводимых данных объема n приводит к остановке с ответом «да» или «нет» не более чем за p шагов (машины Тьюринга мы обсуждали в разд. 7.1). Слово «детерминистская» используется для того, чтобы указать на эффективно вычислимый процесс, в котором не прибегают к угадыванию (в эти идеи мы углубимся ниже в разд. 11.7.5).

Считается, что задачи класса **P** легко решаемы. Задачи, которые к нему не относятся, для которых нет полиномиального алгоритма решения, по определению *решить сложно*. Решение задачи класса **P** требует разумного времени и *существует всегда*. Быть того не может, чтобы машина работала над решением вечно. Упорядочить карты в колоде (мы уже обсуждали эту задачу), найти определенный шарик в урне, разбить на пары гостей на вечеринке — все это задачи класса **P**.

11.7.4 Утверждения, которые можно проверить за полиномиальное время

Для дальнейшего нам важно заметить, что для некоторых самых по себе сложных задач *задача проверки решения* может относиться к классу **P**. Сейчас мы поясним, что имеется в виду.

Скажем, задачу разложить данное n-значное натуральное число N на простые множители принято считать экспоненциально сложной (см. [SCL]). Правда, этот факт достоверно не установлен. Более точно, сложность (согласно наилучшему известному на сегодняшний день алгоритму) составляет примерно $10^{\sqrt{n \ln n}}$ — столько шагов в этом алгоритме. Однако процедура проверки сложна всего лишь полиномиально: если для числа N предложено разложение $p_1, \ldots, p_k$, то всего лишь за полиномиальное время можно вычислить (следуя правилам арифметики) произведение $p_1 \cdot p_2 \ldots p_k$ и убедиться, что оно равно (или не равно, — как повезет) числу N.

Все эксперты сходятся на том, что задача разложения большого натурального числа на простые множители имеет экспоненциальную сложность[1] (т. е. для разложения n-значного числа требуется порядка 2^n шагов). На этой гипотезе базируется знаменитый *метод шифрования*

[1] Не так давно Агравал и его группа [AKS] получили поразительный результат — существует алгоритм полиномиального времени, который позволяет определять, простым или составным является данное число. Но метод Агравала не дает самого разложения на простые множители, он только дает ответ «да» или «нет».

RSA — одна из передовых техник современной криптографии. Если мы научимся раскладывать на простые множители за полиномиальное время, то все RSA-закодированные сообщения можно будет быстро расшифровать[1]. В настоящее время неизвестно, относится ли задача разложения на простые множители к полиномиально сложным. Наилучшие известные алгоритмы требуют экспоненциального времени.

То же самое происходит с задачей о подграфе. О ней известно, что сложность ее экспоненциальна. Однако для заданных графа G, его подграфа K и еще одного графа H всего лишь полиномиально сложна задача проверить, изоморфен ли H подграфу K.

Эти соображения сыграют решающую роль в нашем рассказе о понятии «задача класса **NP**».

11.7.5 Недетерминистские машины Тьюринга

Недетерминистская машина Тьюринга (НДМТ) — это машина Тьюринга с дополнительной головкой, предназначенной только для записи и генерирующей наугад первоначальное значение, которое машина Тьюринга затем проверяет (точное определение понятия недетерминистской машины Тьюринга можно найти в [GAJ]). Мы говорим, что задача относится к классу **NP**, если существует многочлен p и недетерминистская машина Тьюринга, которая наугад генерирует значение длины n и останавливается, выдав ответ «да» или «нет» (т. е. определив, является угаданное значение *верным* или *нет*) не более чем за $p(n)$ шагов.

Сразу же следует отметить, что $\mathbf{P} \subseteq \mathbf{NP}$ (т. е. любая задача класса **P** относится также и к классу **NP**). Это утверждение очевидно: если Π — задача класса **P**, то мы можем задать пустое решение, чтобы убедиться, что она принадлежит к классу **NP** тоже. Поэтому интересно рассмотреть множество $\mathbf{NP} \setminus \mathbf{P}$ (т. е. задачи класса **NP**, но не класса **P**).

Сразу же можно задать интересный вопрос: пусто множество $\mathbf{NP} \setminus \mathbf{P}$ или нет? Если нет, то любая задача из него обладает тем свойством, что детерминистски она сложна неполиномиально, но если ее решение попытаться угадать, то проверить догадку можно за полиномиальное время. Любая задача, про которую известно, что она попала в это множество, не допускает простого решения.

Оказывается, довольно сложно установить непустоту множества $\mathbf{NP} \setminus \mathbf{P}$. До сих пор не обнаружено ни одной принадлежащей ему задачи; поэтому были сформулированы некоторые другие вопросы, на которые можно

[1] Веселый фильм «Sneakers» с Робертом Редфордом в главной роли как раз о реализации этой возможности.

надеяться получить ответ. В частности, даже существуют сравнительно прямые методы доказательств, построенных для ответов на эти вопросы.

11.7.6 Основания NP-полноты

Первый из этих частных вопросов, основной вопрос **NP**-полноты, звучит так. Пусть имеется задача П. Можно ли установить истинность следующего силлогизма:

если множество $\mathbf{NP} \setminus \mathbf{P}$ непусто (т. е. $\mathbf{P} \neq \mathbf{NP}$), то $\Pi \in \mathbf{NP} \setminus \mathbf{P}$?

В работе [GAJ] рассмотрены некоторые задачи, которые допускают этот слегка модифицированный подход.

Самый интересный здесь вопрос — это вопрос **NP**-полноты. Мы обратимся к нему в разд. 11.7.8.

11.7.7 Полиномиальная эквивалентность

Мы говорим, что две задачи Π_1 и Π_2 *полиномиально эквивалентны*, если существует полиномиально сложный перевод с языка, на котором сформулирована Π_1, на язык, на котором сформулирована Π_2, и наоборот. Иначе говоря, существует многочлен q такой, что любое n символьное утверждение о Π_1 может быть переведено в утверждение о Π_2, в котором не более $q(n)$ символов, и наоборот.

11.7.8 Определение NP-полноты

Пусть Π_1 — задача из множества **NP**. Мы говорим, что задача Π_1 **NP**-*полна*, если Π_1 полиномиально эквивалентна любой другой задаче из множества **NP**. Если оказывается, что Π_1 может быть решена с помощью алгоритма, требующего полиномиального времени, то любая другая задача из **NP** может быть решена за полиномиальное время. В то же время, если окажется, что *любая* задача из **NP** не допускает простого решения (т. е. принадлежит $\mathbf{NP} \setminus \mathbf{P}$), то Π_1 — тоже. **NP**-полные задачи считаются самыми сложными в **NP**.

11.8 ЭНДРЮ УАЙЛС И ВЕЛИКАЯ ТЕОРЕМА ФЕРМА

Пьер де Ферма (1601–1665) — один из величайших математиков всех времен и народов. Всю свою сознательную жизнь он был магистратом или судьей города Тулузы во Франции. Его карьера отличалась осторожностью, честностью и безукоризненной справедливостью. Он вел тихую и продуктивную жизнь. Страстью его была математика. Возможно, он был самым талантливым математиком-любителем в истории. В рассказе о Ферма мы опираемся на работу [STA2], где подробно повествуется о его жизни.

В память о Ферма установлена большая статуя у здания городского совета в Тулузе. Ферма сидит, одетый в форменную судейскую мантию. На камне вырезана надпись (по-французски): «Ферма, отец дифференциального исчисления». На коленях у ферма сидит обнаженная муза, она скромно выказывает восхищение ментальной мощью Ферма.

У Ферма были брат и две сестры. Скорее всего, он вырос в том же городе (Бомон-де-Ломань), где и родился. О его школьном обучении мало что известно; должно быть, он учился в местном францисканском монастыре.

Ферма получил образование в университете Тулузы, а потом во второй половине 1620-х гг. переехал в Бордо. Там он начал первое серьезное математическое исследование и в 1629 г. передал экземпляр своей работы одному из тамошних математиков. В той работе Ферма восстановил работу Аполлония Plane loci. В Бордо Ферма поддерживал контакты с Бограном и написал важную работу о максимумах и минимумах, которую представил Этьенну д'Эспанье, который, без сомнения, делился с Ферма своими математическими интересами.

Из Бордо Ферма перебрался в Орлеан, где в университете изучал право. Он получил степень по гражданскому праву и занял пост советника в парламенте Тулузы. К 1631 г. Ферма был адвокатом и представителем власти в Тулузе, в силу такого положения он смог присоединить гордую приставку «де» к своей фамилии, превратившись из Пьера Ферма в Пьера де Ферма.

Всю оставшуюся жизнь он прожил в Тулузе, но работал не только там, но и в своем родном городе Бомон-де-Ломань, и еще в соседнем городе Кастре. В начале 1650-х гг. этот район поразила чума, пожилые люди ее, как правило, не переживали. Ферма тоже болел, и в 1653 г. его ошибочно причислили к умершим:

> Ранее я информировал вас о смерти Ферма. Он жив, и мы больше не боимся за его здоровье, хотя не так давно числили его среди умерших.

В период с 1643 по 1654 г. Ферма не общался со своими учеными коллегами из Парижа. Тому было несколько причин. Во-первых, основная работа не оставляла ему времени для занятий математикой. Во-вторых, Францию охватила фронда, гражданская война, и с 1648 г. это очень повлияло на жизнь в Тулузе. И наконец, чума 1651 г. не оставила без последствий и жизнь в Тулузе, и жизнь самого Ферма. Однако все это время Ферма работал над теорией чисел.

Ферма в особенности знаменит своими работами по теории чисел, в частности своей Великой теоремой. Она гласит, что уравнение

$$x^n + y^n = z^n$$

не имеет ненулевых целочисленных решений x, y и z, если целый показатель n больше 2. На полях перевода Баше Диофантовой «Арифметрики» Ферма записал:

> Я нашел поистине замечательное доказательство, но поля слишком узки, чтобы его записать.

Эти заметки на полях стали известны только после смерти Ферма, когда в 1670 г. его сын Самюэль опубликовал издание перевода Баше Диофантовой «Арифметрики» с отцовскими пометками.

Сейчас принято считать, что «доказательство» Ферма было ошибочным, хотя совершенная уверенность здесь невозможна. Истинность утверждения Ферма была доказана в июне 1993 г. британским математиком Эндрю Уайлсом из Принстонского университета. Правда, через некоторое время Уайлс отозвал свое доказательство — в нем обнаружились недочеты. В ноябре 1994 г. он опять объявил о том, что построил верное доказательство (вместе со своим учеником Ричардом Тейлором), и оно было принято. Безуспешные попытки на протяжении 300 лет доказать теорему Ферма привели к созданию теории коммутативных колец и многим другим математическим открытиям.

Переписка Ферма с парижскими математиками возобновилась в 1654 г., когда Блез Паскаль написал ему, ища поддержки своих идей в теории вероятностей. Блез Паскаль был знаком с Ферма через своего отца, умершего за три года до описываемых событий, и был наслышан о выдающихся математических способностях Ферма. Их краткая переписка положила начало теории вероятностей, их считают отцами-основателями этой ветви математики.

У Ферма была привычка решать задачи, а затем предлагать их (без ответа или доказательства) математическому сообществу. Некоторые из этих задач были глубокими и сложными. Одна из задач заключалась в том, чтобы доказать, что сумма двух кубов не может быть кубом (это частный случай Великой теоремы Ферма и может указывать на то, что к этому моменту Ферма осознал, что его доказательство общего случая было неверным), что уравнение $x^2 + 4 = y^3$ в целых числах имеет ровно два решения, а уравнение $x^2 + 2 = y^3$ — ровно одно. Некоторые из задач он прямо предлагал британцам — своего рода межнациональный вызов.

Математическое сообщество не видело, что Ферма надеялся: его частные задачи приведут (и в конечном счете так и случилось) к более глубоким теоретическим результатам.

Некоторые историки изображают Ферма

> таинственным и немногословным, он не любил говорить о себе и терпеть не мог раскрывать своих мыслей…Его мысли, как бы оригинальны и новы они ни были, ограничивались возможностями своего времени (1600–1650 гг.) и места (Франция).

Великая теорема Ферма — знаменитый математический ветеран. Эта задача обрела центральное непреходящее значение с тех самых пор, когда Ферма сделал свои знаменитые пометки на полях. Многие выдающиеся математики — от Софи Жермен (1776–1831) и Леонарда Эйлера (1707–1783) до Эмиля Артина (1898–1962) — работали над ней и получали важные результаты. Поэтому все были потрясены, когда Эндрю Уайлс объявил, что получил доказательство Великой теоремы Ферма. В этом было что-то от мелодрамы — совершенно нетипично для математика.

Математический институт Исаака Ньютона был построен в Кембриджском университете в 1992 г. Исаак Ньютон служил в Кембридже профессором почти всю свою жизнь, занимая математическую кафедру. Часто рассказывают (и это напоминает историю Золушки, хотя вполне может быть правдой), что эту кафедру уступил ему его учитель, Исаак Барроу[1]. Невероятное свидетельство благотворительности в академических кругах. Ньютон был великим ученым и одним из величайших математиков всех времен и народов. Британцы относятся к нему с почтением, особенно интеллектуальная элита. Поэтому неудивительно, что они назвали математический институт в его честь.

Помимо прочего, институт Ньютона проводит различные математические конференции. В 1993 г. должна была пройти конференция по алгебраической теории чисел, а Эндрю Уайлс считался специалистом мировой величины в этой области. Но на протяжении уже нескольких лет его было почти не слышно — ни опубликованных статей, ни заметных выступлений или лекций. Однако его репутация была все еще значительна, и его пригласили выступить на пленарном заседании этой конференции.

И тут произошло удивительное. Уайлс написал организаторам конференции, что хочет сделать важное и значимое сообщение, но не может

---

[1] Правда, в истории с Барроу сыграли роль и другие факторы. Ему как раз предложили место при дворе, и чтобы занять его, он должен был отказаться от профессуры.

Заметим, что сейчас эту кафедру занимает Стивен Хокинг. У букиниста Джона Фрая есть первое издание Ньютоновых «Начал» с автографом Хокинга.

уместить его в одну лекцию. Ему нужно три. Это неслыханное *требование* в математике, и вовсе невообразимое от такого тихого и вежливого человека как Эндрю Уайлс. Организаторы были искренними поклонниками его более ранних работ и согласились на такое требование.

Вплоть до этого момента Уайлс хранил тайну о своей работе над Великой теоремой Ферма. То, чем он занимался, было очень смело — во всяком случае, он не шел по проторенной тропе, — и Уайлс не хотел подать повод для сплетен. Если начистоту, — он не хотел, чтобы кто-нибудь примазался к его работе. И что еще важнее, он попросту хотел, чтобы его никто не трогал. Завершив рукопись, он никому не показал полную работу (в ней было около 200 страниц!), даже ближайшим коллегам. Чтобы получить отзывы и критику, он показывал разные части разным людям.

Когда пришло время конференции и Уайлс поделился своими мыслями с аудиторией в институте Ньютона, возникло четкое ощущение, что происходит что-то захватывающее. Конечно же, Уайлс никому не рассказал о всех подробностях своей работы и о содержании своего главного сообщения. Но по мере того, как продвигалось его изложение от первой лекции ко второй и к третьей (день за днем), напряжение и воодушевление нарастали. К третьей лекции стало ясно: произойдет что-то новое и необычное, в аудитории были замечены представители прессы. Эндрю Уайлс собирался сделать эпохальное сообщение, возможно, значимое даже с точки зрения истории.

И действительно, подойдя к концу третьей лекции, Эндрю Уайлс написал на доске, что некоторая эллиптическая кривая модулярна, нарисовал двойную стрелочку и поставил знак ВТФ. На жаргоне специалистов в теории чисел он означает Великую теорему Ферма. Эндрю Уайлс провозгласил, что Великая теорема Ферма доказана.

Это было потрясением. Новость мгновенно облетела мир по электронной почте. Вскоре все узнали, что Эндрю Уайлс доказал Великую теорему Ферма. Мы уже говорили, что несколько лет до того Уайлс почти не писал статей и не читал лекций. Он даже прервал отношения с большинством своих коллег и друзей по профессии. Теперь ясно почему: сидя за старым столом на чердаке своего дома, он работал над теоремой Ферма.

В институте Ньютона праздновали событие с шампанским, и все говорили Уайлсу, какой он славный малый. Не забывайте, что Уайлс в это время был специалистом высочайшего класса в теории чисел. Если он говорил, что утверждение истинно, то всем казалось, что оно должно быть истинно. Математики такого калибра не ошибаются.

Нужно добавить еще вот что. Очень осторожно Уайлс поделился некоторыми из своих идей с коллегами (с выдающимися коллегами) из

Принстона — с Ником Катцем, Питером Сарнаком и Гердом Фалтингсом. Каждому из них он дал *часть* своей рукописи для проверки. Работу целиком никто не должен был видеть! И они добросовестно прорубились сквозь математическую чащу — по большей части оригинальную и незнакомую, — чтобы помочь Уайлсу. Так что когда Уайлс читал лекции в институте Ньютона, он был практически уверен, что его работа верна и проверена.

Конференция в Кембридже продлилась неделю, а затем Уайлс вернулся в Принстон. Но теперь кот уже выбрался из мешка, и на математическом факультете университета царило настоящее столпотворение. В Файн-Холле никогда не случалось событий такого масштаба. Достижения чистой математики обычно не вызывают большого интереса у неспециалистов. Они слишком техничны, они требуют серьезной подготовки и поэтому недоступны никому кроме профессионалов. А вот Великая теорема Ферма не такая. Во-первых, ее понять может каждый; а во-вторых, ей уже 300 лет, и Ферма сформулировал ее так очаровательно и эксцентрично.

В глазах широкой публики достижение Уайлса должно представлять блестящий образец одинокого воина в поле (академическом), сразившегося с Голиафом математики. В Файн-Холле не было прохода от репортеров, камер и прессы[1]. Обыкновенно немногословные и болезненно робкие математики оказывались перед камерами, делая заявления о значимости и красоте работы Уайлса. Конечно же, Уайлс был на седьмом небе. Великая теорема Ферма была его любимицей с самого детства, а теперь он удовлетворил свои жизненные абмиции[2].

Тем временем для Уайлса обычный процесс создания научного текста шел своим чередом. Он разослал по всему миру экземпляры своей (немаленькой) статьи. Можете не сомневаться, *ее читали*. В конце концов, это же был гвоздь сезона. Работа была технична до крайности и сквозь нее нелегко было прорубиться, но сильные теоретики могли вести семинары по ней и проработать все тонкие рассуждения и выкладки.

И тут случилась катастрофа. Профессоры Катц и Иллузи проверяли один момент в доказательстве Уайлса и нашли ошибку. Весьма серьезную. Уайлс утверждал (без доказательства!), что некоторая группа

---

[1] Уайлсу даже предложили возможность появиться в *рекламе*. Барбара Уолтерс хотела, чтобы он пришел на ее шоу. Когда Уайлс сознался, что он понятия не имеет, кто такая эта Уолтерс (и ему вообще-то неинтересно), она выбрала вместо него Клинта Иствуда.

[2] У отношения общества к достижениям Уайлса была еще одна сторона. Математики в Принстоне — это вам не увядшие цветы. У них достаточно высокое мнение о себе. И они почувствовали, что если Эндрю Уайлс и заслуживает всех этих почестей, то они тоже и ничуть не меньше. Скажем, еще раньше его коллеги объявили что они *тоже* решили знаменитые открытые задачи, в частности, задачу **P**/**NP**, которую мы обсуждали. К несчастью, ни одно из этих объявлений не оправдалось.

была конечна. Но оказалось, что это невозможно доказать[1]. Так что в разрекламированном доказательстве ВТФ обнаружилась течь. Теперь Уайлс был одиноким героем. Никто не собирался выступить в поддержку и доработать теорему Уайлса *для* него. *Он* должен был сделать это сам.

Какое-то время тот факт, что в доказательстве Уайлса есть пробел, «не выносили из избы». Никто не желал Уайлсу такого разочарования. И была надежда, что ему удастся все поправить. Кстати, учителем Уайлса в Англии был Джон Коутс. Со временем между ними обоими возникла определенная профессиональная конкуренция. Когда до Коутса дошли слухи о проблемах с доказательством Великой теоремы Ферма, он начал распространять эту новость. Шило в мешке так и не удалось утаить.

И опять, история Эндрю Уайлса говорит о традиционной «один в поле воин» точке зрения на математиков, которая царила более 2000 лет: одиночка рождает идею, одиночка пишет статью и защищает ее тоже одиночка. Математическое сообщество в широком смысле изучает работу и решает, стоящая ли она и корректная ли. Если работа проходит проверку, то одиночка пожинает все почести и награды. Если работа ошибочна, то поправить ее — забота все того же одиночки.

Принстонский университет обладает немалыми ресурсами и стоит на страже интересов своих сотрудников и их работ. Уайлсу дали годовой отпуск от всех обязанностей, чтобы он смог доработать свое доказательство. Бедняга Уайлс. Он сделал такую экстравагантную и смелую заявку — и попал в *такую* передрягу. Его портрет побывал на первых страницах всех главных мировых газет. А сейчас вся его программа попала под удар. Если только он все не поправит.

Эндрю Уайлс предан науке. Он верит в свою математику, он верит в себя и в свое доказательство Великой теоремы Ферма. Он приступил к работе по изготовлению заплаток к своему ныне-знаменитому-но-неверному-доказательству. Он не знал, как доказать конечность злосчастной

---

[1] Здесь есть один эпистемологический момент, в который стоит углубиться. Большинство интересных ошибок в математической литературе — включая работы автора настоящей книги — появляются в тех местах, где автор говорит «Очевидно, что …» или «Ясно, …». и это не уловка. Математик был совершенно погружен, а затем и поглощен своей темой последние годы. Он свыкся со своими идеями как с языком во рту (перефразируя знаменитое высказывание Джона Литтлвуда). Так что многие вещи были ему совершенно ясны. Когда математик пишет очень пространное, утомительное доказательство, оно его просто изводит и усталость дает себя знать. Возникают моменты, когда кажется излишним выписывать подробности определенного утверждения. Так и появляются все эти «Очевидно, что …». На самом деле они означают: «Если вы дочитали до этого места, то скорее всего, понимаете, что здесь происходит. Так что наверняка сможете все проверить самостоятельно. Удачи!» А неприятности тут как тут.

группы, так что придумывал другие подходы к задаче. Один за другим они не срабатывали. Годовой отпуск подходил к концу, и Уайлс был на волосок от отчаяния. А потом ему повезло.

Уайлс поделился своими мыслями со своим аспирантом Ричардом Тейлором. Тейлор — очень одаренный математик (сейчас он профессор в Гарварде), он смог понять все тонкости подхода Уайлса к ВТФ. Он посоветовал Уайлсу вернуться к первоначальному варианту и поделился своими идеями о том, как справиться с проблемной группой, которая должна быть конечной. Совместными усилиями Уайлс и Тейлор прошерстили первоначальную программу, предложенную Уайлсом для доказательства Великой теоремы Ферма. И они справились. Они передали Филдсовскому медалисту Герду Фалтингсу *новую рукопись полностью*, он всю ее прочитал и сделал заявление: «Уайлс и Тейлор сделали это. ВТФ доказана». И это был конец.

Вот так математический метод работает в нашем мире. Один хороший математик утверждает, что он может доказать новую теорему. Он записывает доказательство на принятом жаргоне и показывает записи одному или нескольким коллегам. Они прорабатывают рукопись и выносят суждение. Один из выпусков Annals of Mathematics (том 141, 1995 г.) полностью посвящен доказательству ВТФ. Оно состоит из длинной статьи Уайлса и статьи Тейлора и Уайлса покороче. Хотя Уайлс обычно получает львиную долю в признании успеха, вклад Тейлора следует считать ключевым в этой истории.

Одна из причин того, что математический мир был так взволнован работой Уайлса над Великой теоремой Ферма, заключается в том, что в течение последних 50 лет она привела к созданию столь важных идей в теории чисел. Одной из предпосылок к работе Уайлса стал результат Кена Рибета (профессора математики в университете Беркли) о том, что ВТФ следует из знаменитой гипотезы Таниямы–Симура–Вейля. Много лет Уайлс хранил свой интерес к Великой теореме Ферма в секрете. Она считалась одной из неприступных задач — над ней активно работали более 300 лет — и он стеснялся обнародовать тот факт, что тратит на нее время. Но результат Рибета вернул ВТФ обратно на главную дорогу теории чисел. ВТФ стала предметом насущного интереса. Она стала величайшей нерешенной задачей, ключевые идеи которой лежали в главном русле современных исследований по теории чисел.

Если бы Уайлс смог доказать гипотезу Таниямы—Симура—Вейля, то Великая теорема Ферма следовала бы из нее. Но Уайлсу не удалось. В результате он доказал *модифицированную* (ограниченную) версию гипотезы, и этого оказалось достаточно для доказательства ВТФ.

Но сейчас уже много людей проверили доказательство Эндрю Уайлса. Некоторые шаги в нем поддались упрощению, а саму задачу удалось обобщить (знаменитая «гипотеза ABC» — одно из упрощений, ставшее довольно известным). Великая теорема Ферма считается настоящей теоремой, а идеи Уайлса стали важной частью в ткани теории чисел.

Работа Уайлса пролила свет на все идеи, которые привели его к победе над Великой теоремой Ферма. В частности, гипотеза Таниямы–Симура–Вейля вышла до некоторой степени из тени. В результате ее удалось доказать полностью. Это изящный пример того, как математика действует на практике.

11.9 БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕ

Когда Ньютон и Лейбниц изобрели математический анализ, люди не могли сразу же освоить эти новые идеи. Аналитические методы, несомненно, мощны, они применимы к таким задачам, которые долгое время считались неприступными. Ньютон успешно изучал и анализировал такие явления:

- движение;
- гравитация;
- отражение света;
- движение планет;
- механика.

Но в анализе есть некоторые трудные для понимания теоретические тонкости, сложные даже для его создателей. Среди этих трудностей — понятие предела, которое не было окончательно построено до 1821 г., когда Огюстен Луи Коши дал ему строгое определение. Одним из самых неясных мест во всей теории были бесконечно малые. Для Исаака Ньютона бесконечно малая величина — это положительное число, которое меньше любого обыкновенного действительного положительного числа. Так что бесконечно малая — это число, которое меньше $\frac{1}{10}$, меньше $\frac{1}{1000}$, меньше 10^{-10} и даже меньше радиуса протона. Как может существовать такая величина?

Не кто иной как епископ Беркли (1685–1753), который и сам был заметным человеком в академических кругах, скептически относился к анализу. В одном из своих посланий он писал:

> Я говорю, некоторые люди, которые очень требовательны к свидетельствам в религии и притворяются, что верят только тому, что сами видят, эти люди соглашаются и верят во все эти вещи. Те люди, что соглашаются только с ясными данными, с трудом принимают неясные и вовсе темные. Но тому, кто переварит бесконечно малые, нет, я думаю, нужды придираться к чему бы то ни было божественному.

Епископу удалось окутать анализ завесой, которую никто не мог снять еще почти двести лет.

Правда в том, что никто — даже сам Исаак Ньютон — не знал, что же это такое — бесконечно малые. Для Ньютона они были чертовски удобны — они позволяли ему делать содержательные физические и математические выводы, которые вели к смелым и, по-видимому, верным заключениям. Однако основания всего, что сделал Ньютон, выглядели подозрительно.

Теория пределов Коши появилась гораздо позже и показала, как «победить» бесконечно малые. Но пока что они были в ходу, физики и другие ученые любили рассуждения с бесконечно малыми — они были убедительными, эвристически привлекательными и приводили к полезным и значимым выводам. Загвоздка была только в одном: никто не знал, что они из себя представляют. Спасение явилось со стороны Абрахама Робинсона.

Робинсон был математиком, и его познания отличались и глубиной, и широтой. Он изучал и прикладные задачи, и *очень* абстрактные чисто теоретические. Им восхищались все и уважали его за обширный и разнообразный вклад в математику. В 1963 г. Робинсон создал новую область под названием «нестандартный анализ». Самая важное в нем — он основан на системе чисел, которая включает не только все обычные действительные числа $\mathbb{R}$, с которыми математики имеют дело постоянно — целые числа, рациональные или дроби, и иррациональные числа (вроде $\sqrt{2}$ или π), — но и бесконечно малые. Да-да-да, Робинсонова система чисел $\mathbb{R}^*$ включила в себя эти неподатливые штучки, которые Исаак Ньютон придумал 300 лет тому назад.

Важно понимать, что Робинсон построил нестандартные действительные числа *совершенно строго*. Он воспользовался тонкими методами алгебры и логики — такими как понятие ультрафильтра — и дал явную и безупречную *конструкцию* этой новой числовой системы. Бесконечно малые теперь потеряли флер загадочности и выглядят буднично и доступно. Более того, эта новая система чисел включает *бесконечно большие числа*. Они обладают тем удивительным свойством, что они больше 10, больше 1000, больше 1000000, больше 10^{100} (а это гугол) — они больше *любого* обыкновенного действительного числа.

Новая идея Робинсона объявилась как гром среди ясного неба (хотя и до того были попытки — в работах Пола Лоренцена и Детлефа Лаугвица). Для занятий математикой появилась новая вселенная. В этой новой вселенной необыкновенных действительных чисел математики могли открывать новые факты, истины и теоремы, неизвестные в привычном мире действительных чисел. И это еще не все! После того как новые теоремы доказаны в нестандартном подходе, их можно препроводить обратно в старый добрый мир действительных чисел. Так получаются новые теоремы в традиционной математике.

Таким образом, нестандартный анализ — в частности, бесконечно малые Абрахама Робинсона — дал нам новое, строгое, точное орудие для занятий математическим анализом. Человек покидает обычный мир действительных чисел и входит в эфемерный (но определенно осмысленный и строго построенный) мир нестандартных действительных. Здесь можно достичь поразительных результатов, которые немыслимы в прозаической действительности. Достигнув того, что раньше считалось немыслимым, можно вернуться к обычным действительным числам, прихватив с собой новую теорему.

Представьте себе, что кто-то ищет в чаще заблудившееся дитя. Он забирается в вертолет и ищет во всех направлениях — это было бы невозможно для человека, привязанного к земле. Сверху видно дальше, и можно заглянуть в лес с точки, недоступной пешеходу. Наконец, летчик видит дитя и дает знать коллегам на земле, которые могут быстро пройти к определенному месту и спасти заблудившегося. Здесь вертолет — это вспомогательное средство, которое не имеет отношения к конечной цели — потерявшемуся ребенку. Вертолет дает дополнительные возможности, которые позволяют решить задачу поиска быстро и безошибочно. Но когда задача решена, вертолет загоняют в ангар, и жизнь продолжается как ни в чем ни бывало. Та же история с множеством нестандартных действительных чисел $\mathbb{R}^*$. Это вспомогательное средство, которое дает дополнительные возможности и позволяет видеть вещи, ранее недоступные. Как только бесконечно малые сделали свою работу, их можно положить обратно на полку. Задача решена и можно вернуться к жизни в обычной действительности.

11.10 КАЛЕЙДОСКОП НЕПРАВИЛЬНО ПОНЯТЫХ ДОКАЗАТЕЛЬСТВ

Этот автор однажды написал ([KRA2]):

> Быть математиком — все равно что страдать маниакальной депрессией: ты проводишь жизнь, переходя от бурного энтузиазма к черному отчаянию и обратно. Тебе трудно относиться к своей работе объективно: пока задача не решена, она кажется крайне важной, но когда решение уже найдено, представляется, что вся история не стоит выеденного яйца, и ты удивляешься, как мог потратить на нее так много времени[1].

[1]Один ехидный и наблюдательный человек заметил, что между физиком и математиком есть различие: если физик работал над задачей много лет и решил ее, то уверен,

«Черное отчаяние» происходит отчасти от того, что решать математические задачи трудно, а время, потраченное чтобы (i) *понять* и (ii) *решить* задачу, как раз и становится причиной разочарования и печали. Когда твоя статья записана и ее пора предъявить миру, начинаешь беспокоиться о том, оценит ли твои усилия хоть кто-то. Ты потратил на проект год, два или больше, а *получишь ли ты сопоставимое признание*? Последний вопрос может проявиться в двух разных формах.

Мир может решить, что твоя статья верна. Референт в том журнале, куда ты отнес статью, может подписать ее и рекомендовать к печати. Но ведь может случиться так, что никто не сочтет ее очень интересной, важной, оригинальной или новой. *Великий* математик Джон Литтлвуд говорил, что хорошая математическая статья должна быть *новой*, *интересной* и *верной* (см. [LIT]). Такие требования в наших занятиях математикой мы называем необходимыми, но не достаточными. Это означает, что статья, которая им не отвечает, закончит свое существование на помойке времени. И никто не гарантирует, что статья, для которой они выполнены, станет судьбоносной, или заслужит внимания и почестей, или кто-нибудь назовет ее «важной работой». Такая статья — только кандидат в сонм таких работ; у нее есть нужные признаки. Но только математическое *сообщество* или один (+ еще несколько) математик мирового уровня могут определить, значима ли эта работа, или ей место в мусорной корзинке.

Все тот же мотив повторяется раз за разом: только математическое сообщество решает, значима работа или нет, и это решение может исходить из внутренней ценности или просто моды. Это может показаться странным непосвященному, но в математике есть свои моды, группировки и предрассудки, как и в живописи, музыке, литературе или индустрии моды. В любой области случаются периоды интенсивного воодушевления, когда развиваются новые идеи и появляются новые статьи на темы, которые априорно считаются интересными. Спустя некоторое время очарование новизны уходит, все новое становится привычным и уютным как старый сюртук, а люди принимаются за что-то другое.

Большие шишки во главе математических факультетов — Беркли, Геттингена, Гарварда, MIT, Парижа, Принстона — имеют большое влияние: они определяют направления, по которым математика может развиваться, и какие темы считаются важными. Но математик любого (почти) университета может совершить прорыв, который привлечет всеобщее внимание

что теперь он великий исторический гений и торжествует. Если математик работал над задачей много лет и решил ее, он уверен, что она тривиальна, а он идиот.

и задаст новое направление исследований[1]. Какое-то время предмет этого большого открытия будет самым важным на горизонте исследований. По мере того, как важнейшие новые идеи будут развиваться, область будет пламенно популярной. Но через некоторое время первый жар поугаснет. Огонь может разгореться вновь, если кто-то в этой области выскажет новые идеи, и это часто случается. Но не случается столь же часто.

Так что если ваша новая статья, результат вашей интенсивной работы на протяжении долгого времени, относится к области широкого интереса, вы обнаружите, что заслужили много признания, вас будут приглашать на конференции, вы получите самые горячие похвалы. А если нет — статью отправят на полку и более или менее забудут.

Описанная здесь ситуация — обычный порядок жизни не только для математика, но и для ученого вообще и для всех людей, занятых творческим трудом — музыкой или живописью, танцами или кулинарией. Зрелый математик понимает, что работа в этой области удовлетворяет личное интеллектуальное любопытство и желание работать над своими идеями. Для большинства из нас это более чем достаточная причина продолжать поиски Грааля — следующей теоремы.

Конечно же, и мы об этом уже говорили, может случиться и так, что в новой статье есть ошибка. Если она маленькая, то скорее всего вы сможете ее поправить и все равно опубликовать статью. Если она серьезная, вы можете забросить эту тему и перейти к новой, чтобы оправдать свое существование. Иногда можно исправить даже катастрофическую ситуацию. Эндрю Уайлс сделал большую ошибку в своем первом доказательстве Великой теоремы Ферма (см. разд. 11.8). Ему пришлось потратить целый год на то, чтобы исправить ее, но в конце концов он сделал это. И снял урожай наград.

11.10.1 Разочарование и непонимание

По-видимому, самая горькая и часто непоправимая ситуация возникает тогда, когда вы уверены, что ваша новая статья верна, но мир не принимает ее. Вы верите, что вы дали bona fide доказательство значительного нового результата, но математическое сообщество не верит в это доказательство. Если вы в такой ситуации, то вам повезло, если кто-то

[1] Например, в 2006 г. Теренс Тао из UCLA получил Филдсовскую медаль — у него было много важных новых идей. UCLA, конечно же, хорошее заведение, но оно идет только 26-м в рейтинге «U. S. News and World Report». Великие идеи и блестящие умы встречаются всюду.

сядет рядом с вами и укажет на ошибку. Но чаще всего мир просто игнорирует статью, в которую не верит, и шествует мимо.

А где остаетесь вы? Вы можете дать цикл лекций и попытаться убедить всех, что с вашим результатом все в порядке. Но дело в том, что математика проверяется очень специальным и очень точным образом: какие-то математики садятся и читают вашу работу. Они или верят в нее, или нет. И в последнем случае вы попадаете в очень неловкую ситуацию.

Все это сказано, чтобы подготовить сцену для нескольких очень знаменитых случаев, когда люди писали значимые статьи или книги, решали важные задачи, а потом обнаруживали, что математический профессиональный мир не хочет принимать или одобрять работу. В большинстве этих случаев авторы испытывали горечь, несчастье и разочарование. Иногда меняли направление исследований. А иногда даже вовсе прекращали заниматься математикой.

- В 1969 г. Альфред Адлер из Нью-Йоркского государственного университета в Стоуни Брук опубликовал в Американском математическом журнале статью [ADL1], в которой показал, что шестимерная сфера не обладает структурой комплексного многообразия. Комплексные многообразия — это поверхности, обладающие некоторыми важными алгебраическими и аналитическими свойствами. Они играют значительную роль в дифференциальной геометрии и математической физике. Но конкретные примеры комплексных многообразий построить сложно. Шестимерная сфера действительно была бы интересным и значительным примером, если бы обладала комплексной структурой. Адлер утверждал, что это не так. Он опубликовал свою статью в серьезном журнале, а это предполагает, что она удовлетворила референта с самыми строгими стандартами.

  Но никто не принял доказательство Адлера. На протяжении 39 лет он считал свое доказательство верным. Сейчас он удалился от дел и больше не участвует в математической жизни. Но после 1969 г. он не написал ни одной статьи[1)]. И на протяжении этих 39 лет никто не мог ткнуть пальцем в ошибку. Наконец, лет 5 назад Юм Тонг Сиу из Гарварда написал статью, в которой объяснил, где именно была ошибка. Но статью Адлера никто уже не поправил, и до сих пор никто не знает, верно его утверждение или нет.

[1)]В 1972 г. Альфред Адлер опубликовал в еженедельнике «Нью-Йоркер» замечательную статью [ADL2] о том, что это значит — быть математиком. Она отдает горчинкой, — значительное разочарование профессией видно. Можно только предположить, что здесь проступает негативный опыт Адлера со статьей 1969 г.

- В 1993 г. Ву Йи Хсианг обнародовал свое решение задачи Кеплера об упаковке сфер (эту задачу мы подробно обсуждали в разд. 10.3). Он опубликовал его в журнале, редактором которого был сам, так что можно ожидать благодушного отношения к этой статье со стороны журнала. В том смысле, что статья могла и не проходить строгого реферирования. Еще до публикации некоторые эксперты возражали против рассуждений Хсианга. В своей статье он утверждал, что нашел «самый плохой случай» упаковки сфер, а затем проанализировал этот самый случай. Экспертам это рассуждение не показалось ни полным, ни убедительным. Но Хсианг верил в свой подход и решил опубликовать работу. У него получилось. Его подход опирался на традиционную математику — он воспользовался методами сферической тригонометрии. Каждый желающий может прочитать статью и проверить ее. Эксперты так и сделали, и в конце концов не сочли ее доказательством. Но Хсианг не отказался от своих идей. В 2001 г. он опубликовал книгу [HSI3], в которой объяснил свой подход к задаче.

  Тем временем Томас Хэйлс (опять-таки — мы с ним встречались в разд. 10.3) придумал свое доказательство гипотезы Кеплера об упаковке сфер. Его опубликовали в престижных Анналах математики [HAL2] и долго проверяли. Но рассуждения Хэйлса в значительной мере опираются на большие по объему и времени компьютерные вычисления, которые не поддаются проверке человеком. В наше время существуют методики проверки компьютера вторым компьютером, и Хэйлс организовал проект проведения такой проверки. Он обещал подготовить статью к концу 2011 г.
- В 1978 г. Клингенберг опубликовал статью, а за ней две книги (см. [KLI1]–[KLI3]), в которых утверждал, что любая замкнутая и ограниченная поверхность в пространстве имеет бесконечно много различных замкнутых геодезических. *Геодезическая* — это линия наименьшей длины. Например, на плоскости кривая наименьшей длины, соединяющая две точки — это прямая. На сфере или на глобусе кривая наименьшей длины, соединяющая две точки, — это дуга большого круга (*большие круги* получаются, когда сферу пересекает плоскость, проходящая через центр). Когда самолеты летят, скажем, из Лос-Анжелеса в Париж, они летят вдоль больших кругов. Клингенберг — видный математик, всю свою научную жизнь посвятивший геодезическим. Он открыл много важных фактов и был лидером в своей области. Но общество не приняло его доказательства.

  У этой задачи длинная история. В 1914 г. никто иной как сам Биркгофф доказал существование хотя бы одной геодезической для любой метрики на замкнутой сфере. Двадцать лет спустя Люстерник и Шнирельман доказали, что сфера в трехмерном пространстве, снабженная любой римановой метрикой, имеет по крайней мере три геодезических. Примерно в то же время было доказано, что любая замкнутая ограниченная поверхность (с произвольной метрикой) имеет по крайней мере одну замкнутую геодезическую. Позднее, в 1960-х и 1970-х гг. Громолл, Мейер и Салливан показали, что поверхность с достаточно сложной топологией должна иметь бесконечно много различных геодезических. Вопрос для поверхностей с простой геометрией (топологией) оставался открытым. Тут-то и пришел Клингенберг. Он утверждал, что, пользуясь глубокими идеями теории Морса, смог ответить на вопрос. Но он не смог убедить в этом мир.

Математик Фридрих Хирцебрух проводит в Бонне ежегодные конференции под названием Arbeitstagungen. Они проходят довольно необычно. В первый день конференции собираются *все* участники и обсуждают, кто и почему будет выступать. После того как Клингенберг обнародовал свой результат, его пригласили на Arbeitstagungen. Но слушатели устроили ему тяжелое испытание, засыпав вопросами и ставя под сомнение различные этапы его доказательства. Доныне нет единого мнения, корректно ли доказал Клингенберг это важное утверждение. И в этом вопросе так и нет никакого прогресса, хотя Бангерт и Франкс выступили с новым подходом к этому вопросу. Им удалось получить результат о двумерной сфере в трехмерном пространстве.

- В разд. 10.4 мы уже рассказывали историю о программе геометризации Уильяма Тёрстона. Это одна из блестящих новых идей в геометрической топологии, из нее следует знаменитая гипотеза Пуанкаре. В конце концов Тёрстон смог дать доказательство программы для многообразий Хакена и для некоторых других частных случаев. Полное доказательство программы, с точки зрения ее создателя, так и не было построено. Хотя многие верят, основываясь на априорных суждениях и плане доказательства, представленном Тёрстоном, что Тёрстон установил самую настоящую теорему, в целом мир до сих пор ожидает подробностей. Новые рассуждения Григория Перельмана (см. разд. 10.5) могут решить этот вопрос раз и навсегда. Но прежде чем мы убедимся в этом, должно пройти некоторое время.
- В 1997 г. умер Фредерик Альмгрен, оставив после себя 1728-страничную рукопись, содержащую доказательство одной очень важной теоремы о регулярности для минимальных поверхностей. Такие поверхности служат моделью для мыльных пленок, полимеров и многих

других явлений природы. Альмгрен был выдающимся математиком, пионером в своей области и профессором в Принстонском университете. Априори многие склонны верить в теорему Альмгрена. Однако переварить все 1728 страниц плотной и технической математики — задача неподъемная. Двое его учеников, Владимир Шеффер и Джин Тейлор (она к тому же жена Альмгрена) опубликовали после смерти Альмгрена его рукопись в виде книги [ALM]. Но может пройти еще много времени, прежде чем эта работа пройдет обыкновенную процедуру проверки и получит общее признание.

- Мы завершим этот раздел рассказом об одном доказательстве, которое привело к настоящей схватке. Случилось это более 50 лет назад, но чувство горечи все еще не растаяло. Два главных участника — оба видные математики. Но в этом вопросе каждый занял свою позицию, и их эмоции все еще дымятся. Вопрос здесь *не* в том, верно доказательство или нет, а в том, чье оно.

Как-то раз в 1948 г. Пол Эрдёш, который гостил в Институте перспективных исследований, встретился с Атле Сельбергом (1917–2007), который работал там постоянно. У Сельберга была многообещающая идея о том, как построить элементарное доказательство теоремы о простых числах (такое, которое не опирается на сложный анализ). Ему недоставало только одной леммы, чтобы завершить свое рассуждение (см. разд. 11.1).

На следующий день Пол Эрдёш смог предоставить Сельбергу нужную лемму. Позднее Сельберг смог так изменить свое доказательство, что в лемме Эрдёша уже не было нужды. К несчастью, между Сельбергом и Эрдёшем разгорелся ужасный спор о приоритете. Сделав такой серьезный вклад, Эрдёш попросту предложил Сельбергу написать совместную статью. У Сельберга, который никогда в жизни ни с кем не писал совместных статей, были совсем другие планы.

Одна версия этой истории гласит, что как-то раз Сельберг посетил другой университет. Он сидел в чьем-то кабинете и болтал с хозяином, а в это время зашел другой математик и сказал: «Я только что получил открытку, что Эрдёш и какой-то норвежский парень, о котором я никогда не слыхал, получили элементарное доказательство теоремы о простых числах». Сельберг не на шутку разозлился и решил написать о результате в одиночку.

Дориан Гольдфельд (р. 1947) взял на себя труд поговорить с живыми участниками или свидетелями вендетты между Эрдёшем и Сельбергом. Ясно, что там не было ни правых, ни виноватых. И Эрдёш, и Сельберг сделали свой вклад в это важное открытие, но их эго и стили в значительной мере противоречили друг другу. Ирвинг Капланси (1917–2006) в те дни тоже гостил в Институте перспективных исследователей и своими глазами видел эту вендетту. Он рассказал мне, что в какой-то момент зашел к Эрдёшу и сказал: «Пол, ты всегда говорил, что математика — это часть общественного достояния. Никто не владеет теоремами. Они открыты для каждого, кто готов их познавать и развивать. Зачем же ты продолжаешь эту битву с Сельбергом? Почему не оставишь его в покое?» И Эрдёш ответил: «Да, но это же первоклассная теорема!»

Сейчас, когда заходит речь об элементарном доказательстве теоремы о простых числах (в книгах, в статьях или в частных беседах), упоминают оба имени — и Эрдёша, и Сельберга. Люди избегают тыкать пальцем или принимать чью-то сторону. Но иногда проскальзывает самая ужасная дезинформация. В биографии [HOF] Эрдёша автор утверждает, что Сельберг «украл» у Эрдёша медаль Филдса. Это абсурдно. Сельберг заслужил медаль Филдса по многим причинам, и все равно получил бы ее, вмешался бы Эрдёш в историю или нет. (Эрдёш был выдающимся математиком, но все же не уровня Филдсовского медалиста.)

Глава 12

ДЖОН ХОРГАН И «СМЕРТЬ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА?»

Если, как говорят, сор в глазах
Не даст мне говорить мудро,
Я все равно не откажусь от доказательства,
Как бы оно ни ошеломляло.

— Роберт Фрост

Мы говорим здесь о теоретической физике, и поэтому, конечно, математическая строгость не имеет значения и недостижима.

— Эдмунд Ландау

С рожденья нам присуща глупость: мы принимаем парадокс за открытие, метафору за доказательство, поток слов за источник абсолютных истин, а самих себя — за пророков.

— Поль Валери

И почему же, Господи, дважды два четыре?

— Александр Поуп

Чтобы предвидеть будущее математики, есть только один метод: изучать ее историю и настоящее.

— Анри Пуанкаре

12.1 ТЕЗИС ХОРГАНА

В 1993 г. Джон Хорган, штатный колумнист журнала Scientific American, опубликовал статью под названием «Смерть доказательства?» [HOR1]. В ней автор утверждал, что математические доказательства больше не играют прежней роли в современном мышлении. В его рассуждении было несколько составляющих, и все они заслуживают того, чтобы мы их здесь рассмотрели.

Во-первых, в Йельском университете Хорган был учеником литературного критика Харольда Блума. Один из его главных тезисов — в *литературном* контексте — что нет ничего нового под луной. Любое важное и восхваляемое произведение современной литературы восходит к классикам — Шекспиру или Чосеру, или Спенсеру, или Драйдену, или еще какому столпу литературы, которому 400 лет от роду. Хорган решил обуть в эти же башмаки современные научные труды. Он заявил, что Исаак Ньютон и другие великие умы трехсотлетней выдержки высказали уже все великие идеи, а мы только движемся по накатанной и производим идеи второго эшелона.

Второе направление в рассуждении Хоргана — что компьютеры научились делать гораздо более эффективнее то, чем традиционно занимались только люди — т. е. *думать*. Иначе говоря, динозавр от математики может говорить сколько угодно, что глубокие прозрения в математике могут быть открыты, проработаны и проверены (читай доказаны) только человеком с традиционным математическим образованием. Джон Хорган утверждал, что компьютер сделает это лучше, гораздо эффективнее и намного быстрее.

Третья составляющая Хорганова рассуждения — математические доказательства стали настолько сложными (посмотрите на доказательство Уайлса Великой теоремы Ферма — оно занимает целый выпуск Annals of Mathematics), что их все равно никто не понимает. Как они могут играть сколько-нибудь значительную роль в развитии современной математики?

В рассуждениях Хоргана есть слабина — он мыслит как литературный критик и рассуждает по аналогии. С тезисом Харольда Блума можно соглашаться или нет (например, из какого классического произведения вырос «Вопль» Аллена Гинзбурга? Или «Поминки по Финнегану» Джеймса Джойса?). Но нет никаких оснований применять его к современному научному прогрессу. Возьмем только один пример. Исаак Ньютон был великим мыслителем. Он создал современный научный метод, он придумал математическую физику, он (на пару с Лейбницем) изобрел анализ и разработал самый мощный набор научных аналитических методов из всех когда-либо применявшихся. Может случиться так, что гений, равный Ньютону, уже никогда не родится. Но каждое поколение научных работ опирается на плечи предыдущих гигантов. Было бы крайне сложно доказать, что теория относительности — всего лишь производная работ трехсотлетней давности. Или что квантовая теория вытекает из идей Максвелла. Или что теория струн восходит к работам Ферма.

Более того, хотя в аккуратном и быстром манипулировании данными с компьютерами никто не сравнится, они не могут думать, по крайней мере так, как люди. Программы искусственного интеллекта — это попытка научить компьютер решать задачи, с которыми справляется человек. В этом направлении имеется значительный прогресс, но они все еще довольно элементарны. Они даже не начали приближаться к мощи и глубине чего-либо подобного доказательству Уайлса Великой теоремы Ферма.

Нельзя не согласиться с Хорганом, что математические доказательства стали весьма сложными. Еще двести лет назад публикуемые математические статьи были довольно короткими, а доказательства редко занимали больше десятка страниц. Сегодня они куда изощреннее, математика стала более широким, более сложным и неприступным предприятием, и да, математические статьи занимают по 50 и более страниц, а доказательства в них чрезвычайно сложны. Но было бы заблуждением утверждать, что их не в состоянии проверить другие математики. Они делают это. Это чудовищная работа, но результат важен, и если доказательство вводит значимые новые техники, то люди потратят время на изучение и проверку работы. Доказательство Уайлса изучало много народа, так что можно быть уверенным в его корректности. Более того, некоторые части доказательства удалось упростить. Есть важные обобщения Великой теоремы Ферма, такие как гипотеза ABC, которая дает новый взгляд на всю задачу и без сомнения приведет к дальнейшему упрощению.

Математика — это процесс, вехами которого становятся решения великих задач и открытия новых потрясающих теорем. Со временем большие сложные идеи потихоньку перевариваются и перерабатываются, органически встраиваются в инфраструктуру науки. В конце концов, они упрощаются и становятся естественными и понятными. Гаусс за много лет до Бойяи и Лобачевского открыл неевклидову геометрию. Он не распространял и не публиковал своих идей, поскольку чувствовал, насколько они умозрительны; никто не понял бы их. А сейчас о них можно рассказывать старшеклассникам. Интеграл Коши, теория Галуа, интеграл Лебега, теория когомологий и многие другие идеи современной математики считались сложными и недоступными в момент открытия. А сейчас их преподают студентам.

Статья Хоргана взбаламутила математическое сообщество. Все чувствовали необходимость ответить автору, опровержение появилось в [KRA1]. В моей статье я провозглашаю те же идеи, что здесь, только гораздо подробнее. Можно сказать, что математическое сообщество проверило аргументы Хоргана и отвергло их.

Но Хорган переработал свой тезис в нечто более весомое. Он опубликовал книгу под названием «Конец науки» [HOR2]. В ней развиты многие темы из статьи в Scientific American. В этой книге автор утверждает, что настал конец научным исследованиям. Все великие идеи уже был открыты до 1900 г., а то, что мы делаем сейчас, — только симуляция, этакий способ выжимать из правительства деньги для грантов Национального научного фонда.

Это новое заявление Хоргана напоминает попытки закрыть Патентное бюро Соединенных Штатов, повторявшиеся в XIX и начале XX вв. под лозунгом, что все уже изобретено и бюро теперь не у дел. Даже в последние 35–40 лет число новых изобретений поражает: от персонального компьютера и сотового телефона до сегвея. Как и раньше, в своей книге Хорган допускает ошибку рассуждения по аналогии. Например, он размышляет о том, что вы видите, если автомобиль несется прямо на кирпичную стену. В последние секунды кажется, что стена приближается все быстрее. Точно так же, рассуждает Хорган, кажется, что научный прогресс несется вперед с экспоненциально возрастающей скоростью, поскольку он несется прямо на кирпичную стену (туда, где нет прогресса).

Такие аргументы трудно принимать всерьез. Этакие рассуждения, хотя и общепринятые в контексте литературной теории, не несут смысловой нагрузки в науке. По-видимому, наука переживает золотой век. Проект генома открывает множество новых путей. Теория струн в действительности меняет лицо физики. Существует так много направлений в инженерном искусстве, включая биоинженерию, что нет никакой возможности их описать. Химия с ее новыми полимерами и синтетическими материалами меняет нашу жизнь ежедневно.

12.2 ОСТАНЕТСЯ ЛИ «ДОКАЗАТЕЛЬСТВО» КЛЮЧЕВЫМ ЗНАКОМ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРОГРЕССА?

Огромное преимущество традиционного математического доказательства в том, что это окончательное средство проверки и подтверждения высказываний. Утверждение, которое доказано сегодня методами, введенными Евклидом в его «Началах», останется верным и через тысячу лет. Меняются моды, меняются ценности, меняются цели — но ничто не влияет на обоснованность математического доказательства. Новые открытия не отменяют старых, если те доказаны.

По этой причине математическое доказательство остается стандартом, к которому мы все стремимся. В то же время мы допускаем и ценим другие подходы. Математические доказательства по традиции не имеют большого веса в физике или инженерии. Эвристические рассуждения обычно не ценятся высоко на математических факультетах. Как мы уже говорили в начале книги, доказательство — это психологический инструмент, позволяющий убедить другого человека в истинности чего-либо. Если вместо «другого человека» поставить слова «математика с традиционным образованием», то скорее всего, желательное доказательство — традиционное. Логические аргументы в евклидовом стиле. Если же вместо «другого человека» окажется «специалист по современному численному анализу», то его скорее убедит длинное и очень точное компьютерное вычисление.

Заметьте, что ни один из этих двух сценариев не отменяет другого. Они служат двум разным целям; они оба пытаются привести два различных типа людей к общему знаменателю. Если приглядеться, эти сценарии дополняют друг друга.

Один из краеугольных тезисов этой книги в том, что «доказательство» — традиционная, евклидовдохновенная, бритвенно-острая цепь рассуждений, непреклонно ведущая к точному заключению — бессмертно. Его изобрели с очень специальной целью, и оно соответствует ей безупречно. Но этот способ мысли и проверки утверждений помещен теперь в новый контекст. Это очень устойчивый, поддерживающий и стимулирующий контекст, который только *помогает* нашим целям. Он возвышает наше понимание. Он увеличивает наш оружейный арсенал. Он делает нас сильнее.

Глава 13

НА ПОСОШОК

Физика дает математике много прекрасных возможностей и новых начинаний, но математике нет нужды копировать стиль экспериментальной физики. Математика опирается на доказательство, а доказательство незыблемо.

— Саундерс Маклейн

Математика стремится снизить сложность до приемлемого уровня, а также выявить структуру там, где никаких структур не видно.

— Майкл Ашбахер

Не хватает только доказательства.

— Джон Милнор

Никогда не учите свинью петь. Вы разочаруетесь, а свинья разозлится.

— Аноним

В жизни есть две хороших вещи: заниматься математикой и преподавать ее.

— Симеон Дени Пуассон

…записать очень длинное и сложное рассуждение без ошибок невозможно, так что можно ли «доказательство» называть доказательством?

— Майкл Ашбахер

13.1 ЧТО ВАЖНОГО В ДОКАЗАТЕЛЬСТВАХ

До эпохи доказательств, лет 2600 тому назад, математика была наукой эвристической и феноменологической. В основном (хотя и не исключительно) она отвечала практическим нуждам землемерия, торговли и подсчетов, а необходимости в теории или строгих рассуждениях, казалось, не было. Только с явлением абстрактной математики — математики самой для себя — стало ясно, почему важны доказательства. И действительно, они лежат в основе наших взглядов на науку сегодня.

Сейчас в мире насчитываются десятки тысяч математиков. Скажем, «Заметки Американского математического общества» выходят тиражом около 30 000 экземпляров. А реальный круг читателей еще шире. Абстрактная математика — вполне устоявшаяся дисциплина. Те, кто обладает продвинутыми познаниями в математике, не стали бы говорить, что в ней больше нет места доказательствам. Доказательство — сердце нашей науки; благодаря ему она еще тикает. Как сердце бейсбола — координация движений рук и глаз, как сердце инженерии — практическая техническая идея, как сердце живописи — чувство цвета и эстетика, так способность ценить и создавать доказательства — в сердце математики.

Если бы кто-нибудь вынул из математики все доказательства, что бы в ней осталось? Описательный язык. Мы могли бы проверить прямоугольность треугольника, конгруэнтность фигур, параллельность прямых и пытаться что-нибудь вывести из этого. Мы могли бы разглядывать изображения фракталов и делать описательные замечания. Мы могли бы выводить на печать компьютерные данные и делать остроумные наблюдения. Мы бы могли пичкать компьютер численными данными и пытаться как-то их оценить. Мы могли бы любоваться компьютерной графикой. *Но это не математика.* Математика — это (i) придумывание новых идей и (ii) проверка этих идей с помощью доказательства[1]. Непреходящая и исконная ценность этой науки заключается в ее методологии, а методология — в доказательстве.

Подчеркнем еще раз, что доказательство выделяется среди методологий других наук своей независимостью от времени. Грандиозная идея в компьютерных науках через пару лет легко может превратиться в старомодную. Языки SNOBOL и COBOL в 1960-х гг. были прорывом, а теперь про них никто не помнит. В 1970-х гг. стандартным языком для научных вычислений был фортран. Сейчас его вытеснили C и C++, именно они используются «по умолчанию». Но современные версии фортрана, такие как фортран-90, фортран-95 и фортран-2000 до сих пор в ходу.

То же самое в медицине. Может быть, вы помните, что радиальная кератотомия некоторое время была самым передовым методом хирургической коррекции зрения. Этот период длился всего пару лет, до тех пор пока медики-ученые не осознали, что не могут в точности предсказать долговременные эффекты этой процедуры. *На смену ей* пришла методика LASIK (laser-assisted in situ keratomileusis — лазерный кератомилез). Сейчас под сомнение попали долговременные эффекты LASIK, так что методика опять будет переоценена.

Искусственное сердце создали потому, что пациенты отказывались от трансплантированных сердец. Но сейчас доктора научились убеждать пациентов соглашаться на трансплант, так что искусственные сердца вызывают меньше интереса. Долгое время рентгеноскопия была главным средством диагностики. Мы знаем, что она все еще применяется, но во многих случаях ее заменили магнитно-резонансная томография или другие новые технологии создания изображений.

---

[1] К математике относится все перечисленное и еще много чего. Эта книга и призвана изобразить математику как многоликое существо. В нынешнем мире математика — это доказательства и алгоритмы (доказанные и эвристические), теории, методики, подходы, гипотезы, модели и много других обличий, которые возникают ежедневно.

Мы так подробно все это описываем, чтобы подчеркнуть, что в математике *не бывает* ничего подобного. Да, в математике есть свои моды и свои предубеждения. Но то, что в математике было верно однажды, останется верным навсегда. В свое время во всех высших учебных заведениях изучали сферическую тригонометрию; она входила в обязательную программу, как сейчас математический анализ. Потом она вышла из моды. Однако в 1993 г. Ву Йи Хсианг использовал сферическую тригонометрию, чтобы подойти к решению знаменитой задачи Кеплера об упаковке сфер. Так что интерес к сферической тригонометрии возродился. Гиперболическая геометрия была своего рода реликтом классической геометрии Римана до тех пор, пока в 1980-х гг. не пришел Билл Тёрстон и не сделал ее частью своей программы классификации трехмерных многообразий. Теперь все учат гиперболическую геометрию.

Подчеркнем, что никто никогда не считал сферическую тригонометрию и гиперболическую геометрию *неправильными*. Такого не могло случиться. Просто какое-то время было принято проходить мимо них. Все знали, что они существуют, и знали, для чего. Просто они не вызывали интереса. Было много других вещей поновее и поинтереснее, на которые хотелось потратить время. Но сейчас благодаря идеям выдающихся математиков старые знакомые вышли на передний край.

Доказательства в математике важны, поскольку они отмечают то, во что мы верим и на что можем положиться. Они не зависят от времени, они незыблемые и надежные. Они цементируют нашу науку и обращают ее во славу человеческой мысли.

13.2 ПОЧЕМУ ВАЖНО, ЧТОБЫ ПОНЯТИЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА РАЗВИВАЛОСЬ

Мы уже писали в этой книге, что наше представление о том, что такое доказательство, сформировали и развили древние греки 2500 лет тому назад. Они оставили нам в наследство замечательную и глубокую парадигму, от которой мы не отказались и в новом тысячелетии. Однако все идеи изменяются и развиваются. В конечном счете наша цель — достичь истины, понять ее, проверить эту истину, распространить ее и научить ей других. Долгое время в нашей профессиональной истории математики проживали жизнь у себя в голове. Их главный интерес — открыть новые знания и убедиться в их истинности. Разделить знания с другими — это во вторую очередь. Теперь наши взгляды и ценности изменились.

Сейчас математиков больше, чем было за все время с 500 до н. э. и до 1950 г. Многие математики работают в колледжах и университетах, которых уже более 4100 (2474 с четырехгодичным обучением и 1666 с двухгодичным) только в одних Соединенных Штатах Америки; и еще больше нескольких тысяч учреждений высшего образования во всем мире. В одной Америке в наших колледжах и университетах обучаются 17,5 млн студентов. Кроме того, много тысяч математиков заняты в индустрии, в правительственных исследовательских организациях (таких как Лос-Аламос и Оук-Ридж), в научных лабораториях всех мастей. Математика столь *многообразна* и *всепроникающа*, что коммуникация между математиками различных типов становится насущной необходимостью.

Представление о том, что значит быть математиком, развивалось со временем. Не так давно математиком считался эксперт в евклидовой геометрии, ньютоновом математическом анализе, векторном анализе Гиббса и еще в нескольких хорошо известных областях. А сейчас существует много типов математиков, которые могут иметь разную подготовку. Одни работают в проекте генома. Другие на НАСА. Третьи на аэрокосмическую корпорацию. Некоторые работают на Национальное агентство безопасности и многие на Уолл Стрит. Они часто говорят на разных языках и у них бывают различные системы ценностей. Чтобы математики различных школ могли общаться эффективно, нужно точно знать, какие подходы к своей работе они используют. Какие задачи они решают? Какие типы ответов ищут? Как оценивают свою работу? Какими инструментами пользуются?

По этим причинам важно, чтобы математическое сообщество имело формальное признание изменяющейся и развивающейся природы математического доказательства. Классическое понятие доказательства, воспринятое нами у Евклида и Пифагора, — это фундамент наших процедур аналитического мышления. Большинству профессиональных математиков не понравилось бы, если бы мы отказались от концептуального фундамента нашей науки. На развитие нашей мысли *влияют* много разных точек зрения, много разных процессов, много разных видов вычисления, много разных источников знания. И мы приветствуем их всех. Никогда не знаешь, с какой стороны придет новая идея или какие плоды она принесет. Хорошие идеи драгоценны и труднодоступны, так что не стоит закрывать пути для них или отказываться от каких бы то ни было возможностей.

Наше понятие «доказательства» будет развиваться и меняться. Мы можем многое узнать, проследив за этой эволюцией математической мысли, и это следует сделать. Явление компьютеров позволило нам увидеть то, что раньше было недоступно (используя компьютерную графику и методы построения изображений), позволило проводить немыслимые прежде эксперименты «а что если…». Развитие и расцвет математического сотрудничества — и внутри, и вне профессионального сообщества —

создали новые возможности и научили нас новым способам коммуникации. Мы овладели новыми языками. Научиться разговаривать с инженерами нелегко, но у этого процесса есть свои плюсы: появляется возможность узнать о новых задачах. То же относится к физикам, компьютерным специалистам, биологам и медикам.

Заниматься математикой в XXI в. здорово потому, что это открывает много дверей, а закрывает лишь несколько. Мир становится более математическим, и этот факт осознается всеми. Общепризнанно, что математики обладают навыками критического мышления и умеют решать задачи. В учебных заведениях для адвокатов, медиков и многих других любят брать в аспирантуру математиков, поскольку знают, что они умеют думать. Способность анализировать математические аргументы (т. е. *доказательства*) и решать математические задачи — это талант, который работает во многих различных областях и находит применение в самых разных ситуациях.

13.3 ЧТО БУДУТ НАЗЫВАТЬ ДОКАЗАТЕЛЬСТВОМ ЧЕРЕЗ 100 ЛЕТ?

Все более очевидно, что деление на инженеров, математиков и физиков становится все более размытым. Широко распространившееся сотрудничество между этими различными группами снимает преграды и открывает пути коммуникации. Хотя исторически сложилось, что математик — почетная и уважаемая профессия, представляющая вершину человеческой мысли, сейчас мы можем поместить эту модель в более широкий контекст.

Похоже, что лет через 100 мы будем говорить не о математиках как таковых, а о *математических ученых*. К ним, конечно же, будут относить традиционных чистых математиков, но не только их, а всех, кто пользуется математикой в аналитических целях. Факультеты математики в колледжах и университетах постепенно сменятся факультетами математических наук.

У нас уже есть модель для такого типа образования в Калифорнийском технологическом институте (Калтехе). Там вовсе нет факультетов. Вместо них есть отделения — скажем, отделение физических наук, к которым относятся физика, математика и астрономия. Есть отделение наук о жизни, оно включает биологию, ботанику и некоторые другие. В Калтехе считают, что разделение на факультеты довольно искусственно и может привести к изоляции, к недостатку коммуникации среди людей, которые только выиграли бы от «перекрестного опыления». Для математики это своего рода симбиоз, который мы описывали в предыдущих абзацах.

Так во что превратится «доказательство» в следующем столетии? Есть все причины верить, что традиционное понятие чисто математического доказательства выживет как таковое. Но появятся еще и компьютерные доказательства, доказательства на основе физических экспериментов и числовых подсчетов. Автор этой книги участвовал в проекте, связанном с программой НАСА для космических челноков, в котором были задействованы математики, инженеры и компьютерные специалисты. Вклад одной группы — численный, аналитический или графический — стимулировал другую, и конечный результат представлял собой сложную ткань научных усилий, о нем можно прочитать в работах [CHE1] и [CHE2]. Такой тип сотрудничества, в наше время пока исключительный, станет все более и более общепринятым по мере расширения приложений математики и потребностей междисциплинарных исследований.

Сегодня на математических факультетах работают специалисты по компьютерной графике, инженерным задачам, численному анализу и дифференциальным уравнениям в частных производных. Все эти люди работают на стыке разных дисциплин, и формы их работы будут влиять на окружающих.

Математический факультет, открытый для междисциплинарных исследований, получает и производит больше, и для исполнения своего предназначения у него есть приятное разнообразие способов. Темы коллоквиумов открывают широкую панораму современных исследований. Такой факультет посещают коллеги с самой разной подготовкой и они открывают самые разные перспективы. Под руководством математиков пишут диссертации студенты с физических, инженерных, компьютерных и других факультетов. Мы уже видим, как это происходит со студентами, изучающими вейвлеты, гармонический и численный анализ. Эта тенденция продолжится и расширится.

Поэтому мы можем ответить на вопрос, поставленный в заголовке, так: «доказательство» выживет, но получит новые разнообразные значения. Традиционная идея доказательства будет процветать, поскольку будет взаимодействовать с другими способами проверки и одобрения. А другие дисциплины, по традиции не использующие математические доказательства, станут ценить этот способ интеллектуального дискурса[1)]. В конечном результате мы получим богатое взаимопроникновение математической науки и математической работы. И выиграют от этого все.

[1)]Повторим, что в некоторых из этих «других дисциплин» применение математического метода уже впечатляет. В дисциплинах «Передача и обработка сигналов» и «Передача и обработка образов» много тяжелой математики и многие результаты доказываются.

АЛФАВИТНЫЙ СПИСОК АВТОРОВ С КРАТКИМИ БИОГРАФИЯМИ

Абель, Нильс Хенрик (1802–1829). Один из величайших гениев в математике XIX в. Он умер молодым от бедности и нездоровья. Сегодня в его честь учреждена престижная Абелевская премия.

Адамар, Жак (1865–1963). Один из величайших специалистов в математическом анализе за последние 150 лет. Доказал теорему о простых числах. Великий гуманист.

Альберт, Адриан (1905–1972). Выдающийся алгебраист XX в. Работал на математическом факультете в университете Чикаго. Во время Второй мировой войны выполнял важные криптографические работы для армии.

Артин, Эмиль (1898–1962). Выдающаяся фигура в алгебре XX в. Профессор в Принстонском университете. Среди его учеников много обладателей докторских степеней. Его сын Мишель Артин — профессор математики в MIT.

Атанасов, Джон (1903–1995). Пионер в разработке компьютеров. Принимал участие в создании компьютера ABC.

Атья, Майкл (р. 1929). Один из величайших математиков XX в. Выдающийся специалист в геометрии, награжден медалью Филдса и Абелевской премией.

Байрон, Августа[1] (1815–1852). Дочь лорда Байрона, поэта. Программист аналитической машины Чарльза Беббиджа.

Байрон, лорд Джордж Гордон (1788–1824). Выдающийся поэт.

Банах, Стефан (1892–1945). Один из пионеров функционального анализа в Польше в 1920-х гг. Завсегдатай «Шотландского кафе», где регулярно собирались польские математики. Умер в немецком концлагере[2].

Бейкер, Х. Ф. (1866–1956). Историк математики, в частности, эксперт по Дж. Дж. Сильвестру.

Беркли, Джордж, епископ (1685–1753). Великий философ XVIII в. Специалист в метафизике и эпистемологии. Известен как критик математического анализа Ньютона.

Берри, Клиффорд (1918–1963). Один из создателей первого компьютера ABC.

---

[1] В русской литературе больше известна как Ада Лавлейс. — *Прим. перев.*

[2] Так в оригинале. Большинство источников сходятся на том, что Банах дождался поражения фашистов, но скончался от рака легких вскоре после того, 31 августа 1945 г. — *Прим. перев.*

Биркгофф, Джордж (1884–1944). Один из первых видных американских математиков. Известен своими работами по последней теореме Пуанкаре и доказательством общих эргодических теорем.

Бишоп, Эррет (1928–1983). Выдающийся специалист по математическому анализу XX в. Известен как отец конструктивного анализа.

Бойяи, Янош (1802–1860). Математик, один из создателей неевклидовой геометрии.

Бор, Харальд (1887–1951). Известный датский специалист по анализу XX в. Друг Г. Х. Харди. Знаменит своими работами о почти периодических функциях.

Боуз, Амар (1929–2013). Профессор электрической инженерии в MIT. Известен как создатель акустических систем BOSE.

Браге, Тихо (1546–1601). Учитель Иоганна Кеплера и выдающийся астроном. Собрал данные, которые позволили открыть три закона Кеплера.

Бранж, Луи де (р. 1932). Известный американский математик XX в. Знаменит тем, что доказал гипотезу Бибербаха.

Брауэр, Лёйтзен Эгберт Ян (1881–1966). Видный тополог XX в. Доказал теорему Брауэра о неподвижной точке, которую позднее отверг из соображений интуиционизма.

Бэббидж, Чарльз (1791–1871). Пионер в теории вычислительных машин. Изобретатель «аналитической машины». Выдвинул идею хранения компьютерных команд на карточках. Дочь лорда Байрона Августа программировала на машине Бэббиджа.

Вайнберг, Стивен (р. 1933). Видный американский физик. Получил Нобелевскую премию за изучение единого подхода к слабым взаимодействиям и электромагнитному взаимодействию между элементарными частицами.

Валле Пуссен, Шарль Жан Густав Николя барон де ла (1866–1962). Выдающийся специалист по анализу конца XIX и начала XX в. Один из тех, кто доказал теорему о простых числах. Первый и единственный обладатель медали Миттаг-Леффлера.

Ван Хао (1921–1995). Создатель одной из самых первых машин для доказательства теорем.

Варден, Бартель Леендерт ван дер (1903–1996). Видный датский алгебраист. Ученик Эми Нетер. Написал классический учебник алгебры. Доказал важный результат в теории Рамсея.

Вейерштрасс, Карл (1815–1897). Выдающийся немецкий специалист по анализу XIX в. Внес значительный вклад и в действительный, и в комплексный анализ. Особенно знаменит тем, что смог построить некоторые важные примеры. На его теоремы часто ссылаются.

Вейль, Андре (1906–1998). Один из величайших математиков XX в. Постоянный сотрудник Института перспективных исследований. Сделал значительный вклад в алгебраическую геометрию, теорию чисел, инвариантные интегралы, теорию многообразий Келлера и многие другие области математики. Его книги очень влиятельны.

Вейль, Герман (1885–1955). Выдающийся немецкий математик XX в. Особенно знамениты его работы по алгебре и теории инвариантов. Постоянный сотрудник Института перспективных исследований.

Винер, Норберт (1894–1964). Выдающийся американский специалист по анализу. Ученик Литлвуда. Много лет работал в MIT. Сделал значительный вклад в анализ Фурье, стохастические процессы. Придумал слово «кибернетика».

Виноградов, Иван Матвеевич (1891–1983). Один из отцов современной аналитической теории чисел. Известен анализом экспоненциальных сумм. На протяжении 49 лет руководил Математическим институтом имени Стеклова и был выдающимся лидером в советской математике.

Возняк, Стив (р. 1950). Сооснователь (наряду со Стивом Джобсом) компании «Apple». Изобретатель чипа памяти на 256K. Возняк был «техническим талантом», запустившим в плавание «Apple».

Вольфрам, Стивен (р. 1959). Вундеркинд в математике и физике. Самый молодой получатель стипендии Мак-Артура. Создатель программного обеспечения Mathematica. Автор книги «A New Kind of Science».

Галуа, Эварист (1811–1832). Знаменитый французский математический гений, умерший молодым. Создатель теории групп и теории Галуа.

Гамильтон, Уильям Роуэн (1805–1865). Видный британский физик, астроном и математик. Знаменит тем, что переформулировал Ньютонову механику. Гамильтониан назван в его честь.

Гарфилд, Джеймс (1831–1881). Президент Соединенных Штатов, построил много доказательств теоремы Пифагора.

Гаусс, Карл Фридрих (1777–1855). Один из величайших (наряду с Ньютоном и Архимедом) математиков всех времен и народов. Доказал основную теорему алгебры. Создал многие разделы теории чисел.

Гейзенберг, Вернер (1901–1976). Отец квантовой механики. Величайший физик XX в.

Гельбарт, Авраам (1912–1994). Замечательный математик, который никогда не имел диплома о высшем образовании. Протеже Норберта Винера.

Генри, Джозеф (1797–1878). Один из основателей университета Джона Хопкинса.

Гёдель, Курт (1906–1978). Один из величайших логиков всех времен. Доказал знаменитую теорему Гёделя о неполноте. Изобрел рекурсивные функции.

Гилман, Даниэль Койт (1831–1908). Президент-основатель университета Джона Хопкинса.

Гильберт, Давид (1862–1943). Выдающаяся фигура в математике XX в. Эксперт во всех областях математики. Сделал серьезный вклад в геометрию, логику, алгебру и анализ. Лидер математического сообщества в Геттингене.

Гоббс, Томас (1588–1679). Знаменитый философ XVI в. Известен попытками создать математическую теорию этики.

Голдстин, Герман (1913–2004). Создал (вместе с Джоном фон Нейманом) первый электронный программируемый компьютер.

Голдфилд, Дориан (р. 1947). Математик Колумбийского университета. Автор истории про спор Эрдёша и Сельберга об элементарном доказательстве теоремы о простых числах.

Гольдбах, Кристиан (1690–1764). В его честь названа теоретико-числовая гипотеза Гольдбаха.

Горенштейн, Дэниэл (1923–1992). Важная фигура в современной теории конечных групп. Организатор проекта по полной классификации конечных простых групп.

Гротендик, Александр (р. 1928). Один из величайших математиков XX в. Отец теории ядерных пространств. Обладатель медали Филдса. Отец современной теории алгебраической геометрии. Один из основателей Института высших научных исследований.

Гук, Роберт (1635–1703). Известный математик и физик XVII в. Друг Исаака Ньютона. Закон Гука назван в его честь. Знаменит тем, что создал теорию упругости и придумал термин «клетка» (в ботанике).

Дельсарт, Жан (1903–1968). Один из основателей группы Бурбаки во Франции.

Джевонс, Уильям Стенли (1835–1882). Создатель «логического пианино» (одного из первых компьютеров).

Джобс, Стив (1955–2011). Один из основателей компании «Apple Computer». Создатель NEXT Computer, аймаков, айфонов и многих других высокотехнологичных новшеств.

Дирихле, Петер Густав Лежен (1805–1859). Один из величайших специалистов в теории чисел XIX в. Автор принципа Дирихле. Учитель Кронекера и Римана.

Дьедонне, Жан (1906–1992). Известный специалист по анализу и геометрии XX в. Учитель Александра Гротендика. Один из основателей Института высших научных исследований во Франции.

Дюбрейль, Поль (1904–1994). Один из основателей группы Бурбаки во Франции. Позднее покинул ее.

Жермен, Софи (1776–1831). Одна из величайших женщин-математиков всех времен. В ее честь названы простые числа Софи Жермен. Доказала важный результат о Великой теореме Ферма.

Жордан, Камилл (1838–1922). Великий геометр XIX в. Его имя носит теорема о жордановых кривых. Один из создателей теории классификации двумерных компактных поверхностей.

Зарисский, Оскар (1899–1986). Один из величайших специалистов по алгебраической геометрии XX в. В его честь названа топология Зарисского. Придумал концепцию «раздутия» (она привела к работе Хиронака по разрешению сингулярностей, которая заслужила медали Филдса). Зарисский был консультантом двух Филдсовских медалистов — Дэвида Мамфорда и Хэйсуке Хиронака.

Кантор, Георг (1845–1918). Отец теории множеств, известный теорией кардинальных чисел. Благодаря ему мы разбираемся в бесконечностях разных порядков.

Капланcки, Ирвинг (1917–2006). Знаменитый алгебраист XX в. Сделал значительный вклад в теорию групп, теорию колец, алгебру операторов и теорию полей. Был деканом математического факультете Чикагского университета и директором Института исследований в математических науках.

Карман, Теодор фон (1881–1963). Ученик Давида Гильберта, считается основателем современной инженерной аэронавтики. Его имя носит линия Кармана — условная граница между земной атмосферой и космическим пространством.

Картан, Анри (1904–2008). Известный специалист по комплексному анализу XX в. Великий гуманист и учитель.

Картан, Эли (1869–1951). Выдающийся геометр XX в. Отец теории дифференциальных форм и Анри Картана.

Кастельнуово, Гвидо (1865–1952). Известный итальянский специалист в алгебраической геометрии начала XX в. Автор важных работ по классификации алгебраических поверхностей.

Кельвин, лорд, Уильям Томсон (1824–1907). Знаменитый математик и физик. Работал над первым и вторым законом термодинамики и теорией электричества.

Кемпе, Альфред (1845–1922). Известен своей работой по теореме о четырех красках. В 1879 г. опубликовал ее доказательство, однако 11 лет спустя в нем была найдена ошибка. Его имя носят цепи Кемпе.

Кеплер, Иоганн (1571–1630). Один из величайших астрономов всех времен. Ученик Тихо Браге. Сформулировал законы Кеплера движения планет.

Килберн, Томас (1921–2001). Один из разработчиков запоминающей электронно-лучевой трубки.

Клейн, Феликс (1849–1925). Видный геометр XIX в. Коллега Давида Гильберта, отец Эрлангенской программы в геометрии. Его именем названа бутылка Клейна.

Колмар, Томас (1785–1870). Изобретатель первого механического калькулятора.

Колмогоров, Андрей Николаевич (1903–1987). Видный специалист по анализу XX в. Создатель современной теории вероятностей. Автор важных работ по рядам Фурье, стохастическим процессам и турбулентности. Многие его ученики стали выдающимися математиками, докторами наук.

Конн, Ален (р. 1947). Выдающийся деятель в области алгебр фон Неймана, награжден медалью Филдса.

Коши, Огюстен Луи (1789–1857). Выдающийся специалист по математическому анализу XIX в. Работал и в действительном, и комплексном анализе. Считается, что он сумел облечь анализ Ньютона в строгую форму.

Коэн, Пол Джозеф (1924–2007). Видный американский специалист по анализу. Доказал независимость континуум-гипотезы, награжден медалью Филдса.

Кронекер, Леопольд (1823–1891). Известный алгебраист XIX в. Ученик Дирихле, учитель Кантора. Исследовал разрешимость уравнений и непрерывность функций.

Крэй, Сеймур (1925–1996). Отец суперкомпьютеров и параллельных вычислений.

Кулон, Жан (1904–1999). Один из основателей группы Бурбаки во Франции.

Куммер, Эрнст (1810–1893). Известный алгебраист XIX в. Исследовал гипергеометрические ряды и абелевы многообразия. Доказал много частных случаев Великой теоремы Ферма.

Курант, Рихард (1888–1972). Ученик Давида Гильберта. Основатель Математического института в Геттингене и Института Куранта математических наук в Нью-Йоркском университете. Влиятельный специалист по анализу XX в.

Кэли, Артур (1821–1895). Британский чистый математик. Придал современный вид теории групп. Создал теорию матриц.

Лагранж, Жозеф Луи (1736–1813). Видный специалист в геометрическом анализе XIX в. Один из отцов небесной механики. Известен вкладом в вариационное исчисление, придумал множители Лагранжа.

Лебег, Анри (1875–1941). Отец теории меры. Видный специалист по анализу XX в.

Левинсон, Норман (1912–1975). Протеже Норберта Винера. Выдающийся специалист в математическом анализе, профессор MIT. Доказал значительный результат о нулях римановой дзета-функции.

Лейбниц, Готфрид Вильгельм фон (1646–1716). Выдающийся философ. Один из создателей анализа. Автор «Монадологии».

Лере, Жан (1906–1998). Известный геометр и алгебраист XX в. Ввел пучки и спектральные последовательности.

Лобачевский, Николай Иванович (1793–1856). Один из создателей (наряду с Бойяи) неевклидовой геометрии.

Мандельбройт, Шолем (1899–1983). Выдающийся специалист по математическому анализу XX в. Дядя Бенуа Мандельброта. Исследовал ряды Фурье.

Мандельброт, Бенуа (1924–2010). Отец теории фракталов. Его именем названо множество Мандельброта. Замечательный писатель, пропагандировал идею дробных размерностей и фрактальных размерностей.

Мёбиус, Август (1790–1868). Известный геометр XIX в. Его именем названа лента Мёбиуса. Доказал утверждение о классификации всех двумерных поверхностей.

Миттаг-Леффлер, Гёста (1846–1927). Видный шведский математик конца XIX и начала XX в. Основатель института Миттаг-Леффлера. Ученик Вейерштраса. Говорят, именно из-за него математикам не вручают Нобелевскую премию.

Мокли, Джон Уильям (1907–1980). Один из создателей компьютера ENIAC в Пенсильванском университете.

Морган, Огастес де (1806–1871). Видный логик XIX в. Знаменит законами де Моргана.

Морс, Марстон (1892–1977). Выдающийся специалист в геометрическом анализе XX в. Его имя носит теория Морса или исчисление вариаций в широком смысле. Почетный член Института перспективных исследований.

Неванлинна, Рольф (1895–1980). Выдающийся специалист в комплексном анализе XX в. Учитель Ларса Альфорса. Его именем названа теория Неванлинны.

Нейман, Джон фон (1903–1957). Видный американский (венгр по происхождению) специалист в математическом анализе. Автор современного подхода к квантовой механике, отец алгебр фон Неймана. Сделал значительный вклад в функциональный анализ, логику и многие другие области математики. Его считают отцом программируемых компьютеров.

Непер, Джон (1550–1617). Изобретатель логарифмов.

Нобель, Альфред (1833–1896). Изобретатель динамита. Богатый фабрикант. Основатель Нобелевской премии.

Ньюсон, Мэри Уинстон (1869–1959). Первая американская женщина, получившая степень доктора наук в Геттингенском университете. Она перевела на английский язык лекцию Гильберта о 23 проблемах, которую он прочел на Международном математическом конгрессе в 1900 г.

Ньюэлл, Аллен (1927–1992). Один из создателей машины теории логики, одного из первых инструментов для открытия и построения математических доказательств.

Оккам, Уильям (1285–1347). Философ XIV в. Создатель «бритвы Оккама», положения о том, что любая система логики должна быть как можно компактнее и изящнее.

Ом, Георг (1789–1854). Его имя носит закон Ома. Изучал электрический ток. Работал над усовершенствованием электрических батарей. Опубликовал работы по акустике.

Паскаль, Блез (1623–1662). Видный французский философ XVII в. Один из основателей теории вероятностей. Его именем назван треугольник Паскаля. Автор труда «Мысли».

Пенлеве, Поль (1863–1933). Видный специалист в анализе XIX–XX вв. Профессор Сорбонны. Изучал дифференциальные уравнения, гравитацию и комплексный анализ. Занимался политикой.

Перельман, Григорий (р. 1966). Выдающийся российский математик. Доказал гипотезу Пуанкаре.

Пирс, Бенджамин (1809–1880). Профессор математики в Гарвардском университете. Работал в области небесной механики, теории чисел, алгебры и философии математики.

Поссель, Рене де (1905–1974). Один из основателей группы Бурбаки во Франции.

Правиц Даг (р. 1936). Создатель одной из первых машинных технологий доказательства теорем.

Пуанкаре, Анри (1854–1912). Один из величайших математиков XX в. Создатель теории динамических систем. Один из отцов топологии. Его имя носит гипотеза Пуанкаре, которую совсем недавно доказал Григорий Перельман.

Радемахер, Ганс (1892–1969). Выдающийся специалист в анализе и теории чисел, Пенсильванский университет. В 1945 г. объявил, что может опровергнуть гипотезу Римана, однако ошибся.

Рамануджан, Сриниваса (1887–1920). Великий математический гений из Индии. Работал с Харди, который открыл его почти случайно, в Кембриджском университете, в основном в теории чисел. Умер молодым по причине нездоровья.

Резерфорд, Эрнест (1871–1937). Выдающийся британский специалист в математической физике. Считается отцом ядерной физики, человеком, расщепившим атом. Получил Нобелевскую премию по химии в 1908 г. Выказывал скептицизм к теории относительности.

Риман, Бернхард (1826–1866). Великий специалист в математическом анализе XIX в. Внес значительный вклад в анализ, действительный и комплексный, и в геометрию. Создал поверхности Римана и геометрию, сыгравшую большую роль в общей теории относительности Эйнштейна. Умер молодым по причине нездоровья.

Савант, Мэрилин вос (р. 1946). Урожденная Мэрилин Мах, популярный газетный колумнист, прославилась тем, что у нее самый высокий IQ в мире. Замужем за Робертом Ярвиком, изобретателем искусственного сердца.

Саймон, Герберт Александер (1916–2001). Один из создателей машины теоретической логики, одной из первых машин, которая могла открывать и создавать математические доказательства.

Сельберг, Атле (1917–2007). Выдающийся норвежский специалист в аналитической теории чисел. Знаменит своим результатом о нулях дзета-функции, элементарным доказательством теоремы о простых числах, а также формулой следа Сельберга.

Серр, Жан-Пьер (р. 1926). Один из величайших алгебраистов и геометров XX в. Сделал значительный вклад в алгебраическую геометрию, алгебраическую топологию, теорию чисел и в другие области. Получил медаль Филдса, Абелевскую премию и другие награды.

Сильвестр, Джеймс Джозеф (1814–1897). Выдающийся алгебраист XIX в. Сыграл важную роль в развитии математики в университете Джона Хопкинса и в Америке в целом. Основатель Американского математического журнала.

Стоун, Маршалл (1903–1989). Выдающийся американский специалист в анализе XX в. Его имя носит теорема Стоуна—Вейерштрасса. Декан математического факультета в Чикагском университете.

Тарский, Альфред (1902–1983). Выдающийся польский логик. Много лет работал в калифорнийском университете в Беркли. Сыграл важную роль в развитии современной логики. Известен парадоксом Банаха—Тарского.

Тьюринг, Алан (1912–1954). Очень многие его считают одним из величайших математических гениев XX в. Он придумал машину Тьюринга и высказал основополагающие идеи по разработке ранних компьютеров. Во время Второй мировой войны выполнял важные криптографические работы. Умер молодым, отравившись.

Уильямс, Фредерик (1911–1977). Принимал участие в разработке системы памяти одного из первых компьютеров, известной как трубка Уильямса.

Уитни, Хасслер (1907–1989). Знаменитый специалист в геометрическом анализе XX в. Доказал важные результаты о многообразиях и продолжении функций. Постоянный сотрудник Института перспективных исследований.

Фейнман, Ричард (1918–1988). Знаменитый американский физик. Лауреат Нобелевской премии. Автор диаграмм Фейнмана и многих других важных идей в квантовой теории.

Феллер, Уильям (1906–1970). Виднейший специалист в теории вероятностей XX в. Профессор Принстонского университета.

Ферма, Пьер де (1601–1665). Величайший математик-любитель всех времен. Знаменитый член высшего суда в Тулузе, Франция. Видный специалист в теории чисел, автор Великой теоремы Ферма.

Фибоначчи (Леонардо Пизанский) (1170–1250). Знаменитый математик. Придумал последовательность Фибоначчи.

Франклин, Филип (1898–1965). Видный специалист по анализу Фурье. Протеже Норберта Винера.

Фреге, Готтлоб (1848–1925). Видимо, величайший логик XIX в. Свое письмо о знаменитом парадоксе Расселла Бертран Расселл направил именно ему.

Фурье, Жан Батист Жозеф (1768–1830). Отец рядов Фурье и аналитической теории теплоты. Видный специалист в математической физике.

Халмош, Пол Ричард (1916–2006). Выдающийся специалист по математическому анализу. Замечательный математический писатель и учитель. Автор многих знаменитых математических текстов.

Харди, Годфри Харольд (1877–1947). Великий специалист по математическому анализу XX в. Сотрудник Джона Литлвуда. Учитель С. Рамануджана.

Хивуд, Перси (1861–1955). Знаменит тем, что нашел ошибку в доказательстве Кемпа теоремы о четырех красках и сформулировал гипотезу Хивуда.

Холлерит, Герман (1860–1929). Создатель одной из первых вычислительных машин. Отец компании «International Business Machines» (IBM).

Цузе, Конрад (1910–1995). Создатель первого свободно программируемого компьютера Z1.

Шевалле, Клод (1909–1984). Видный американский специалист в геометрическом анализе XX в. Развил современную алгебраическую геометрию. Пионер в теории групп Ли.

Шовене, Уильям (1820–1870). Основатель Военно-морской академии США в Аннаполисе. А также математического факультета в Вашингтонском университете в Сент-Луисе. Был ректором Вашингтонского университета. Выполнил расчеты для моста Идса.

Шрёдингер, Эрвин (1887–1961). Один из отцов квантовой теории. Выдающийся австрийский физик. Широко известны волновое уравнение Шрёдингера и кот Шрёдингера.

Штейнгауз, Гуго (1887–1972). Выдающийся специалист в анализе XX в. Математический дедушка Энтони Зигмунда. Открыл принцип равномерной ограниченности и важные идеи в теории рядов Фурье.

Эйкен, Говард (1900–1973). Один из пионеров в разработке компьютеров. Создатель Гарвардской машины Марк I.

Эйлер, Леонард (1707–1783). Один из величайших математиков всех времен. Собрание его сочинений занимает 70 томов. Работал во всех областях математики, а также в физике, механике и инженерии.

Эккерт, Джон Преспер (1919–1995). Один из создателей компьютера ENIAC в Пенсильванском университете.

Энрикес, Федериго (1871–1946). Видный итальянский специалист в алгебраической геометрии XX в. Одним из первых дал классификацию алгебраических поверхностей в бирациональной геометрии.

Эрдёш, Пол (1913–1996). Знаменитый венгерский математик XX в. Работал во всех областях математики. Никогда не имел постоянного места работы и жительства. Автор 1500 статей. Благодаря ему появилось число Эрдёша.

Эресманн, Шарль (1905–1979). Один из основателей группы Бурбаки во Франции.

Эстерманн, Теодор (1902–1991). Автор важной работы, посвященной гипотезе Гольдбаха.

Якоби, Карл (1804–1851). Видный специалист по теории чисел XIX в. Известен своими работами в теории эллиптических функций.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[ADL1] *A. Adler*, The second fundamental forms of S^6 and $P^n(C)$ // Am. J. Math. 91(1969) — 657–670.

[ADL2] *A. Adler*, Mathematics and creativity // The New Yorker, 47(1972) — 39–45.

[AKS] *M. Agrawal, N. Kayal, N. Saxena*, PRIMES is in P //Annals of Math., 160(2004) — 781–793.

[ALM] *F. J. Almgren*, Almgren's Big Regularity Paper. Q-Valued Functions Minimizing Dirichlet's Integral and the Regularity of Area-Minimizing Rectifiable Currents up to Codimension 2, — World Scientific Publishing Company, River Edge, NJ, — 1200.

[APH1] *K. Appel, W. Haken*, A proof of the four color theorem // Discrete Math., 16(1976) — 179–180.

[APH2] *K. Appel, W. Haken*, Every planar map is four colorable // Illinois J. Mathematics, 21(1977) — 429–567.

[APH3] *K. Appel, W. Haken*, The four color proof suffices // Math. Intelligencer, 8(1986) — 10–20.

[APH4] *K. Appel, W. Haken*, Every Planar Map Is Four Colorable — American Mathematical Society, — Providence, RI, 1989.

[ASC] *M. Aschbacher*, Highly complex proofs and implications of such proofs // Phil. Trans. R. Soc. A 363(2005) — 2401–2406.

[ASM] *M. Aschbacher, S. Smith* // The Classification of Quasithin Groups, I and II — American Mathematical Society, Providence, RI, 2004.

[ASW] *T. Aste, D. Weaire*, The Pursuit of Perfect Packing — Institute of Physics Publishing, Bristol, U. K., 2000.

[ATI1] *M. Atiyah* Responses to Jaffe and Quinn 1994 // Bulletin of the AMS30(1994) — 178–207.

[ATI2] *M. Atiyah* Mathematics: Art and Science // Bulletin of the AMS, 43(2006) — 87–88.

[AVI] *J. Avigad* Proof mining // notes from ASL, 2004.

[BAB1] *D. H. Bailey, J. M. Borwein* Mathematics by Experiment — A K Peters Publishing, Natick, MA, 2004.

[BAB2] *D. H. Bailey, J. M. Borwein*, Experimental mathematics: examples, methods and implications // Notices of the AMS 52(2005), — 502–514.

[BAB3] *D. H. Bailey, J. M. Borwein*, Computer-assisted discovery and proof — препринт.

[BBCGLM] *D. H. Bailey, J. M. Borwein, N. J. Calkin, R. Girgensohn, D. R. Luke, V. H. Moll*, Experimental Mathematics in Action — A K Peters Publishing, Natick, MA, 2007.

[BBC] *D. H. Bailey, J. M. Borwein, R. E. Crandall*, Resolution of the Quinn–Rand–Strogatz constant of nonlinear physics — препринт.

[BBKW] *D. H. Bailey, J. M. Borwein, V. Kapoor, Eric Weisstein*, Ten problems in experimental mathematics // American Math. Monthly 113(2006) — 481–509.

[BIS1] *E. Bishop*, Foundations of Constructive Analysis — McGraw-Hill, New York, 1967.

[BIS2] *E. Bishop*, Schizophrenia in Contemporary Mathematics, — 1973, подробности неизвестны.

[BIB] *E. Bishop, D. Bridges*, Constructive Analysis // Springer-Verlag, NewYork, 1985.

[BIC] *E. Bishop, H. Cheng*, Constructive Measure Theory — American Mathematical Society, Providence, RI, 1972.

[BOO] *G. Boolos*, Frege's theorem and the Peano postulates // Bulletin of Symbolic Logic 1(1995), — 317–326.

[BBGP] *J. Borwein, P. Borwein, R. Girgensohn, S. Parnes*, Making sense of experimental mathematics // The Mathematical Intelligencer 18(1996), — 12–18.

[BRE] *D. Bressoud* Proofs and Confirmations: The Story of the Alternating Sign Matrix Conjecture — Cambridge University Press, Cambridge, 1999.

[BRM] *R. Brooks, J. P. Matelski*, The dynamics of 2-generator subgroups of $PSL(2,\mathbb{C})$, Riemann Surfaces and Related Topics // Proceedings of the 1978 Stony Brook Conference — pp. 65–71, — Ann. of Math. Studies 97, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1981.

[BMAM] *A. Bundy, D. MacKenzie, M. Atiyah, A. MacIntyre*, The Nature of Mathematical Proof // Philosophical Transactions of the Royal Society A; Volume 363, Number 1835, October 15, 2005.

[CAH] *I. Cahit*, On the algorithmic proofs of the four color theorem, — препринт.

[CAZ] *H.-D. Cao, X.-P. Zhu*, A complete proof of the Poincaré and geometrization conjectures — application of the Hamilton–Perelman theory of the Ricci flow // Asian Journal of Mathematics 10(2006), — 165–498.

[CJW] *J. Carlson, A. Jaffe, A. Wiles*, The Millennium Prize Problems — American Mathematical Society, Providence, RI, 2006.

[CEL] *C. Cellucci*, Why proof? What is a proof? // *G. Corsi, R. Lupacchini*, Deduction, Computation, Experiment. Exploring the Effectiveness of Proof — Springer, Berlin, 2008.

[CHA1] *G. J. Chaitin*, Algorithmic Information Theory — Cambridge University Press, Cambridge and New York, 1992.

[CHA2] *G. J. Chaitin*, The Limits of Mathematics: A Course on Information Theory and the Limits of Formal Reasoning — Springer-Verlag, London, 2003.

[CHE1] *G. Chen, S. G. Krantz, D. Ma, C. E. Wayne, H. H. West*, The Euler–Bernoulli beam equation with boundary energy dissipation, in Operator Methods for Optimal Control Problems (Sung J. Lee, ed.) — Marcel Dekker, New York, 1988 — 67–96.

[CHE2] *G. Chen, S. G. Krantz, C. E. Wayne, H. H. West*, Analysis, designs, and behavior of dissipative joints for coupled beams // SIAM Jr. Appl. Math., 49(1989) — 1665–1693.

[CHO] *S.-C. Chou, W. Schelter*, Proving geometry theorems with rewrite rules // Journal of Automated Reasoning 2(1986) — 253–273.

[COL] *J. B. Conrey, Xian-Jin Li*, A note on some positivity conditions related to zeta and L-functions // Internat. Math. Res. Notices 18(2000) — 929–940.

[COS] *R. Constable*, Types in logic, mathematics and programming // Handbook of Proof Theory, S. Buss, ed. — North-Holland: Elsevier, Amsterdam, 1998.

[CON] *J. H. Conway, C. Goodman-Strauss, N. J. A. Sloane*, Recent progress in sphere packing // Current Developments in Mathematics, 1999 (Cambridge, MA) — 37–76, International Press, Somerville, MA, 1999.

[COO] *S. A. Cook*, The complexity of theorem-proving procedures // Proceedings of the 3rd Annual ACM Symposium on Theory of Computing — Association for Computing Machinery, New York, 1971 — 151–158.

[DAN] *G. B. Dantzig*, On the significance of solving linear programming problems with some integer variables // Econometrica 28(1957) — 30–44.

[DEB1] *L. de Branges*, Hilbert Spaces of Entire Functions — Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1968.
[DEB2] *L. de Branges*, A proof of the Bieberbach conjecture // Acta Math. 154(1985) — 137–152.
[DLP] *R. A. De Millo, R. J. Lipton, A. J. Perlis*, Social processes and proofs of theorems and programs // Communications of the ACM 22(1979) — 271–280.
[DEV1] *K. Devlin*, The Millennium Problems: The Seven Greatest Unsolved Mathematical Puzzles of Our Time — Basic Books, New York, 2003.
[EKZ] *S. B. Ekhad, D. Zeilberger*, A high-school algebra, «formal calculus», proof of the Bieberbach conjecture [after L. Weinstein] // Jerusalem Combinatorics 93 — 113–115 — Contemporary Math. 178, American Mathematical Society, Providence, RI, 1994.
[FTO] *L. Fejes T'oth*, On close-packings of sphere in spaces of constant curvature // Publ. Math. Debrecen 3(1953) — 158–167.
[FET] *J. H. Fetzer*, Program verification: the very idea // Communications of the ACM 37(1988) — 1048–1063.
[FIP] *C. Fitzgerald, C. Pommerenke*, The de Branges theorem on univalent functions // Trans. American Math. Society 290(1985) — 683–690.
[FRE1] *G. Frege*, Begriffsschrift und andere Aufsätze — Hildesheim, G. Olms, 1964.
[FRE2] *G. Frege*, Grundgesetze der Arithmetik, two volumes in one — Hildesheim, G. Olms, 1964.
[GAR] *M. Gardner*, The Second Scientific American Book of Mathematical Puzzles and Diversions — University of Chicago Press, Chicago, IL, 1987.
[GAJ] *M. R. Garey, D. S. Johnson*, Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness — W. H. Freeman and Company, San Francisco, CA, 1991.
[GON] *G. Gonthier*, Formal proof — the four-color theorem // Notices of the American Mathematical Society 55(2008) — 1382–1393.
[GLS] *D. Gorenstein, R. Lyons, R. Solomon*, The Classification of the Finite Simple Groups — American Mathematical Society, Providence, RI, 1994.
[GRA] *J. Gray*, The Hilbert Challenge — Oxford University Press, New York, 2000.
[GRT] *B. Green, T. Tao*, The primes contain arbitrarily long arithmetic progressions // Annals of Math. 167(2008) — 481–547.
[GRE] *M. J. Greenberg*, Euclidean and Non-Euclidean Geometries — 2nd ed., W. H. Freeman, New York, 1980.
[GRE1] *B. Greene*, The Elegant Universe — W. W. Norton & Co., New York, 2003.
[HAL1] *T. Hales*, The status of the Kepler conjecture // Math. Intelligencer 16(1994) — 47–58.
[HAL2] *T. Hales*, A proof of the Kepler conjecture // Annals of Math. 162(2005) — 1065–1185.
[HAL3] *T. Hales*, Formal proof // Notices of the American Mathematical Society 55(2008) — 1370–1380.
[HAL] *M. Hall*, The Theory of Groups — Macmillan, New York, 1959.
[HAR] *G. H. Hardy*, A Mathematician's Apology — Cambridge University Press, London, 1967.
[HER] *I. M. Herstein*, Topics in Algebra — Xerox, Lexington, 1975.
[HIN] *G. Higman, B. H. Neumann*, Groups as groupoids with one law // Publicationes Mathematicae Debreceu 2(1952) — 215–227.
[HIL] *D. Hilbert*, Grundlagen der Geometrie — Teubner, Leipzig, 1899.
[HIA] *D. Hilbert, W. Ackermann*, Grundzüge der theoretischen Logik — Springer-Verlag, Berlin, 1928.

[HHM] *D. Hoffman*, The computer-aided discovery of new embedded minimal surfaces // Math. Intelligencer 9(1987) — 8–21.

[HOF] *P. Hoffman*, The Man Who Loved Only Numbers: The Story of Paul Erdös and the Search for Mathematical Truth — Hyperion, New York, 1999.

[HOR1] *J. Horgan*, The Death of Proof? // Scientific American 269(1993) — 93–103.

[HOR2] *J. Horgan*, The End of Science — Broadway Publishers, New York, 1997.

[HOS] *E. Horowitz, S. Sahni*, Exact and approximate algorithms for scheduling nonidentical processors // J. Assoc. Comput. Mach. 23(1976) — 317–327.

[HRJ] *K. Hrbacek, T. Jech*, Introduction to Set Theory — 3rd ed., Marcel Dekker, New York, 1999.

[HSI1] *W.-Y. Hsiang*, On the sphere packing problem and the proof of Kepler's conjecture // Internat. J. Math. 4(1993) — 739–831.

[HSI2] *W.-Y. Hsiang*, Sphere packings and spherical geometry — Kepler's conjecture and beyond — Center for Pure and Applied Mathematics, U. C. Berkeley, July, 1991.

[HSI3] *W.-Y. Hsiang*, Least Action Principle of Crystal Formation of Dense Packing Type and Kepler's Conjecture — World Scientific, River Edge, NJ, 2001.

[HSI4] *W.-Y. Hsiang*, A rejoinder to T. C. Hales's article: «The status of the Kepler conjecture», Math. Intelligencer 16(1994), Math. Intelligencer 17(1995) — 35–42.

[IFR] *G. Ifrah*, The Universal History of Numbers: From Prehistory to the Invention of Computers // translated from the French by David Bellos, E. F. Harding, Sophie Wood,, Ian Monk — John Wiley & Sons, New York, 1998.

[JAF] *Arthur Jaffe*, Proof and the evolution of mathematics // Synthese 111(1997) — 133–146.

[JAQ] *Arthur Jaffe, F. Quinn*, «Theoretical mathematics»: toward a cultural synthesis of mathematics and theoretical physics .. Bulletin of the A. M. S. 29(1993) — 1–13.

[JEC] *T. Jech*, The Axiom of Choice — North-Holland, Amsterdam, 1973.

[KAP1] *R. Kaplan, E. Kaplan*, The Nothing That Is: A Natural History of Zero — Oxford University Press, Oxford, 2000.

[KAP2] *R. Kaplan, E. Kaplan*, The Art of the Infinite: The Pleasures of Mathematics — Oxford University Press, Oxford, 2003.

[KAR] *R. M. Karp*, Reducibility among combinatorial problems // *R. E. Miller, J. W. Thatcher*, eds., Complexity of Computer Computations — Plenum Press, New York, 1972 — 85–103.

[KLL] *B. Kleiner, J. Lott*, Notes on Perelman's papers.

[KLN] *M. Kline*, Mathematics, The Loss of Certainty — Oxford University Press, New York, 1980. [Есть русский перев.: Клайн М. Математика. Утрата определенности. — М.: Мир, 1984.]

[KLI1] *W. Klingenberg*, Existence of infinitely many closed geodesics // J. Differential Geometry 11(1976) — 299–308.

[KLI2] *W. Klingenberg*, Lectures on closed geodesics — 3rd ed., Mathematisches Institut der Universität Bonn, Bonn, 1977.

[KLI3] *W. Klingenberg*, Lectures on Closed Geodesics // Grundlehren der Mathematischen-Wissenschaften, v. 230 — Springer-Verlag, Berlin-New York, 1978.

[KOL] *G. Kolata*, Mathematical proof: The genesis of reasonable doubt // Science 192(1976) — 989–990.

[KRA1] *S. G. Krantz*, The immortality of proof // Notices of the AMS, 41(1994) — 10–13.

[KRA2] *S. G. Krantz*, A Primer of Mathematical Writing — American Mathematical Society, Providence, RI, 1996.

[KRA3] *S. G. Krantz*, Mathematical Publishing: A Guidebook — American Mathematical Society, Providence, RI, 2005.

[KRA4] *S. G. Krantz*, Handbook of Logic and Proof Techniques for Computer Science — Birkhäuser, Boston, 2002.

[KRA5] *S. G. Krantz*, The Elements of Advanced Mathematics — 2nd ed., CRC Press, Boca Raton, FL, 2002.

[KRA6] *S. G. Krantz*, Review of A New Kind of Science // Bull. AMS 40(143–150).

[KRA7] *S. G. Krantz*, Real Analysis and Foundations — Taylor & Francis, Boca Raton, FL, 2005.

[KUH] *T. S. Kuhn*, The Structure of Scientific Revolutions — 2nd ed., University of Chicago Press, Chicago, IL, 1970.

[KUN] *K. Kunen*, Single axioms for groups // J. Automated Reasoning 9(1992) — 291–308.

[LAK] *I. Lakatos*, Proofs and Refutations — Cambridge University Press, Cambridge, 1976.

[LAW] *E. L. Lawler*, A pseudopolynomial algorithm for sequencing jobs to minimize total tardiness // Ann. Discrete Math. 1(1977) — 331–342.

[LEC] *M. Lecat*, Erreurs de Mathématiciens des origines à nos jours — Ancienne Libraire Castaigne et Librairie Ém Desbarax, Brussels, 1935.

[LRKF] *J. K. Lenstra, A. H. G. Rinnooy Kan, M. Florian*, Deterministic production planning: algorithms and complexity — неопубликованная рукопись, 1978.

[XJLI] *X.-J. Li*, A proof of the Riemann hypothesis.

[LIT] *J. E. Littlewood*, A Mathematician's Miscellany — Methuen, London, 1953.

[LOV] *L. Lovasz*, Coverings and colorings of hypergraphs // Proceedings of the 4th Southeastern Conference on Combinatorics, Graph Theory, and Computing — Utilitas Mathematica Publishing, Winnipeg, 1973 — 3–12.

[MCI] *A. MacIntyre*, The mathematical significance of proof theory // Phil. Trans. R. Soc. A 363(2005) — 2419–2435.

[MAK] *D. Mackenzie*, The automation of proof: a historical and sociological exploration // IEEE Annals of the History of Computing 17(1995) — 7–29.

[MAC] *S. Mac Lane*, Mathematical models // Am. Math. Monthly 88(1981) — 462–472.

[MAN1] *B. Mandelbrot*, The Fractal Geometry of Nature — Freeman, New York, 1977.

[MAN2] *B. Mandelbrot*, Responses to «Theoretical mathematics: toward a cultural synthesis of mathematics and theoretical physics», by A. Jaffe, F. Quinn // Bulletin of the AMS 30(1994) — 193–196.

[MAA] *K. Manders, L. Adleman*, NP-complete decision problems for binary quadratics // J. Comput. System Sci. 16(1978) — 168–184.

[MAN] *A. L. Mann*, A complete proof of the Robbins conjecture — препринт.

[MAZ] *B. Mazur*, Mathematical Platonism and its opposites.

[MCC] *J. McCarthy*, Review of The Emperor's New Mind by Roger Penrose // Bull. AMS 23(1990) — 606–616.

[MCU] *W. McCune*, Single axioms for groups and abelian groups with various operations // J. Automated Reasoning 10(1993) — 1–13.

[MOT] *J. W. Morgan, G. Tian*, Ricci Flow and the Poincaré Conjecture — The Clay Institute of Mathematics, American Mathematical Society, Providence, RI, 2007.

[NAG] *S. Nasar, D. Gruber*, Manifold Destiny — The New Yorker, August 28, 2006.

[NCBI] Коллекция статей о доказательстве, *Pub Med*,
http://www.ncbi.nlm.nih.gov/sites/entrez?Db=pubmed&DbFrom=pubmed&Cmd=Link&LinkName=pubmed_pubmed&LinkReadableName=Related%20Articles&IdsFromResult=16188617&ordinalpos=1&itool=EntrezSystem2.PEntrez.Pubmed.Pubmed_ResultsPanel.Pubmed_DiscoveryPanel.Pubmed_Discovery_RA&log$=relatedarticles&logdbfrom=pubmed

[OKT] *S. Oka, H. Toda*, Non-triviality of an element in the stable homotopy groups of spheres // Hiroshima Math. J. 5(1975) — 115–125.

[PEN1] *R. Penrose*, The Emperor's New Mind: Concerning Computers, Minds, and the Laws of Physics — Oxford University Press, Oxford, 1989.

[PEN2] *R. Penrose*, The Road to Reality: A Complete Guide to the Laws of the Universe — Jonathan Cape, London, 2004.

[PER1] *G. Perelman*, The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications.

[PER2] *G. Perelman*, Ricci flow with surgery on three-manifolds.

[PER3] *G. Perelman*, Finite extinction time for the solutions to the Ricci flow on certain three-manifolds.

[PTRS] Table of Contents // Phil. Trans. R. Soc. A, v. 363 n. 1835(2005).

[POP] *K. R. Popper*, Conjectures and Refutations: The Growth of Scientific Knowledge — Basic Books, New York, 1962.

[RIE] *B. Riemann*, On the number of primes less than a given magnitude // Monthly Reports of the Berlin Academy, 1859.

[RSST] *N. Robertson, D. P. Sanders, P. D. Seymour, R. Thomas*, A new proof of the four-color theorem // Electr. Res. Announc. AMS 2(1996) — 17–25.

[ROB] *A. Robinson*, Nonstandard Analysis — North Holland, Amsterdam, 1966.

[RUD] *W. Rudin*, Principles of Real Analysis — 3rd ed., McGraw-Hill, New York, 1976.

[RUS] *B. Russell*, History of Western Philosophy — Routledge, London, 2004.

[SAB] *Karl Sabbagh*, The Riemann Hypothesis: The Greatest Unsolved Problem in Mathematics — Farrar, Straus, & Giroux, New York, 2003.

[SAV] *M. vos Savant*, The World's Most Famous Math Problem — St. Martin's Press, New York, 1993.

[SCHA] *T. J. Schaefer*, Complexity of some two-person perfect-information games // J. Comput. Syst. Sci. 16(1978) — 185–225.

[SCL] *C. P. Schnorr, H. W. Lenstra, Jr.*, A Monte Carlo factoring algorithm with linear storage // Math. Comput. 43(1984) — 289–311.

[SEY] *P. Seymour*, Progress on the four-color theorem // Proceedings of the ICM (Zürich, 1994) 183–195 — Birkhäuser, Basel, 1995.

[SMA] *S. Smale*, Review of E. C. Zeeman: Catastrophe Theory, Selected Papers 1972–1977 // Bulletin of the AMS 84(1978) — 1360–1368.

[SMU1] *R. Smullyan*, Forever Undecided: A Puzzle Guide to Gödel — Alfred Knopf, New York, 1987.

[SMU2] *R. Smullyan*, The Lady or the Tiger? and Other Logic Puzzles — Times Books, New York, 1992.

[STA1] St. Andrews Biography of al-Khwarizmi,
http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Al-Khwarizmi.html.

[STA2] St. Andrews Biography of Fermat,
http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Fermat.html.

[STI] *M. Stickel*, A case study of theorem proving by the Knuth-Bendix method: discovering that $x^3 = x$ implies ring commutativity // Proceedings of the Seventh International Conference on Automated Deduction, R. E. Shostak, ed. — Springer-Verlag, New York, 1984, — 248–258.

[STM] *L. J. Stockmeyer, A. R. Meyer*, Word problems requiring exponential time // Proceedings of the 5th Annual ACM Symposium on Theory of Computing, Association for Computing Machinery — New York, 1973 — 1–9.

[STR] *R. S. Strichartz*, letter to the editor // Notices of the American Mathematical Society 53(2006), 406.

[STR1] *W. R. Stromquist*, Some Aspects of the Four Color Problem — докоторская диссертация, Harvard University, 1975.

[STR2] *W. R. Stromquist*, The four-color theorem for small maps // J. Combinatorial Theory 19(1975) — 256–268.

[STRZ] *Pawel Strzelecki*, The Poincaré conjecture? // American Mathematical Monthly 113(2006) — 75–78.

[SUP] *P. Suppes*, Axiomatic Set Theory — Van Nostrand, Princeton, 1972.

[SWD] *P. Swinnerton-Dyer*, The justification of mathematical statements // Phil. Trans. R. Soc. A 363(2005) — 2437–2447.

[THZ] *E. Thomas, R. Zahler*, Nontriviality of the stable homotopy element γ_1 // J. Pure Appl. Algebra 4(1974) — 189–203.

[THU1] *W. P. Thurston* 3-dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry Bull. AMS 6:3(1982) — 357–381.

[THU2] *W. P. Thurston*, On proof and progress in mathematics // Bull. AMS 30(1994) — 161–177.

[THU3] *W. P. Thurston*, 3-dimensional Geometry and Topology, Vol. 1 — Princeton University Press, Princeton, 1997.

[THU4] *W. P. Thurston*, The Geometry and Topology of Three-Manifolds, notes — Princeton University, 1980 — 502 pp.

[WAG] *S. Wagon*, The Banach–Tarski Paradox — Cambridge University Press, Cambridge and New York, 1985.

[WEIL1] *A. Weil*, Basic Number Theory — 2nd ed., Springer-Verlag, New York, 1973.

[WEIL2] *A. Weil*, The Apprenticeship of a Mathematician — Birkhäuser, Basel, 1992.

[WEI] *L. Weinstein*, The Bieberbach conjecture // International Math. Res. Notices 5(1991) — 61–64.

[WIG] *E. Wigner*, The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences // Comm. Pure App. Math. 13(1960) — 1–14.

[WRU] *A. N. Whitehead, B. Russell*, Principia Mathematica — Cambridge University Press, Cambridge, 1910.

[WIE] *F. Wiedijk*, Formal proof — getting started // Notices of the American Mathematical Society 55(2008) — 1408–1414.

[WIL] *A. Wiles*, Modular elliptic curves and Fermat's last theorem // Annals of Math. 141(1995) — 443–551.

[WILS] *L. Wilson*, The Academic Man, A Study in the Sociology of a Profession — Oxford University Press, London, 1942.

[WOLF] *R. S. Wolf*, A Tour Through Mathematical Logic — A Carus Monograph of the Mathematical Association of America, Washington, D. C., 2005.

[WOL] *S. Wolfram*, A New Kind of Science — Wolfram Media, Inc., Champaign, IL, 2002.

[WOS1] *L. Wos*, Automated Reasoning: Introduction and Applications — Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1984.

[WOS2] *L. Wos*, Automation of Reasoning: An Experimenter's Notebook with Otter Tutorial — Academic Press, New York, 1996.

[WOS3] *L. Wos*, Automated reasoning answers open questions // Notices of the AMS 40(1993) — 15–26.

[YAN] *B. H. Yandell*, The Honors Class — A. K. Peters, Natick, MA, 2002.

[YEH] *R. Yehuda*, Why do we prove theorems? // Philos. Math. 7(1999) — 5–41.

[ZAH] *R. Zahler*, Existence of the stable homotopy family // Bull. Amer. Math. Soc. 79(1973) — 787–789.

[ZEE] *E. C. Zeeman*, Controversy in science: on the ideas of Daniel Bernoulli and René Thom // The 1992/3 Johann Bernoulli Lecture — Gröningen // Nieuw Archief van de Wiskunde 11(1993) — 257–282.

[ZEI] *D. Zeilberger*, Theorems for a price: Tomorrow's semi-rigorous mathematical culture // Notices of the AMS 40(1993), 978–981.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ОГЛАВЛЕНИЕ

Минимальные системные требования определяются соответствующими требованиями программ Adobe Reader версии не ниже 11-й либо Adobe Digital Editions версии не ниже 4.5 для платформ Windows, Mac OS, Android и iOS; экран 10"

Научно-популярное электронное издание

Кранц Стивен

**ИЗМЕНЧИВАЯ ПРИРОДА МАТЕМАТИЧЕСКОГО ДОКАЗАТЕЛЬСТВА.
ДОКАЗАТЬ НЕЛЬЗЯ ПОВЕРИТЬ**

Ведущий редактор *М. С. Стригунова*
Художник *В. Е. Шкерин*
Технический редактор *Е. В. Денюкова*
Корректор *Д. И. Мурадян*
Оригинал-макет подготовлен *О. Г. Лапко* в пакете LaTeX 2_ε

Подписано к использованию 24.03.20.
Формат 145×225 мм

Издательство «Лаборатория знаний»
125167, Москва, проезд Аэропорта, д. 3
Телефон: (499) 157-5272
e-mail: info@pilotLZ.ru, http://www.pilotLZ.ru

Что такое доказательство и для чего его придумали математики?

Как менялись его сущность и форма на протяжении многих веков и что с ним случилось в наше время, когда появились компьютеры?

А как выглядит доказательство в других науках и вообще в нашей жизни, ведь мы пользуемся им везде, к примеру, на суде, слушая, как адвокаты и прокуроры доказывают нам невиновность или виновность обвиняемого?

Обо всем этом — в увлекательной книге известного американского ученого и блестящего популяризатора науки Стивена Кранца. Его герои — великие мыслители и математики прошлого и настоящего, от гениального грека Евклида до нашего современника и соотечественника Григория Перельмана, люди, сумевшие повлиять не только на развитие математики как науки, но и на весь образ мышления современного человека.