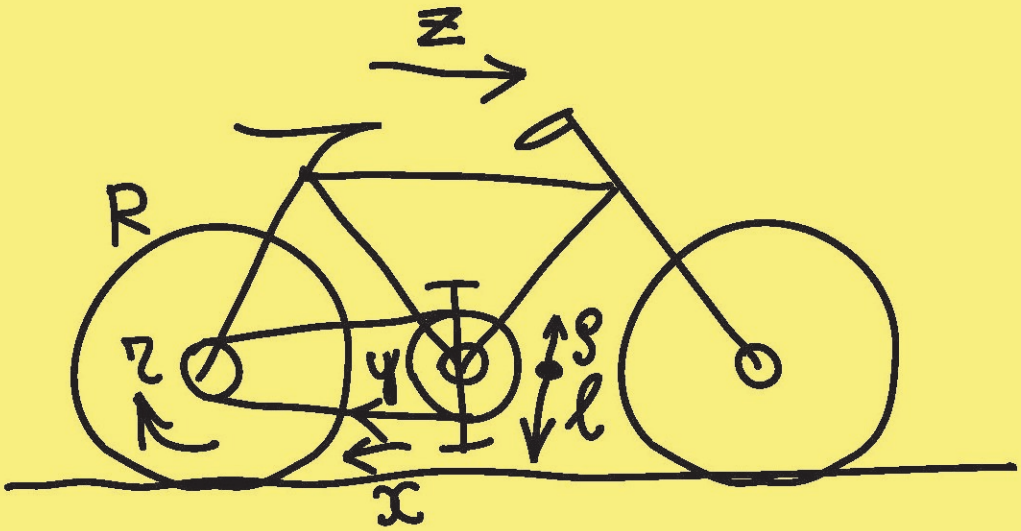
ВЛАДИМИР ИГОРЕВИЧ
АРНОЛЬД

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПОНИМАНИЕ ПРИРОДЫ



ОЧЕРКИ УДИВИТЕЛЬНЫХ ФИЗИЧЕСКИХ ЯВЛЕНИЙ
И ИХ ПОНИМАНИЯ МАТЕМАТИКАМИ
(С РИСУНКАМИ АВТОРА)

Вы смогли скачать эту книгу бесплатно на законных основаниях благодаря проекту ***«Дигитека»***. Дигитека — это цифровая коллекция лучших научно-популярных книг по самым важным темам — о том, как устроены мы сами и окружающий нас мир. Дигитека создается командой научно-просветительской программы «Всенаука». Чтобы сделать умные книги доступными для всех и при этом достойно вознаградить авторов и издателей, «Всенаука» организовала всенародный сбор средств.

Мы от всего сердца благодарим всех, кто помог освободить лучшие научно-популярные книги из оков рынка! Наша особая благодарность — тем, кто сделал самые значительные пожертвования (имена указаны в порядке поступления вкладов):

Дмитрий Зимин
Алексей Сейкин
Николай Кочкин
Роман Гольд
Максим Кузьмич
Арсений Лозбень
Михаил Бурцев
Ислам Курсаев
Артем Шевченко
Евгений Шевелев
Александр Анисимов
Михаил Калябин
Роман Мойсеев
Никита Скабцов
Святослав Сюрин
Евдоким Шевелев

Мы также от имени всех читателей благодарим за финансовую и организационную помощь:

Российскую государственную библиотеку
Компанию «Яндекс»
Фонд поддержки культурных и образовательных проектов «Русский глобус».

Этот экземпляр книги предназначен только для вашего личного использования. Его распространение, в том числе для извлечения коммерческой выгоды, не допускается.

В. И. Арнольд

Математическое понимание природы

Очерки удивительных физических явлений
и их понимания математиками
(с рисунками автора)

Электронное издание, подготовленное
для сайта vsenauka.ru

Москва
Издательство МЦНМО
2022

УДК 51.009
ББК 22.1
А84

Арнольд В. И.

А84 Математическое понимание природы: Очерки удивительных физических явлений и их понимания математиками (с рисунками автора). — М.: МЦНМО, 2022. — 144 с.: ил.

В книге собрано несколько десятков коротких этюдов, посвящённых самым разнообразным природным явлениям — от возникновения фонтанов в водосточных отверстиях до распределения вещества во Вселенной.

В. И. Арнольд — выдающийся математик, академик РАН, автор ряда классических учебников для студентов.

ББК 22.1

Научно-популярное издание

Владимир Игоревич Арнольд

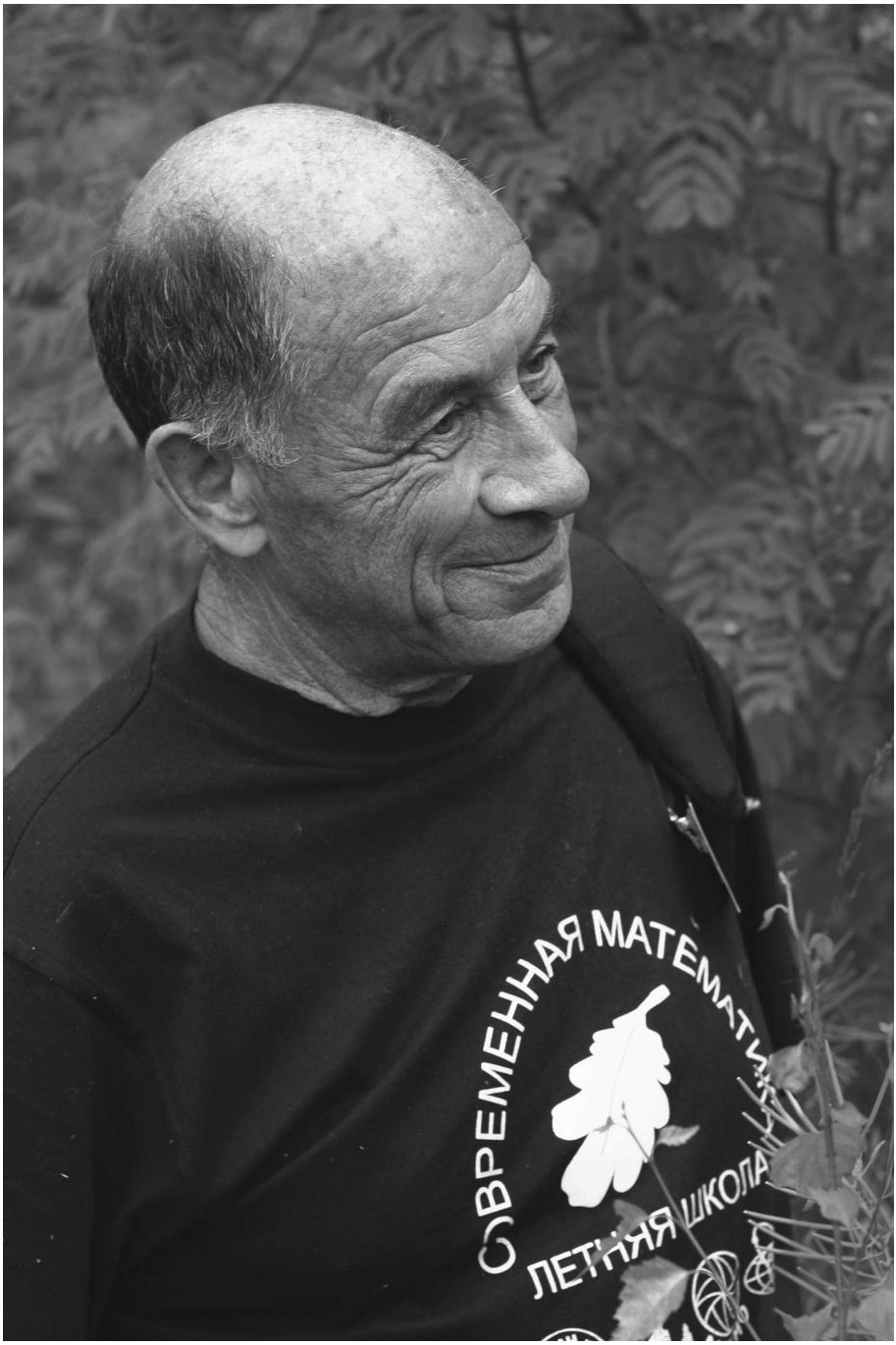
МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПОНИМАНИЕ ПРИРОДЫ

Обложка Р. А. Кокшарова
Фото С. Ю. Третьяковой

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11.
Тел. (499) 241-08-04

Книги издательства МЦНМО можно приобрести в магазине
«Математическая книга», Москва, Большой Власьевский пер.,
д. 11. Тел. (495) 745-80-31. E-mail: biblio@mccme.ru

© Арнольд Э. А. (наслед.), 2022.
© МЦНМО, 2022.



Владимир Игоревич Арнольд

12 июня 1937 — 3 июня 2010

Предисловие

Расследование убийства привело кинорежиссёра (в детективной повести «Коррида» В. Токаревой) к выводу: «математика — это то, что можно объяснить».

Основной вклад математики в естествознание состоит вовсе не в формальных вычислениях (или других применениях готовых математических достижений), а в исследовании тех неформальных вопросов, где точное выяснение постановки вопроса (того, что именно следует искать и какие именно модели использовать) составляет обычно полдела.

Собранные ниже 38 очерков преследуют именно эту цель: научить читателя не столько умножать большие числа (что иногда тоже приходится делать), но и догадываться о неожиданных связях непохожих на вид явлений и фактов, относящихся порой к разным областям естествознания и других наук.

Примеры учат не меньше, чем правила, а ошибки — больше, чем правильные, но непонятные доказательства. Разглядывая рисунки настоящей книги, читатель сможет понять больше, чем выучивая десятки аксиом (даже вместе с выводом из них следствий о том, куда впадает Волга и что едят лошади).

Б. Пастернак писал, что «вопрос о пользе поэзии возникает только при её упадке, в то время как в периоды её процветания никто не сомневается в полной её бесполезности».

Математика — не совсем поэзия, но я и в ней стремлюсь не допустить упадочничества, проповедуемого врагами всех естественных наук.

Добавлю ещё, что Нильс Бор делил верные утверждения на два класса: тривиальные и гениальные. А именно, он считал верное утверждение тривиальным тогда, когда противоположное утверждение является очевидно неверным, и гениальным тогда, когда оно столь же

неочевидно, как и исходное утверждение, так что вопрос о справедливости утверждения, противоположного к исходному, интересен и заслуживает исследования.

Сборник «Задачи для детей от 5 до 15 лет» вызвал много отзывов. И дети, и взрослые читатели часто сожалели, что там были только математические задачи, — ведь и всё естествознание заслуживает столь же активного, творческого к себе отношения. Теперь я отвечаю на эти пожелания — следуя скорее Яну Амосу Каменскому, чем современным педагогам, то есть всегда стремясь быть понятным читателю, не имеющему предварительных знаний (но столь же любознательному, как большинство подростков).

Пользуюсь случаем поблагодарить Н. Н. Андреева, заставившего меня написать эту книжку.

Эксцентриситет кеплеровой орбиты Марса

Математическая модель следующих задач одинакова:

Гипотенуза прямоугольного треугольника имеет длину 1 *м, а катет* — 10 *см. Найти длину второго катета.*

Математическое «решение» — по теореме Пифагора

$$\sqrt{1-(1/10)^2}\ \text{м}$$

— неудовлетворительно. Дело в том, что, поскольку

$$(1-a)^2 = 1 - 2a + a^2 \approx 1 - 2a$$

(при малых a с весьма малой ошибкой a^2),

$$\sqrt{1-A} \approx 1 - A/2.$$

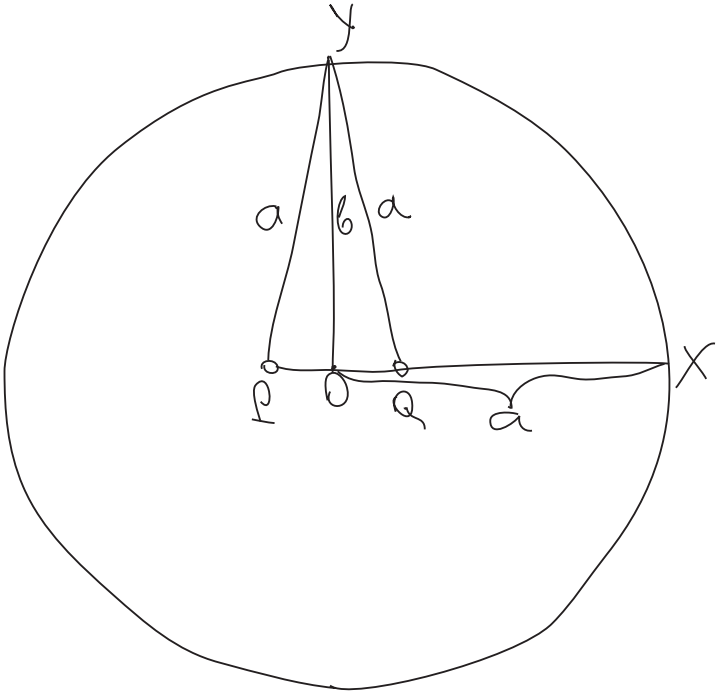
В случае $A = 1/100$ получается $1 - \frac{1}{200}$ м, т. е. 99,5 см: длинный катет на вид неотличим по длине от гипотенузы, разница в полпроцента незаметна, хотя малый угол треугольника не так уж мал (около 6°).

Эксцентриситет кеплерова эллипса Марса составляет примерно 0,1. *Когда Кеплер нарисовал*[1] *орбиту Марса, он принял её за окружность, со смещённым из центра Солнцем. Почему он так ошибся?*

Решение. Эллипс — это геометрическое место точек плоскости, сумма расстояний которых до двух фиксированных (называемых фокусами) точек P и Q постоянна. Обозначим эту сумму расстояний через $2a$. Тогда для

[1]На основании глазомерных наблюдений своего учителя Тихо Браге, сделанных за много десятков лет в обсерватории Ураниборг, на принадлежавшем Тихо Браге острове между Эльсинором и Копенгагеном: впоследствии Ньютон посылал в эту обсерваторию Галлея с телескопом, чтобы доказать, что и телескопические наблюдения могут давать столь же высокую точность, что и наблюдения Тихо Браге.

эллипса с центром O (посредине между фокусами) и полуосями OX и OY мы находим
$|OX| = a$ (поскольку $|PX| + |QX| = 2a$);
$|QY| = a$ (поскольку $|PY| = |QY|$, $|PY| + |YQ| = 2a$).
$|OQ| = ea$ (это — определение эксцентриситета e).



Из прямоугольного треугольника OYQ мы находим

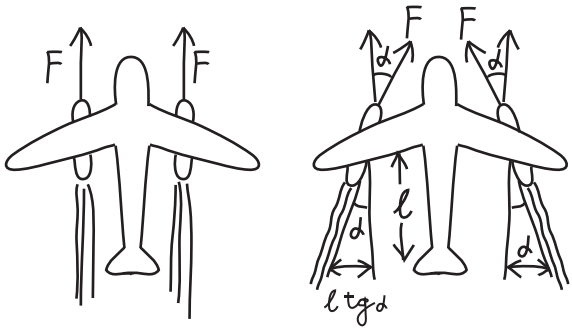
$$|OY| = \sqrt{|QY|^2 - |OQ|^2} = \sqrt{a^2 - a^2e^2} = a\sqrt{1 - e^2} \approx a(1 - e^2/2).$$

Для эксцентриситета $e = 0{,}1$ фокус сдвинут от центра на 10% длины большой полуоси, $|OX| = a$, а малая ось короче большой всего на полпроцента (какой разницы Кеплер вначале и не заметил).

Спасение хвостового оперения самолётов

Реактивная струя из моторов первых реактивных самолётов сжигала хвостовое оперение. Но конструкторы предложили слегка повернуть моторы (на небольшой угол α). Струя перестала сжигать хвостовое оперение (отклонившись на $l \operatorname{tg} \alpha$, где l — расстояние до него).

Какой частью силы тяги $2F$ пришлось для этого пожертвовать?



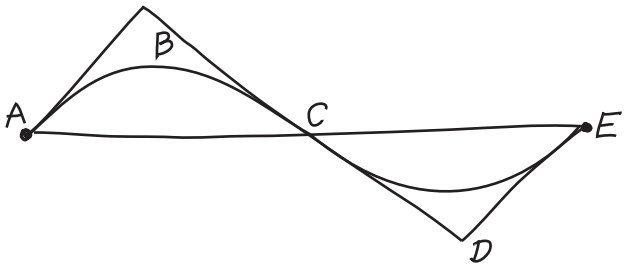
Решение. Результирующая сила тяги составляет

$$2F \cos \alpha \approx 2F(1 - \alpha^2/2).$$

При вполне заметном отклонении в 3° находим $\alpha \approx \approx 1/20$ радиана, т. е. потеря $\alpha^2/2$ составляет $1/800$ силы тяги, что пренебрежимо мало (тогда как отклонение струи $l \operatorname{tg} \alpha \approx l/20$ достигает нескольких метров).

Возвращение по синусоиде

Возвращаясь домой по синусоиде, пьяница удлиняет свой путь. Во сколько раз он его удлиняет?



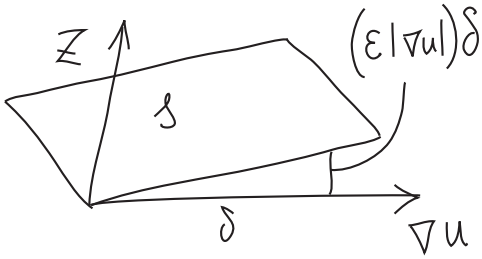
Решение. Примерно на 20%. Большинство думает, что синусоида вдвое длиннее прямой, или хотя бы раза в полтора. Но на самом деле даже пилообразный путь $ABCDE$ длиннее прямого (AE) всего в $\sqrt{2}$ раз, т. е. примерно на 40%.

Синусоидальный же путь гораздо короче. Дело в том, что часть синусоиды, где она наклонена к AE под углом α, длиннее своей проекции на прямую AE примерно в $\sqrt{1+\alpha^2} \approx 1 + \alpha^2/2$ раз. Поэтому даже те части синусоиды, где она наклонена на 20°, длиннее своих проекций всего на $(1/3)^2/2 \approx 1/20$ своей длины (5%). Серьёзно удлиняют путь только близкие к точкам перегиба (A, C и E) участки, но они невелики, поэтому суммарное удлинение пути и получается столь малым: вдоль бóльшей части синусоиды удлинение малозаметно.

Интеграл Дирихле и оператор Лапласа

Мембрану $z = 0$ слабо изогнули (в трёхмерном пространстве с декартовыми координатами (x, y, z)) так, что она стала графиком малой функции $z = \varepsilon u(x, y)$ (где ε мало).

Насколько площадь изогнутой мембраны больше площади исходной плоской мембраны?



Решение. В первом (неисчезающем) приближении, около каждой точки мембрана вытягивается в направлении градиента $\operatorname{grad} u$ функции u (как гипотенуза по сравнению с большим катетом прямоугольного треугольника с тангенсом малого угла $\varepsilon|\operatorname{grad} u|$). Поэтому приращение элемента площади s, с точностью до ε^2, пропорционально квадрату отклонения:

$$\delta s = \frac{1}{2}\varepsilon^2|\nabla u|^2 = \frac{\varepsilon^2}{2}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right).$$

Иными словами, приращение всей площади мембраны есть интеграл (Дирихле)

$$\delta S = \frac{\varepsilon^2}{2}\iint\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right)dx\,dy + o(\varepsilon^2).$$

Замечание. Можно показать, что интеграл Дирихле выражает не только приращение площади мембраны, но также и её потенциальную энергию (т. е. работу изгибающей мембрану силы при переведении её из состояния $z = 0$ в состояние $z = \varepsilon u(x, y)$).

Доказательство этого (неочевидного) факта можно найти, например, в книжке В. И. Арнольда «Лекции об уравнениях с частными производными» (Фазис, 1997, с. 68—70). Одновременно там доказывается пропорциональность изгибающей (и растягивающей) мембрану силы лапласиану Δu функции u (где $\Delta = \operatorname{div}\operatorname{grad}$), причём

$$\iint\limits_M (\nabla u)^2\,dx\,dy = -\iint\limits_M u\Delta u\,dx\,dy,$$

если $u = 0$ на границе области M.

Оператор Δ, переводящий функцию u в Δu, выражается (в декартовых координатах x_i в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$) формулой

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}. \qquad (*)$$

Для других систем координат в том же евклидовом пространстве формула другая. Например, для полярных координат $(r,\ \varphi)$ на плоскости $(x_1 = r\cos\varphi,\ x_2 = r\sin\varphi)$ оператор Лапласа функции u вычисляется по формуле

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}.$$

На функции u на любом римановом многообразии этот оператор переносится так: $\Delta u = \operatorname{div}\operatorname{grad} u$. Физический смысл этих формул — такой же, как в рассмотренном выше примере с интегралом Дирихле (где речь шла о растяжении площадей).

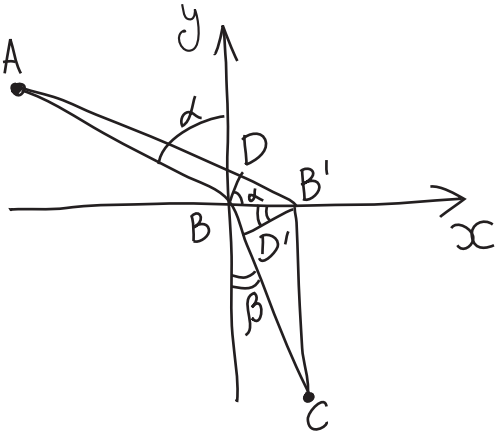
Враги физики определяют в математических учебниках оператор Лапласа формулой $(*)$, делающей этот физический объект релятивистски бессмысленным (зависящим не только от функции, к которой применяется оператор, но и от выбора системы координат). Напротив, операторы div, grad, rot, Δ зависят не от системы координат, а только от римановой метрики.

Закон Снеллиуса преломления лучей

Скорость движения (по любому направлению) в верхней полуплоскости $y > 0$ (плоскости с декартовыми координатами (x, y)) равна v, а в нижней полуплоскости $y < 0$ она составляет $w = (3/4)v$ (для распространения света в воздухе $v = 1$, в воде $w = 3/4$).

Кратчайший по времени движения путь ABC из точки A верхней полуплоскости в точку C нижней полуплоскости представляет собой ломаную ABC с изломом B на границе раздела.

Определить соотношение между углами α и β путей AB и BC с нормалью к границе раздела.



Решение. Рассмотрим близкую к B точку B' на границе раздела: $|BB'| = \varepsilon$. Путь AB' длиннее пути AB на отрезок $B'D$, длина которого составляет $\varepsilon \sin\alpha + O(\varepsilon^2)$.

Точно так же, путь CB' короче пути CB на отрезок BD', длина которого составляет $\varepsilon \sin\beta + O(\varepsilon^2)$.

Поэтому время прохождения пути $AB'C$ больше времени прохождения пути ABC на

$$\Delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon \sin\alpha}{v} - \frac{\varepsilon \sin\beta}{w} + O(\varepsilon^2).$$

Чтобы время прохождения пути ABC было минимальным (при любом знаке ε, т. е. как для точек B' правее B,

так и для точек B' левее B), необходимо, чтобы $\Delta(\varepsilon) = 0$ (в первом приближении по ε), т. е. чтобы

$$\frac{\sin\alpha}{v} = \frac{\sin\beta}{w}. \qquad (*)$$

Обратная скорости величина называется показателем преломления (обозначается обычно буквой $n = 1/v$). Полученный выше закон преломления (*) на границе сред с показателями преломления $n_1 = 1/v$ и $n_2 = 1/w$ записывается в виде закона Снеллиуса

$$n_1 \sin\alpha_1 = n_2 \sin\alpha_2.$$

Пример. Для луча света, переходящего из воздуха ($n_1 = 1$) в воду ($n_2 = 4/3$), закон преломления принимает вид

$$\sin\alpha_1 = \frac{4}{3}\sin\alpha_2.$$

Если угол α_1 входящего из воздуха в воду луча с вертикальной нормалью к горизонтальной поверхности воды мал, то угол α_2 преломлённого луча с вертикалью ещё меньше, он составляет примерно $(3/4)\alpha_1$.

Мы вывели выше закон преломления лучей из «принципа Ферма», по которому лучи света достигают цели за кратчайшее время.

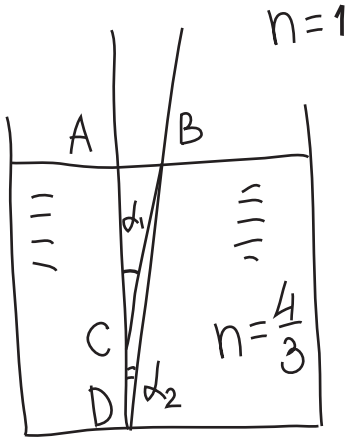
Сам Снеллиус открыл этот закон преломления экспериментально, измеряя углы α и β в множестве примеров.

Читателю, знакомому с принципом Гюйгенса (описывающим распространение волн при помощи огибающих семейств локальных волновых фронтов), будет приятно увидеть, что из этого принципа Гюйгенса закон Снеллиуса легко вытекает (в виде простого частного случая).

Интересно, что во всех этих примерах природа распространяющихся волн малосущественна. Например, акустические или оптические лучи и фронты ведут себя сходным образом и та же математика применима к теории распространения эпидемий.

Глубина воды и картезианская наука

Насколько кастрюля с водой, стоящая на столе, кажется смотрящему на неё сверху зрителю менее глубокой, чем её истинная глубина?



Решение. Треугольники BAC и BAD прямоугольные,

$$|AB| = |AC| \operatorname{tg} \alpha_1 = |AD| \operatorname{tg} \alpha_2.$$

Для малого угла падения α_1 находим

$$\frac{|AD|}{|AC|} = \frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} \approx \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = n = \frac{4}{3},$$

то есть кажущаяся глубина $|AC|$ на четверть меньше истинной глубины $|AD|$.

Замечание. На эту кастрюлю стоило бы взглянуть Декарту, который утверждал, будто свет распространяется в воде на 30% быстрее, чем в воздухе.

К этому выводу он пришёл потому, что знал, что звук распространяется в воде быстрее, чем в воздухе (примерно впятеро).

Дедуктивные заключения на основании таких аналогий крайне опасны — их всегда следует проверять экспериментами. Но Декарт торжественно объявил, что наука — это последовательность нахождения дедуктивных

следствий из произвольных аксиом, а экспериментальная проверка этих аксиом в науку не входит (хотя и может оказаться полезной для рыночной экономики).

Из нескольких десятков подобных «принципов» Декарта опаснее всего такой: «Правительству следует немедленно запретить все другие методы преподавания, кроме моего, так как только мой метод политически корректен: двигаясь моим путём, любой тупица преуспевает столь же быстро, как и любой гений, в то время как при всех других методах обучения таланты доставляют обучаемым преимущества».

Следуя этим своим принципам, Декарт изгнал из геометрии чертежи, как, с одной стороны, следы экспериментов с рисованием прямых и окружностей, а с другой — нишу для воображения, которое он из науки старался исключить.

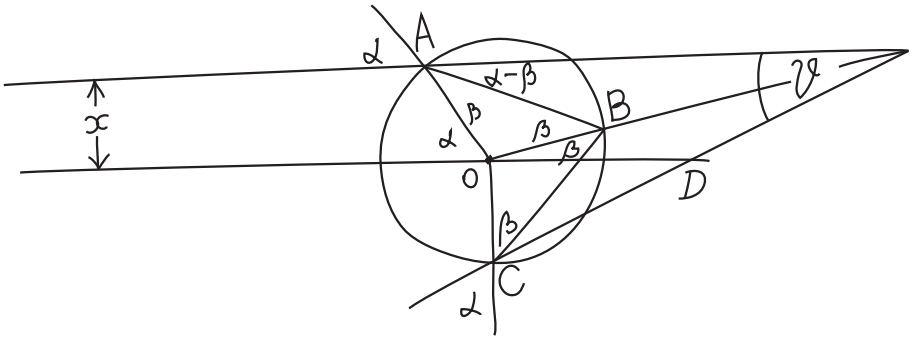
Бывший президент Франции Жак Ширак сказал мне (12 июня 2008 года, в Кремле), что именно за эти черты картезианской науки с детства ненавидит математику. Но он добавил (по-русски): «Впрочем, вероятно, это относится только к французской, бурбакистской математике, а здесь я всё понимаю, что ты говоришь. Ведь ваш Фёдор Иванович не зря сказал:

Умом Россию не понять,
Аршином общим не измерить:
У ней особенная стать —
В Россию можно только верить».

В России никто не верит в теорию Декарта, будто свет распространяется в воде быстрее, чем в воздухе, — зато его замечательная теория радуги известна здесь больше, чем во Франции.

Капля воды, преломляющая свет

На какой угол ϑ отклонится от возвращения вдоль падающего луча луч, попавший на сферическую каплю воды радиуса r на расстоянии x от проходящего через центр капли параллельного ему луча OD?



Решение. Угол BOD равен $\beta - (\alpha - \beta) = 2\beta - \alpha$.

Угол отклонения ϑ вдвое больше (ввиду симметрии относительно оси OB): $\vartheta = 4\beta - 2\alpha$.

По закону преломления $\sin\alpha = n\sin\beta$, а по определению падающего луча $r\sin\alpha = x$. Поэтому $\alpha = \arcsin(x/r)$, $\beta = \arcsin(x/(nr))$,

$$\vartheta(x) = 4\arcsin\frac{3x}{4r} - 2\arcsin\frac{x}{r}.$$

Хотя эта формула решает вопрос, её смысл выясняется только после построения графика вычисленной функции ϑ. А именно, такое исследование объясняет и поразительный блеск росинок, и радугу на дождевом небе.

Наибольший угол отклонения луча

Какой из падающих на сферическую каплю воды луч отклонится от возвращения вдоль себя на наибольший угол $\vartheta_{\max}$ (и на какой именно угол)?

Решение. Обозначим $3x/(4r)$ через u, тогда $x/r = nu$,

$$\frac{\vartheta}{2} = 2\arcsin u - \arcsin nu.$$

Производная функции $\vartheta/2$ по переменной u должна обращаться в 0 для луча наибольшего отклонения $\vartheta_{\max}$: для этого луча

$$\frac{2}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{n}{\sqrt{1-n^2u^2}}, \qquad \frac{4}{1-u^2} = \frac{n^2}{1-n^2u^2},$$

так что

$$u_{\max}^2 = \frac{4-n^2}{3n^2}, \qquad \frac{\vartheta_{\max}}{2} = 2\arcsin u_{\max} - \arcsin nu_{\max}.$$

При $n = 4/3$ мы находим

$$u_{\max}^2 = 5/12, \qquad u_{\max} = \frac{\sqrt{5/3}}{2}, \qquad nu_{\max} = \sqrt{5/3}\cdot 2/3.$$

Поскольку $5/3 \approx 1{,}666$, мы легко вычисляем

$$\sqrt{5/3} \approx \sqrt{166{,}6}/10 \approx 1{,}29.$$

Итак,

$$u_{\max} \approx 0{,}645, \qquad nu_{\max} \approx 0{,}86.$$

Поскольку

$$\sin(\pi/6) = 0{,}5, \qquad \sin(\pi/4) \approx 0{,}707, \qquad \sin(\pi/3) \approx 0{,}86,$$

мы находим

$$\arcsin nu_{\max} \approx \pi/3, \qquad \arcsin u_{\max} \approx \pi/4 - \pi/40,$$

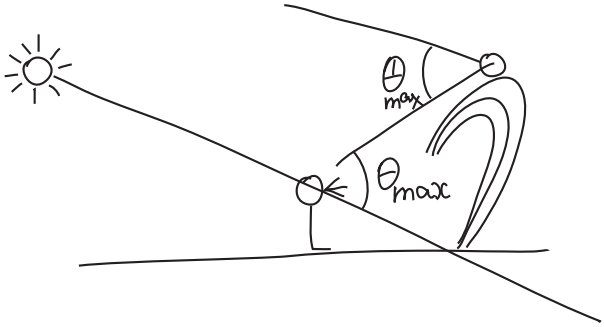
откуда

$$\frac{\vartheta_{\max}}{2} \approx \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{20} - \frac{\pi}{3}, \qquad \vartheta_{\max} \approx \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{10},$$

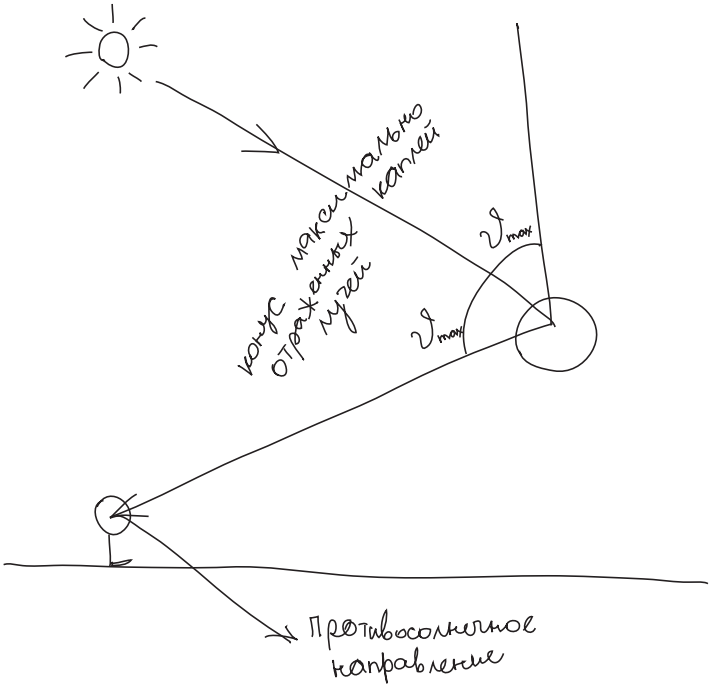
т. е. около 42°.

Радуга

Почему радуга видна наблюдателю как дуга с центром в противосолнечной точке, радиусом около 42°?

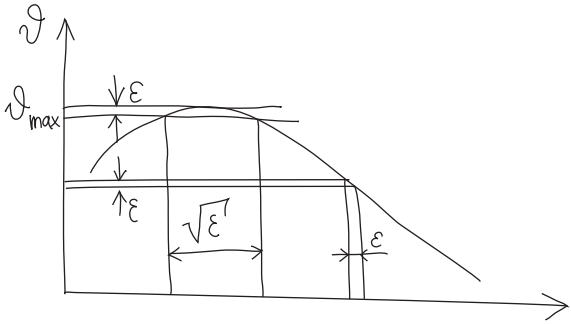


Решение. Наиболее отклоняющиеся преломлением лучи несут наибольшую энергию:



Энергия пучка лучей с направлениями от ϑ до $\vartheta + \varepsilon$ не максимального отклонения пропорциональна ε, а энер-

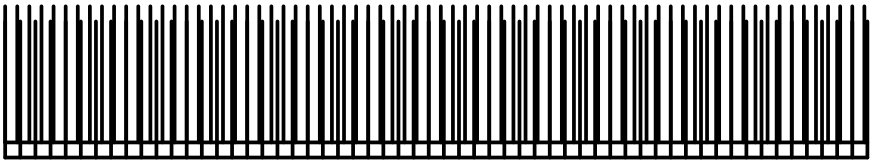
гия пучка лучей в угле такой же ширины ε около $\vartheta_{\max}$ гораздо больше (она пропорциональна $\sqrt{\varepsilon}$).



Поэтому эти лучи заметны, они и воспринимаются как радуга. Дело в том, что показатели преломления световых лучей разных цветов несколько различаются, так что и величина угла максимального отклонения $\vartheta_{\max}$ несколько различается для лучей разных цветов. От этого радуга и получается разноцветной.

Замечание. Вторая радуга (внутри основной) производится лучами, отразившимися от задней поверхности больше одного раза. Для них угол максимального отклонения немного меньше 42°.

Голубизна цвета неба тоже имеет математическое объяснение: глядя сбоку на патефонную пластинку, можно заметить радужные цвета, объясняемые интерференцией световых волн на решётке борозд пластинки (это явление сходно с муаром — длиннопериодическим узором на проекции одного забора на другой).

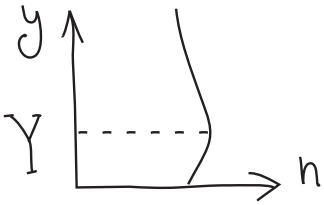


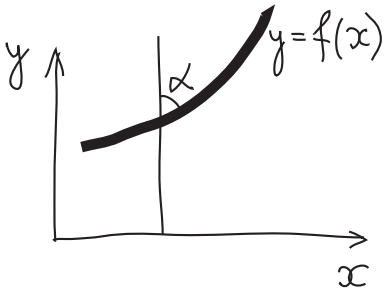
Голубой цвет доставляет небу аналогичная муару интерференция солнечных лучей на флуктуациях плотности разреженной атмосферы.

Миражи

Показатель преломления $n(y)$ воздуха на высоте y над пустыней максимален на некоторой высоте Y (где максимальна плотность воздуха: нагревание пустыни гонит нижние слои вверх, а на большой высоте плотность атмосферы убывает до нуля).

Объяснить возникновение миражей при таком поведении показателя преломления.



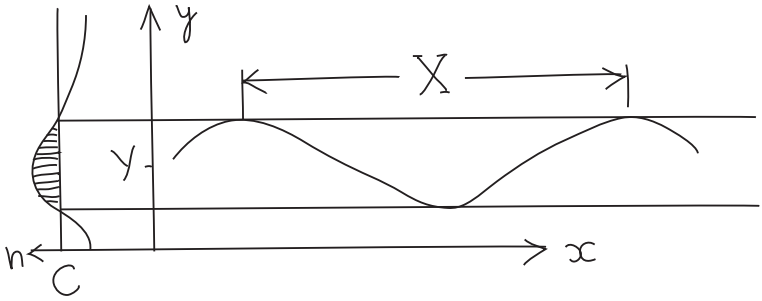


Решение. Исследуем ход лучей $y = f(x)$, пользуясь законом преломления $n \sin \alpha = \text{const}$, где α — угол луча с вертикалью.

Мы получаем (дифференциальное) уравнение лучей

$$\alpha(y) = \arcsin \frac{C}{n(y)}.$$

Параметр C определяется выбором исследуемого луча. Мы заключаем, что луч (с фиксированным около высоты Y значением C) весь заключён в полосе, где $n(y) \geqslant C$ (причём он колеблется между её краями):



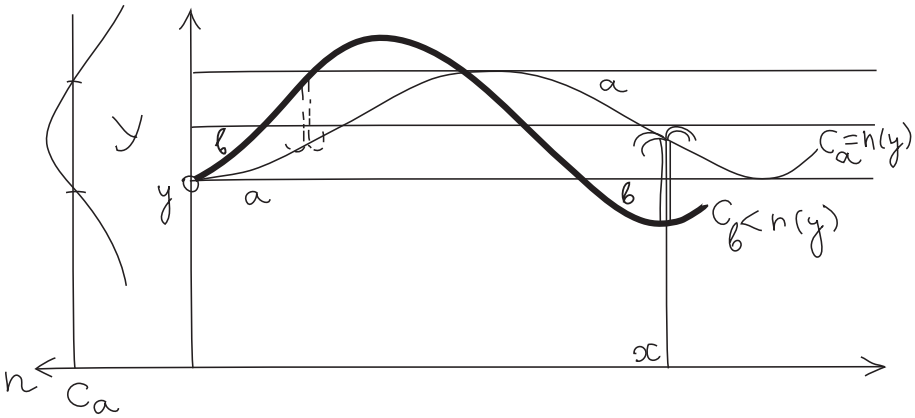
Эти колебания делают луч волнообразным (с зависящей от постоянной C длиной волны X).

Конечность значения $X(C)$ получается в том случае, когда значение C не является критическим значением для показателя преломления n: $dn/dy \neq 0$ в точках, где $n(y) = C$.

При увеличении постоянной C до критического значения $n(Y)$ показателя преломления длина волны $X(C)$ растёт до бесконечности, а её амплитуда стремится к нулю, луч переходит в прямую $y = Y$.

Чтобы понять, как извилистость лучей влияет на изображения удалённых пальм, посмотрим из точки $(x = 0,\ y)$ на пальму, растущую на расстоянии x.

Нарисуем лучи a и b, ведущие в точку наблюдения $(x = 0,\ y)$ от вершины пальмы и от её основания.



В точке наблюдения $(0,\ y)$ луч a, идущий от вершины, расположен ниже луча b, идущего от основания пальмы. Поэтому изображение пальмы переворачивается — это и есть явление миража.

Замечание. Чтобы понять всё это, нужно ясно понимать, как геометрия световых лучей связана с создаваемыми ими для наблюдателя изображениями испускающих эти лучи объектов.

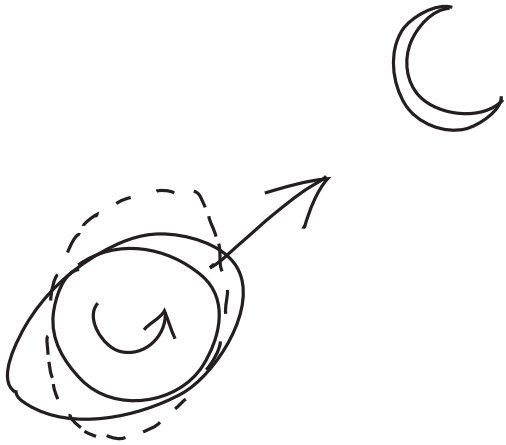
Эта связь («построение изображений») в школьном курсе физики объясняется при описании линз, но мало кто понимает эту теорию. (За миражами не обязательно ехать в пустыню: глядя летом вдоль платформы в ожидании электрички, легко увидеть вдали лужи, хотя платформа совершенно суха: разумные дети, заметив это, приходят к теории, рассказанной выше, но их мало.)

Время прилива, явление Гиббса и томография

Прилив в городе N был сегодня в полдень. Когда он будет завтра?

Решение. Приливы объясняются притяжением Луны: грубо говоря, на поверхности Земли под влиянием этого притяжения образуются два горба (один направлен в сторону Луны, а другой в противоположную сторону) эквипотенциальных поверхностей гравитационного поля[1]. Вода океанов под влиянием этого поля стремится расположиться так, чтобы её поверхность следовала этой эквипотенциальной поверхности (была «горизонтальной»).

Это и вызывает приливы: ведь Земля вращается вокруг своей оси, делая оборот за 24 часа, поэтому вершина направленного к Луне (или от неё) горба движется относительно материков Земли.



[1]И Кеплер, и Коперник обсуждали две возможности силы гравитационного притяжения — они думали, что эта сила убывает с расстоянием либо обратно пропорционально расстоянию, либо обратно пропорционально его квадрату. Заключение этого обсуждения было таким, что обратная пропорциональность квадрату расстояния более правдоподобна, иначе приливы были бы на порядок более высокими.

Как известно, Луна движется вокруг Земли и совершает полный оборот за месяц (примерно за 28 дней), в плоскости (эклиптики), не очень сильно наклонённой к плоскости земного экватора, вращаясь в «ту же сторону» (с Запада на Восток, если смотреть с Севера), что и вращение Земли вокруг своей оси.

За сутки Луна сместится на 1/28 оборота относительно Земли, примерно в сторону её собственного вращения. Горб, притянутый Луной, будет завтра в полдень направлен к новому положению Луны, и, чтобы до него добрался город N, Земле нужно повернуться ещё на 1/28 оборота. А так как Земля совершает полный оборот за 24 часа, то ей потребуется, чтобы город N попал под приливной горб, вращаться ещё 24/28 часа, т. е. примерно 50 минут.

Итак, завтра прилив наступит в городе N в 50 минут первого.

Замечание. Разумеется, мы использовали очень упрощённую модель сложного явления прилива, считая, что вода успевает отслеживать горбы эквипотенциальной поверхности. В действительности она от них несколько отстаёт (по-разному в разных городах), наша модель была бы точнее, если бы Земля вращалась медленнее. Притяжение Солнца также создаёт приливы (они слабее лунных, но особенно заметно сказываются в периоды весеннего и осеннего равноденствий, когда прибавляются к лунным, а не вычитаются из них).

Но ответ — запаздывание на 50 минут — хорошо подтверждается наблюдениями. Видимо, здесь сказывается то, что отставания воды от движения горба сегодня и завтра примерно одинаковы.

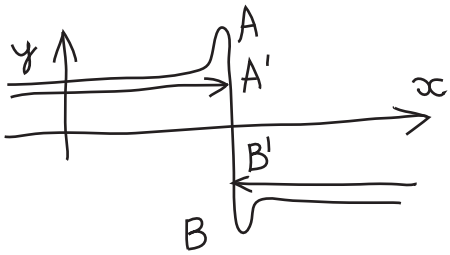
Детальное предсказание приливов в определённых географических пунктах требует значительных математических расчётов.

Занимаясь этими расчётами, Дж. Гиббс обнаружил экспериментально следующий поразительный факт (се-

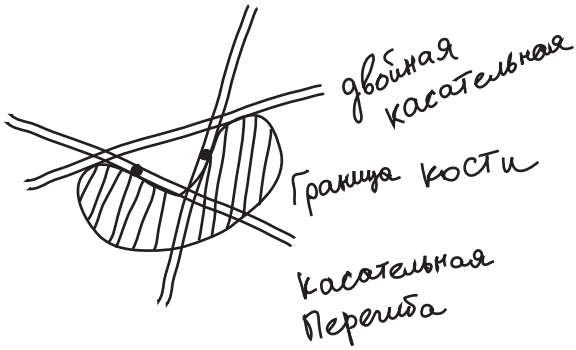
годня называемый «явлением Гиббса», но не входящий, к сожалению, в курсы математического анализа):

предел графиков функций сходящейся последовательности может серьёзно отличаться от графика предельной функции.

Дело, разумеется, в том, что последовательность может сходиться неравномерно. Гиббс заметил это, разлагая разрывную функцию в ряд Фурье. Около точки разрыва (простейшего типа) предел графиков частных сумм содержит, кроме отрезка, соединяющего предельные левое и правое значения, его продолжения (AB длиннее чем $A'B'$ примерно на 9%).



Сегодня это явление Гиббса используется в томографии, где оно объясняет наблюдающиеся на томограммах «артефакты»: повышение яркости сечения тела плоскостью в точках двойных касательных и касательных перегиба к сечениям костей.



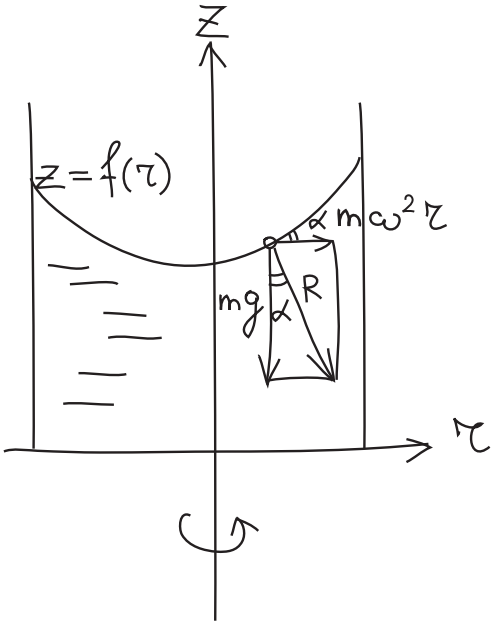
Вращение жидкости

Стакан чая поставили на равномерно вращающийся патефонный диск (например, на середину этого диска, так что ось вращения совпадает с осью симметрий стакана).

Какую форму примет поверхность чая?

Решение. Из симметрии ясно, что это будет поверхность вращения, с уравнением вида $z = f(r)$, где r — расстояние от оси вращения, а z — высота чая.

Центробежная сила, действующая на массу m на расстоянии r от оси вращения с угловой скоростью ω, составляет $m\omega^2 r$, а сила тяготения составляет mg.



Условие ортогональности результирующей силы R поверхности чая состоит в том, что тангенс угла α этой поверхности с горизонтальным радиусом стакана равен

$$\frac{m\omega^2 r}{mg} = cr,$$

(где постоянная $c = \omega^2/g$ не зависит от точки поверхности чая, но быстро растёт с угловой скоростью вращения ω).

Мы получаем для функции f дифференциальное уравнение, (указывающее наклон графика этой функции):

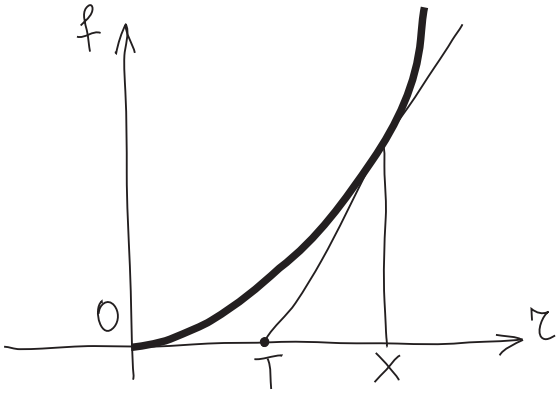
$$\frac{df}{dr} = cr.$$

Его решение

$$f(r) = f(0) + \frac{c}{2}r^2$$

показывает, что поверхность чая имеет вид параболоида вращения.

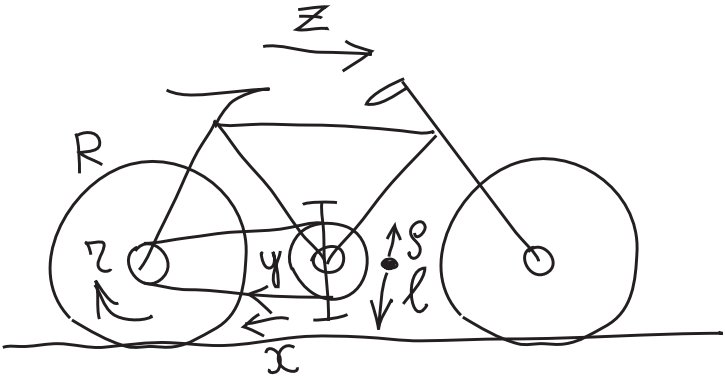
Замечание. Наше дифференциальное уравнение означает, что касательная к параболе делит пополам отрезок оси абсцисс: $|OT| = |OX|/2$, так как $(cr^2/2)/(cr) = r/2$.



Для параболы степени a было бы (как знал ещё Архимед) $|TX| = |OX|/a$: для кубической параболы T вдвое ближе к X, чем к O.

Какая сила гонит велосипед вперёд?

Нижнюю педаль неподвижно стоявшего на горизонтальном полу велосипеда потянули назад. Куда переместится велосипед и в какую сторону сместилась потянутая назад нижняя педаль относительно пола?



Решение. Обозначим через l длину шатуна (от педали до каретки), через ρ и r радиусы передней и задней звёздочек, через R радиус заднего колеса.

Обозначим через x перемещение педали относительно каретки (направленное назад). Нижний зуб передней (а значит, и задней) звёздочки переместится назад на расстояние $y = x(\rho/l)$.

Значит, заднее колесо повернётся на такой угол, что точка касания его с полом пройдёт расстояние

$$z = y\left(\frac{R}{r}\right) = x\left(\frac{\rho}{l}\right)\left(\frac{R}{r}\right).$$

Поглядев на велосипед, мы оцениваем значения параметров как

$$l \approx 2\rho, \qquad R \approx 10r.$$

Значит, перемещение z велосипеда относительно пола составит расстояние

$$z \approx 5x \qquad \text{(вперёд!)}.$$

Так смещается каретка, педаль же сдвинется относительно каретки на x назад, а относительно пола на $4x$ вперёд.

Ответ. Велосипед сдвинется вперёд, и потянутая назад нижняя педаль тоже вперёд, но она сдвинется вперёд на 20% меньше, чем весь велосипед.

Замечание. Кажется удивительным, что направленная назад (приложенная к педали) сила сдвинула велосипед вперёд. Но вращение заднего колеса вызвало в точке его касания с полом направленную вперёд силу трения, которая и победила.

От издательства. После выхода первого издания книги некоторые читатели справедливо заметили: рассмотренная модель неточна.

Уточнения предварительно обсуждались с автором, эту работу планировалось завершить к новому изданию книги. Внезапная кончина Владимира Игоревича Арнольда 3 июня 2010 года не позволила этого сделать.

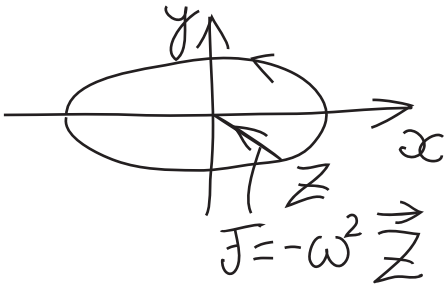
Считая неправильным менять оригинальный текст, оставляем читателю самому подумать над правильной моделью. Подразумевается, что силу к педали (жёстко связанной с колесом) прилагает человек, сидящий в седле велосипеда.

Эллипсы Гука и Кеплера и их конформные преобразования

Точка евклидовой плоскости, притягиваемая началом координат с силой, пропорциональной расстоянию до него («закон Гука», $\ddot{\vec{z}} = -\omega^2 \vec{z}$), движется по эллипсу Гука с центром в начале координат:

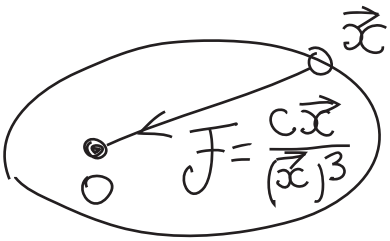
$$x = a\cos(\omega t), \qquad y = b\sin(\omega t) \qquad (*)$$

при надлежащем выборе декартовых координат x и y на плоскости движения.



Гравитационное поле (притяжения, сила которого обратно пропорциональна квадрату расстояния от начала координат) заставляет притягиваемую точку (при не слишком большой начальной скорости) двигаться по эллипсу Кеплера, в одном из фокусов которого находится притягивающий центр.

Докажите, что если считать евклидову плоскость движения комплексной прямой ($z = x + iy$) и возвести точки z эллипса Гука в квадрат, то они займут эллипс Кеплера.



Решение. Рассмотрим комплексное число модуля r и аргумента ωt,

$$\zeta = re^{i\omega t} = r\cos(\omega t) + ir\sin(\omega t).$$

Обратное комплексное число имеет модуль r^{-1} и аргумент $-\omega t$:

$$\zeta^{-1} = r^{-1}\cos(\omega t) - ir^{-1}\sin(\omega t).$$

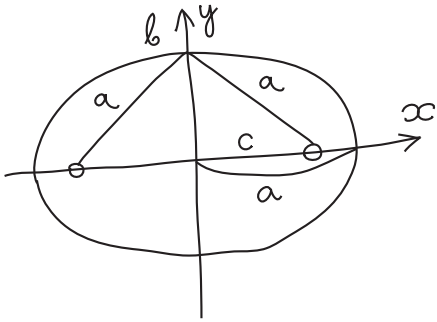
Следовательно, сумма этих двух комплексных чисел

$$Z = \zeta + \zeta^{-1} = (r + r^{-1})\cos(\omega t) + i(r - r^{-1})\sin(\omega t)$$

принадлежит эллипсу Гука, для которого

$$a = r + r^{-1}, \qquad b = r - r^{-1}.$$

Мы будет предполагать для простоты, что $r \geqslant 1$. Тогда эллипс Гука имеет большую полуось a и малую полуось b. Движущаяся по закону Гука точка пробегает один раз этот эллипс, когда точка ζ пробегает один раз всю окружность $|\zeta| = r$.



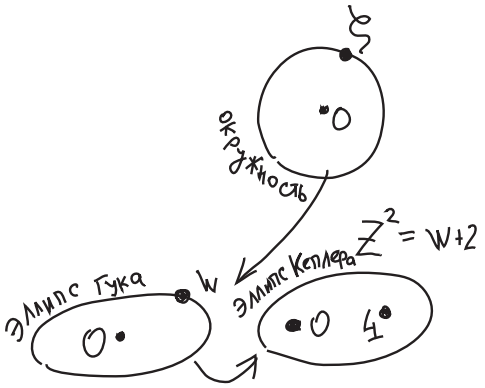
Фокусы полученного эллипса находятся по теореме Пифагора $c^2 = a^2 - b^2 = 4$, так что расстояние от центра до фокуса равно 2.

Все эллипсы с таким расстоянием между фокусами получаются этой конструкцией (при подходящем радиусе r исходной окружности). Все вообще эллипсы (с центром в начале координат) получаются этой конструкцией при подходящем выборе направления осей координат и единицы масштаба.

Возведём в квадрат комплексные числа $Z = \zeta + \zeta^{-1}$ построенного эллипса Гука. Мы найдём

$$Z^2 = \zeta^2 + \frac{1}{\zeta^2} + 2.$$

Когда точка ζ пробегает один раз окружность радиуса r, $\zeta = re^{i\omega t}$, точка $\zeta^2 = r^2 e^{2i\omega t}$ пробегает дважды окружность радиуса r^2.



Поэтому точка

$$W = \zeta^2 + \frac{1}{\zeta^2} = X + iY$$

пробегает дважды эллипс Гука с центром в точке 0 и расстоянием 2 от центра до фокусов (в точках $c = \pm 2$):

$$X = A\cos(2\omega t), \qquad Y = B\sin(2\omega t).$$

Но $Z^2 = W + 2$. Поэтому точка Z^2 пробегает (дважды) эллипс с фокусами 0 и 4 (т. е. эллипс Кеплера), что и требовалось.

Замечание 1. Подбирая подходящий начальный эллипс (с центром в начале координат $Z = 0$), можно получить в качестве множества точек Z^2 любой эллипс с фокусом в точке 0. Это получается из приведённого рассмотрения специальных эллипсов (*) выбором направлений осей координат и единицы масштаба.

Замечание 2. Движение по закону Гука вдоль эллипса Гука не переходит при возведении точек эллипса Гука в квадрат в движение по эллипсу Кеплера, соответствующее закону Кеплера. Действительно, постоянные секториальные скорости при возведении комплексных точек в квадрат перестают быть постоянными (так как, хотя угловые скорости всего лишь удваиваются, квадраты расстояния до начала координат умножаются при возведении комплексных чисел в квадрат на разные числа).

Замечание 3. Удивительным образом возведение комплексных чисел в надлежащую степень переводит орбиты движения в центральном поле, сила притяжения которого пропорциональна расстоянию до центра в степени α, в орбиты движения в центральном поле, сила притяжения которого пропорциональна расстоянию до центра в степени β.

Здесь показатели α и β двойственных законов притяжения связаны соотношением

$$(\alpha + 3)(\beta + 3) = 4.$$

Пример. Закон Гука соответствует $\alpha = 1$, а закон всемирного тяготения соответствует $\beta = -2$.

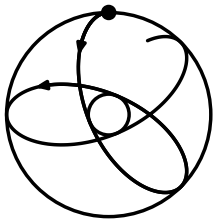
Показатель степени, в которую надо возвести точки орбиты в α-поле, чтобы получить точки орбиты в β-поле, составляет $\gamma = (\alpha + 3)/2$.

Например, при $\alpha = 1$ получаем $\gamma = 2$, т. е. эллипсы Гука переходят в эллипсы Кеплера при возведении комплексных чисел в квадрат.

А при $\alpha = -2$ получаем $\gamma = 1/2$, т. е. эллипсы Гука получаются из эллипсов Кеплера при извлечении из комплексных чисел квадратного корня.

Интересно, что (двойственные друг другу) законы Гука и всемирного тяготения описывают два единственных центральных поля, в которых все орбиты, близкие к круговым, замкнуты: в других случаях они имеют

подобный эпициклоидам вид (в кольцах между апоцентрами и перицентрами).



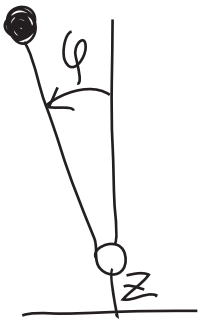
Замечание 4. Указанное выше преобразование орбит движения в центральном поле степени α в орбиты движения в центральном поле двойственной степени β сохраняется и в квантовой механике: решения уравнения Шрёдингера, соответствующие первому притягивающему полю, переходят при этом преобразовании плоскости в решения уравнения Шрёдингера, соответствующие второму (R. Faure, 1953: Transformations conformes en mécanique ondulatoire. C. R. Acad. Sci. Paris. T. 237. P. 603—605).

Хотя этот вывод и можно получить прямыми вычислениями (подобными приведённым выше), гораздо проще преобразовывать не решения уравнений Шрёдингера, а лагранжианы вариационных принципов, которые ему эквивалентны (преобразуя соответствующим образом также значения полной энергии и собственные числа).

Интересно отметить, что вся описанная выше теория двойственности между полями с потенциалами $|\partial w/\partial z|$ и $|\partial z/\partial w|$ переносится (и в случае классической механики, и для уравнения Шрёдингера) со случая конформного отображения $w = z^2$ двойственности Гука—Кеплера не только на случай $w = z^\gamma$ (выше было $\gamma = (\alpha + 3)/2$ для сил степеней α и β, $(\alpha + 3)(\beta + 3) = 4$), но так же и на случай «$\gamma = \infty$», соответствующий конформному отображению $w = e^z$, $z = \ln w$. (Возникающее здесь странное соотношение «$w^0 = \ln w$» объяснено ниже в очерке «Математическое понятие потенциала», см. с. 91—102.)

Устойчивость перевёрнутого маятника и швейная машинка Капицы

Пусть точка подвеса маятника совершает колебания в вертикальном направлении, $z = a\cos(\Omega t)$. *Если частота* Ω *этих колебаний достаточно велика, то перевёрнутый вверх ногами маятник* (*на рисунке* $\varphi = 0$) *будет устойчиво стоять вверх ногами.*



Решение. Переходя к (неинерциальной) системе координат, в которой точка подвеса неподвижна, мы должны будем прибавить к действующей на маятник силе тяготения силу инерции, пропорциональную ускорению системы координат,

$$\ddot{z} = \Omega^2 a\cos(\Omega t).$$

Это эквивалентно соответствующим колебаниям постоянной тяготения g в обычном уравнении (перевёрнутого) маятника длины l,

$$\ddot{\varphi} = (l/g)\sin\varphi.$$

Исследование возникающего дифференциального уравнения второго порядка (с периодически меняющимися со временем коэффициентами) доставляется «теорией КАМ» (см., например, книгу: В. Арнольд, А. Авец «Эргодические проблемы классической механики», 1967, переизданную в 1999 году в Ижевске редакций журна-

ла «Регулярная и хаотическая динамика», с. 87—90, 245—263).

Заменяя трудное нелинейное уравнение движений маятника линеаризацией, получаем линейное «уравнение малых колебаний» перевёрнутого маятника

$$\ddot{\varphi} = (l/g)\varphi.$$

Собственные числа оператора монодромии этого линейного уравнения с периодическими коэффициентами можно вычислить, хотя бы приближённо, интегрируя это уравнение в течение периода ($0 \leqslant t \leqslant T = 2\pi/\Omega$) компьютером или с помощью теории возмущений (как это описано, например, в книге: В. Арнольд «Обыкновенные дифференциальные уравнения», с. 281—289 в четвёртом издании, Ижевск, 2000).

В результате для перевёрнутого маятника длиной $l = 20$ см и амплитудой точки подвеса 1 см собственные числа оператора монодромии доставляют устойчивость положения равновесия $\varphi = 0$ линеаризованного уравнения при вертикальных колебаниях с частотой более 30 колебаний в секунду.

Вывод, что эта устойчивость сохраняется и для нелинейного маятника, вовсе не очевиден, но верен.

Замечание. Приведённая задача возникла в теории ускорителей. Один из проектов основывался на устойчивости перевёрнутого маятника с вертикально колеблющейся точкой подвеса (вопрос об устойчивости кругового движения ускоряемых частиц сводился к такому же уравнению).

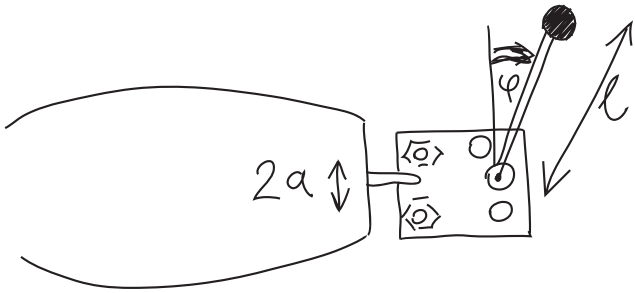
П. Л. Капица предложил, прежде чем тратить миллионы на строительство ускорителя, экспериментально проверить вывод о маятнике. Он переделал электрическую швейную машинку так, что её вращение доставляло вертикальные колебания точки подвеса маятника.

Маятник устойчиво стоял вверх ногами, а при небольшом отклонении в сторону начинал качаться вокруг это-

го вертикального положения, как качается обычный маятник около своего нижнего положения равновесия.

Когда П. Л. Капица был председателем оргкомитета физической олимпиады школьников, а В. И. Арнольд — математической, причём оба оргкомитета заседали (в Институте физпроблем) совместно, П. Л. показал членам этих оргкомитетов свою швейную машинку с маятником, сохранившуюся в соседнем кабинете как реликвия.

Не имея электрической швейной машинки, В. И. Арнольд приспособил для создания вертикальных колебаний точки подвеса маятника электробритву «Нева» (вибрационного типа)[1].



Верхнее положение равновесия оказалось неустойчивым, так как длина маятника $l = 20$ см была слишком велика. Пришлось проделать (линеаризованные) вычисления, результаты которых приведены выше.

После уменьшения длины маятника до 10 см его колебания (около верхнего положения равновесия) стали устойчивыми, и тогда В. И. Арнольд доказал эту устойчивость при помощи теории КАМ (уже с 1961 года располагавшей нужной общей «теоремой об устойчивости эллиптических неподвижных точек», обосновывающей возможность судить об устойчивости нелинейной системы по её линеаризации).

[1]Видеозапись работы той самой электробритвы есть на сайте «Математические этюды» (http://etudes.ru).

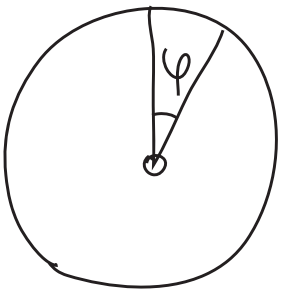
Ускорители были к тому времени уже построены, так как физиков удовлетворила экспериментальная проверка устойчивости в опытах Капицы со швейной машинкой (несмотря на то, что они не располагали ещё математической теорией КАМ, строго доказывающей эту нетривиальную нелинейную устойчивость).

Космический полёт заглушки от фотокамеры

Космонавт летящего по круговой орбите корабля бросил к Земле заглушку от фотоаппарата (скажем, со скоростью 10 м/сек). Куда она полетит?

Описать орбиту заглушки относительно космического корабля (в плоскости орбиты).

Решение. Обозначим через r расстояние до центра Земли и через φ центральный угол (отсчитываемый от какой-либо точки орбиты). Примем радиус орбиты за единицу длины, а единицу времени выберем так, чтобы период обхода орбиты был 2π.



Дифференциальные уравнения закона всемирного тяготения записываются в этой системе координат в виде

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{\vec{r}}{r^3}.$$

Мы исследуем решения этого уравнения, близкие к круговому движению ($r_0 = 1$, $\varphi_0 = t$). Ищем их в виде ($r = r_0 + r_1$, $\varphi = \varphi_0 + \varphi_1$) и получаем для возмущений r_1 и φ_1, после линеаризации, уравнения в вариациях

$$\ddot{r}_1 = 3r_1 + 2\dot{\varphi}_1, \qquad \ddot{\varphi}_1 = -2\dot{r}_1.$$

Решаем эти уравнения при заданных в задаче начальных условиях ($r_1(0) = \varphi_1(0) = \dot{\varphi}_1(0) = 0$, $\dot{r}_1(0) = -1/800$, так как первая космическая скорость, равная 1 в нашей системе координат, составляет около 8 км/сек).

Получается $\ddot{r}_1 = -\dot{r}_1$, учитывая начальные условия, мы получаем

$$r_1 = -\frac{1}{800}\sin t, \qquad \varphi_1 = \frac{2}{800}\cos t.$$

Это означает, что заглушка движется по эллипсу с большой осью примерно 32 км и малой осью примерно 16 км, центр которого находится за 16 км от корабля впереди на орбите. Через примерно полтора часа (период обращения корабля) заглушка пройдёт свою стокилометровую эллиптическую орбиту относительно корабля и вернётся к нему сверху, пройдя от корабля в нескольких десятках метров вследствие отличия своего движения от рассмотренного первого приближения.

Замечание. Описанный полёт заглушки имел место при выходе в космос космонавта Леонова (рассказ которого и привёл В. В. Белецкого к приведённым выше вычислениям).

Леонов, однако, сказал, что брошенная им к Земле заглушка «туда и полетела»: он не ожидал, что она (через полтора часа) вернётся обратно. Это описание эксперимента правильно: первый километр стокилометрового эллипса мало отличается от прямого отрезка пути к Земле, а на больших расстояниях заглушку уже не было видно.

Угловая скорость стрелки часов и «самораспространяющаяся псевдообразованность» Фейнмана

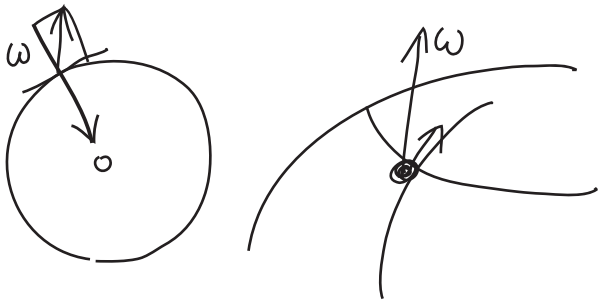
На горизонтальном столе в Санкт-Петербурге лежат вверх циферблатом часы. Куда направлен вектор угловой скорости их часовой стрелки?

Решение. Угловая скорость стрелки по отношению к корпусу часов направлена вниз (так как стрелка движется «по часовой стрелке»), а по величине она вдвое больше угловой скорости вращения Земли вокруг своей оси (так как полный оборот стрелка совершает за 12 часов, а Земля за 24 часа).

Направлен же вектор угловой скорости вращения Земли к Полярной звезде (так как Земля вращается, если смотреть с севера, против часовой стрелки).

Угловая скорость суммарного движения является суммой двух описанных векторов (угловой скорости движения Земли и угловой скорости стрелки по отношению к Земле).

Широта Санкт-Петербурга составляет 60°, поэтому компоненты вектора длины ω угловой скорости Земли, направленные на восток вдоль параллели, на север вдоль меридиана и вверх, составляют $(0,\ \omega/2,\ \omega\sqrt{3}/2)$.



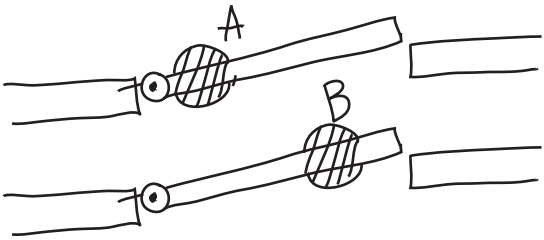
Компоненты вектора угловой стрелки часов относительно Земли (в той же системе ортогональных координат) составляют $(0,\ 0,\ -2\omega)$.

Поэтому компоненты вектора угловой скорости стрелки равны $(0,\ \omega/2,\ -\omega(4-\sqrt{3})/2)$: он направлен в плоскости меридиана, но не к Полярной звезде (угол возвышения которой в Санкт-Петербурге составляет 60°), а в другом направлении — ниже линии горизонта — с углом возвышения $\operatorname{arctg}(-(4-\sqrt{3})) \approx -66^\circ$.

Хотя угловым скоростям всех в школе учат, мало кто достигает их понимания, нужного для решения приведённой задачи.

Р. Фейнман отмечает (в своей книге «Вы, конечно, шутите, мистер Фейнман!»), что обучение, даже университетское, приводит студентов к состоянию «самораспространяющейся псевдообразованности», при котором никто ничего толком не понимает, а только может успешно сдавать экзамены.

Например — говорит Фейнман — определение «момент инерции точки относительно оси равен произведению массы этой точки на квадрат расстояния до оси» бессмысленно для обучающегося до тех пор, пока ему не объяснят, что груз A, закреплённый на двери неподалёку от петель, почти не мешает открывать или закрывать эту дверь, в то время как такой же груз B, закреплённый на далёком от петель ребре двери делает эту же дверь неповоротливой:



Но, к сожалению, профессор ограничивается (правильной) формулировкой $I = \sum mr^2$, и именно её спрашивает на экзамене.

На экзамене по оптике Фейнман спрашивал студента, что будет с лежащей под стеклом на столе программой

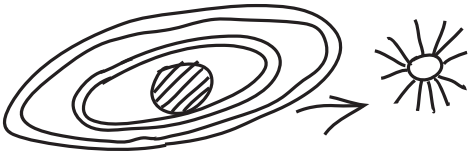
экзамена, если наклонить стекло на угол α? Студент, естественно, отвечал, будто изображение повернётся на угол 2α (хотя он только что рассказал о законе Снеллиуса, связь геометрии лучей с местоположением видимого изображения не была ему известна). Вопрос Фейнмана, не путает ли студент плоско-параллельное стекло стола с зеркалом, нисколько студенту не помог.

Планетные кольца

Двигаясь по своей орбите вокруг Солнца, планета Уран загородила собой от Земли (на некоторое небольшое время) далёкую звезду. Астрономы готовились к этому событию задолго, но, в нужную ночь, звезда стала невидимой раньше времени. Потом она появилась, исчезла опять, и таких исчезновений до «прохождения Урана по диску звезды» наблюдалось четыре.

После этого звезда скрылась за Ураном, как предсказывали астрономы, была загорожена им предполагавшееся время, снова появилась — но затем на небольшие времена исчезала ещё 4 раза.

Как объяснить эти исчезновения?



Решение. Наиболее естественное предположение — что планета Уран, подобно Сатурну, окружена кольцами. Четыре концентрических кольца, разделённые (как и у Сатурна) щелями, должны загораживать звезду 4 раза до и 4 раза после прохождения Урана мимо неё. Наблюдения доставляют размеры колец и щелей.

Замечание. Щели между кольцами Сатурна объясняются возмущающим влиянием притяжения составляющих кольца глыб льда со стороны спутников планеты. Такое возмущение делает неустойчивым движение глыбы по орбите на таком расстоянии от планеты, что обращение по этой орбите совершается в резонанс с обращением спутника (скажем, со вдвое меньшим периодом, чем период обращения спутника: опасны для устойчивости рациональные отношения периодов).

Размеры наблюдённых при прохождении Урана щелей между его кольцами позволили астрономам (Фридману и др.) предсказать радиусы орбит пяти возмущающих спутников Урана, которые не были ещё известны (но были затем открыты при последовавшем полёте «Вояджера» мимо Урана).

Интересно, что международный астрономический журнал отказался опубликовать предсказания советских астрономов, мотивируя это тем, что «журнал издаётся в стране, где господствует другая теория щелей в кольцах Сатурна».

Эта «другая теория» тоже предсказывала спутники Урана, но их-то как раз не оказалось на месте в действительности, и американская экспедиция «Вояджера» их не обнаружила.

Мне кажется, Нобелевские премии специально созданы для увенчивания именно таких научных открытий, подтверждённых впоследствии экспериментами или наблюдениями, как описанная теория колец Урана.

Но американские астрономы, с которыми я это впоследствии обсуждал, возразили: «наша цель — поддерживать американские теории, а не российские».

К счастью, ни Нобелевские премии, ни филдсовские медали, ни другие подобные награды не оказывают существенного влияния на поступательный ход развития естественных наук, которые движут не столько решения разных Академий, сколько любознательность исследователей, к которым я и обращаюсь в настоящей книжке.

Зельдович, посмеиваясь, говаривал, что и он, и я, и Сахаров, и Колмогоров — все мы относимся к категории ЧВАН (от глагола «чваниться») — буквально «Член Всех Академий Наук». Но Колмогоров ценил только одно подобное отличие — вхождение в список Почётных членов Лондонского математического общества. Он был, конечно, и членом Лондонского королевского общества (Академии наук Англии), но это ценил меньше: пер-

вым российским членом туда приняли, по приглашению президента Ньютона, Александра Даниловича Меншикова (который был безграмотен и подписал своё согласие вступить, написанное для него Шафировым, четырьмя крестами, которые мне показали, вкладывая протокол моего избрания в ту же папку российских членов Королевского общества).

Симметрии (и принцип Кюри)

Провести через центр однородного куба прямую так, чтобы его момент инерции относительно этой прямой был максимальным.

Решение. Рассмотрим эллипсоид инерции куба (относительно его центра). Куб имеет четыре оси симметрии третьего порядка (его поворот на $2\pi/3$ вокруг каждой из его больших диагоналей переводит куб в себя).

Следовательно и его эллипсоид инерции имеет такие же четыре оси симметрии третьего порядка.

Но эллипсоид имеет ось симметрии третьего порядка, только если он является эллипсоидом вращения (относительно этой оси).

Следовательно, эллипсоид инерции однородного куба (относительно его центра) имеет четыре оси вращения, а потому является сферой.

Стало быть, *моменты инерции однородного куба относительно всех прямых, проходящих через его центр, одинаковы.*

Замечание. Вместо однородного куба можно взять куб с любой системой масс, имеющей его симметрии. Например, можно разместить 8 одинаковых масс в его вершинах. Мы заключаем, что *сумма* 8 *квадратов расстояний восьми вершин куба от любой прямой, проходящей через его центр, одинакова, какую бы прямую не взять.*

В таком виде приведённая задача имеется в «Квантовой механике» Ландау и Лифшица. Там вместо момента инерции рассматриваются собственные оси колебаний симметричных молекул: для молекулы с симметрией куба собственной осью оказывается любая (проходящая через центр) прямая.

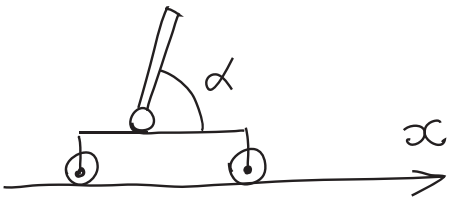
П. Кюри считал своим главным открытием следующий принцип (сегодня цитируемый как «принцип Кюри»): симметрии следствий отражают симметрии при-

чин, поэтому всегда следует доискиваться до последних, наблюдая первые (например, видя симметрии кристалла, искать их причины в строении соответствующих молекул).

Ошибочные теоремы Куранта

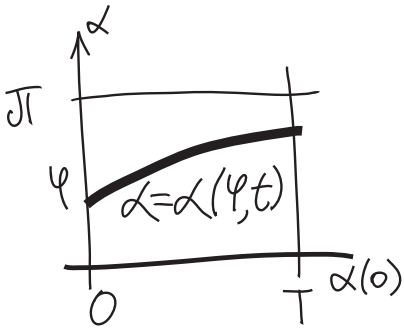
На горизонтальных рельсах стоит платформа, на которой укреплена перпендикулярно рельсам горизонтальная ось вращения «перевёрнутого маятника», который может свободно вращаться в (параллельной рельсам) вертикальной плоскости. Платформа движется по закону $x = f(t)$ *(где* f *— гладкая на отрезке* $[0, T]$ *функция времени).*

Доказать, что существует такое начальное состояние маятника $(\alpha(0) = \varphi,\ (d\alpha/dt)(0) = 0)$*, что он не упадёт на платформу за всё время* T *её движения.*



Решение (Куранта). Если $\varphi = 0$, то $\alpha(t) = 0$ всегда, и если $\varphi = \pi$, то $\alpha(t) = \pi$ при всех t.

Из непрерывной зависимости решения (гладкого) дифференциального уравнения от начального условия φ заключаем, по теореме о промежуточном значении, что между начальными условиями $\alpha(0) = 0$ и $\alpha(0) = \pi$ существует такое значение $\alpha(0) = \varphi$, что $\alpha(t)$ при $0 \leqslant t \leqslant T$ заключено строго между 0 и π, так что маятник не падает.



Замечание. Многие возражали против этого (ошибочного) доказательства, так как, даже если бы была определена непрерывная функция $\alpha(\cdot, T)$, начального положения φ, из её отличия от нуля и π при начальном условии $\cdot = \varphi$ не следует отличие угла α от 0 и от π во все промежуточные значения моменты времени, $0 < t < T$.

Вероятно, можно было бы рассмотреть разумное обобщение рассуждений Куранта, в котором значения функции $\alpha(\varphi, t)$ определены естественным продолжением после моментов удара о платформу (где $\alpha(\varphi, t)=0$ или π). Но в литературе такое обобщение отсутствует, и строгое доказательство приведённой гипотезы Куранта неизвестно.

Различные возражения к различным попыткам обосновать вывод Куранта опубликовали Дж. Литтлвуд и другие (например, некоторые из «контрпримеров» к одному из таких обоснований оказались недействительными, если скорость df/dt меньше скорости света).

Но я не видел разумного анализа этой задачи с учётом ударов.

Описанная теорема была помещена Курантом в замечательный элементарный учебник: Курант и Роббинс «Что такое математика?», со ссылкой на Уитни.

Другая ошибочная теорема была включена Курантом в знаменитую книгу Куранта и Гильберта «Методы математической физики». Эта теорема доставляет топологическое описание линейных комбинаций первых n собственных функций оператора Лапласа: их нули делят колеблющееся многообразие не больше, чем на n частей.

Курант правильно доказал это для n-й собственной функции, но для её комбинаций с предыдущими собственными функциями это не всегда так. В случае одномерного колеблющегося тела (струны) утверждение Куранта, вероятно, верно.

И. М. Гельфанд рассказал мне идею своего доказательства этого утверждения Куранта. Оно основано на

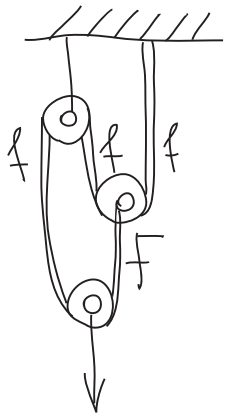
замене бозевского уравнения Лапласа фермиевским (для n электронов, на фиксированной, например, окружности).

Применяя к первой антисимметричной собственной функции этой n-мерной задачи теорему Куранта о чистых собственных функциях и фиксируя положения всех электронов, кроме одного, Гельфанд обещал получить на фиксированной окружности любую линейную комбинацию первых n собственных функций одномерной задачи.

Но полного доказательства никто пока не опубликовал.

Некорректные задачи механики

Три (невесомых) идеальных блока соединены, как показано. Найти ускорение груза, подвешенного к нижнему блоку.



Решение. Обозначим через f натяжение верёвки, идущей с потолка к среднему блоку. Тогда натяжение F верёвки, соединяющей средний блок с нижним, будет $F = 2f$, так как вторая ветвь верёвки (соединяющая верхний блок со средним) тянет вверх средний блок с силой f (ввиду его идеальности).

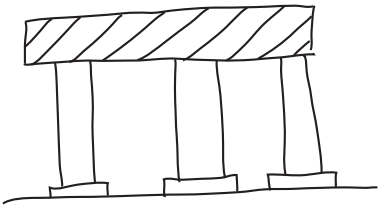
Точно так же сила, с которой тянет вверх нижний блок верёвка, соединяющая его с верхним блоком, есть f (ввиду идеальности верхнего блока). И, наконец, идеальность нижнего блока даёт уравнение $f = F$ (равенства сил натяжения обеих верёвок, на которых он висит).

Итак, мы получили 2 соотношения сил натяжения, $F = 2f$ и $F = f$. Из них следует, что $f = F = 0$. Это означает, что *третий блок ни на чём не подвешен, а потому падает, вместе со своим грузом, с ускорением g свободного падения.*

Замечание. Учёт масс блоков (а также инерции их вращения) сильно усложняет задачу. Мы не будем здесь обосновывать стремление к g ускорения нижнего блока

при стремлении масс блоков к нулю (которое было бы, математически говоря, нужно для обоснования приведённого «физического» решения задачи).

Число подобных «некорректно поставленных» задач в самых разных областях приложений огромно — упомяну хотя бы все «статически неопределённые» ситуации, вроде распределения веса балки между тремя поддерживающими её одинаковыми колоннами.



Есть сотни работ, доставляющих «алгоритмы» решения подобных задач, и некоторые из построенных для этого математических теорий (например, недавние работы Л. Ниренберга) очень красивы. Но вопрос об их практической применимости — совсем другой.

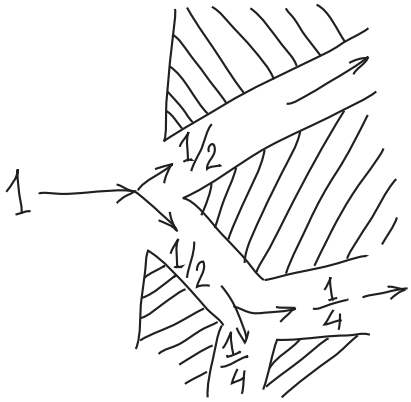
А. Н. Крылов вспоминал, что Вольтерра дал строгое математическое доказательство устойчивости железнодорожного моста, по которому идёт поезд массы M со скоростью v, при условии что M не слишком велико.

Но он указывает, что масса M (в практически интересных примерах) получалась 10 грамм: «теорема правильна, и доказательство тоже, но к делу отношения не имеет». Он умел вычислять реалистические пределы массы M, при превышении которых мост мог обрушиваться, но строгого доказательства устойчивости при меньших значениях M не было.

Ученик Крылова, С. Тимошенко, построил и рассчитал множество (самых знаменитых) мостов США, включая восстановление упавшего вследствие флаттера Такомского моста — но он исходил не из доказанных оценок Вольтерра, а из правильного понимания сути дела.

Рациональные доли потоков

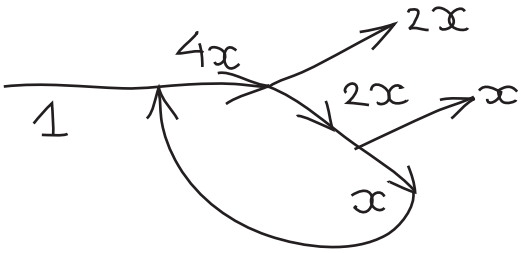
Разделитель (толпы, идущей по коридору) направляет одного человека налево, а другого направо, так что поток делится на части одинаковой мощности, направленные в разные стороны:



При помощи нескольких таких разделителей можно отделить четверть потока или три восьмых его.

А можно ли отделить треть потока?

Решение. Скомбинируем два разделителя так, чтобы первый разделял весь входящий в него поток, а второй — одну из образовавшихся половин потока. Из двух образованных так четвертей потока, входящего в первый разделитель, одну из четвертей отправим обратно, включив её во входящий поток:



Пусть исходный входящий в нашу систему поток был мощности 1 (скажем, 100 человек в минуту). Обозна-

чим мощность возвращаемой четверти потока, входящего в первый разделитель, через x.

Тогда весь этот (входящий в первый разделитель) поток имеет мощность

$$1 + x = 4x,$$

т. е. $x = 1/3$, что и решает задачу.

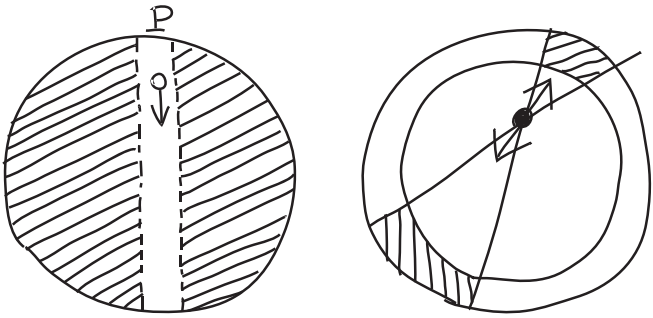
Замечание. Используя больше стандартных разделителей потоков на две равные части, можно было бы отделить любую рациональную долю исходного потока ($x = p/q$).

Эти математические теоремы были открыты экспертами по противопожарной обороне, готовившимися к оптимальному использованию метро после атомной бомбёжки.

Путешествие к центру Земли

Камень падает (без начальной скорости) в шахту, диаметрально просверливающую всю сферическую планету.

Исследовать его движение под действием гравитационного поля (считая планету однородной, имеющей постоянную плотность).



Решение. Согласно теореме Ньютона, уже пройденные (однородные) сферические слои камень не притягивают, а ещё не пройденные притягивают так, как если бы их масса была в центре планеты.

Обозначим расстояние от камня до центра планеты через r. Тогда объём (а значит, и масса M) оставшихся непройденными слоёв будет пропорционален r^3. По закону всемирного тяготения сила притяжения такой массой, находящейся в центре планеты, убывает с r, как $M/r^2 = r$.

Значит, камень в такой шахте движется в соответствии с силовым полем закона Гука:

$$\ddot{r} = -\omega^2 r, \qquad r = R\cos(\omega t).$$

Здесь амплитуда R есть радиус планеты.

Итак, камень совершает вокруг центра планеты гармонические колебания. Он вернётся в исходную точку P через период $T = 2\pi/\omega$ (побывав в середине этого периода у антиподов).

Чтобы избежать длинных вычислений коэффициента ω^2 в уравнении поля Гука, рассмотрим близкий спутник, вращающийся вокруг планеты по проходящей через P окружности большого круга. Ортогональная проекция этого спутника на диаметр шахты совершает при его движении гармонические колебания с амплитудой R. В точке P гравитационное поле, действующее на этот камень и на спутник, одинаково (так как камень не прошёл ещё ни одного сферического слоя).

Поэтому период T колебаний камня в шахте равен периоду прохождения близким спутником всей своей круговой орбиты (для планеты Земля это примерно полтора часа).

Эти законы Ньютона объясняют удивительный состав колец Сатурна: глыбы льда, из которых они состоят, имеют в среднем размер от 10 до 20 метров.

Случайно движущиеся по (не совсем круговым) кеплеровским орбитам глыбы, естественно, могут столкнуться, и средняя скорость удара вычисляется, исходя из среднего размера глыб: она зависит от разности скоростей движения по близким кеплеровым орбитам.

Осколки от соударения имеют тем бóльшую скорость, чем больше скорость удара. Вычисления показывают, что для бóльших 20 м глыб эта скорость осколков больше (второй) космической скорости (ухода осколков далеко от родившей их глыбы), так что такая глыба от столкновений будет уменьшаться.

Если же глыба имеет размер меньше 10 метров, то осколки вылетают с меньшими скоростями, и они возвращаются обратно — хотя бы одна из столкнувшихся двух глыб растёт.

Эта-то динамика и приводит к установлению населённости кольца и не слишком большими, и не слишком малыми глыбами (которая и обнаружена была, после описанных выше вычислений, при полёте Вояджера).

Средняя частота взрывов (Я. Б. Зельдович) и мир де Ситтера

Процесс со взрывами описывается законом (Бернулли) эволюции

$$\frac{dx}{dt} = a(t)x^2 + b(t)x + c(t).$$

Пример уравнения $\dot{x} = x^2$ *показывает, что решение может уйти на бесконечность за конечное время, это и описывает взрыв:*

$$x(t) = \frac{x(0)}{1 - tx(0)}. \qquad (*)$$

Но решение можно продолжить за момент взрыва (обойдя полюс $t = 1/x(0)$ *в комплексной окрестности его).*

Незадолго до смерти Я. Б. Зельдович сформулировал следующий вывод своего исследования асимптотического анализа приведённого уравнения взрывных процессов (он имел в виду, в первую очередь, космологию) за большое время.

Пусть коэффициенты (a, b, c) *— периодические гладкие функции времени* t. *Тогда число* N *взрывов за большое время* T *имеет временное среднее*

$$\lim_{T\to\infty} \frac{N(T)}{T} = \overline{N}.$$

Если это среднее число взрывов за период рационально, то процесс оказывается периодическим, а если иррационально — то нет.

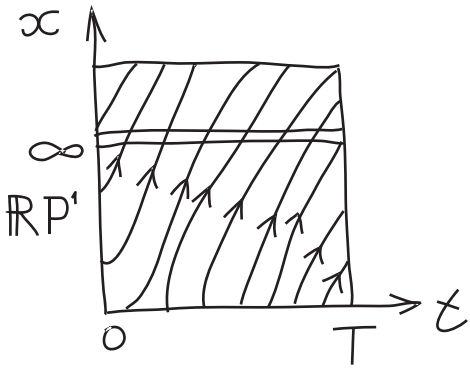
Решение. Фазовым пространством $\{x\}$ нужно считать не вещественную ось $\mathbb{R}$, а проективную прямую, т. е. окружность $\mathbb{R}\mathrm{P}^1 \approx S^1_x$ (включающую точку $x = \infty$).

Например, формула $(*)$ означает, что преобразование фазового потока (переводящее $x(0)$ в $x(t)$) является проективным преобразованием фазового пространства.

Ось времени $\{t\}$ тоже нужно считать окружностью, $\mathbb{R}/(T\mathbb{Z}) \approx S^1_t$ (окружность фазы изменения коэффициентов).

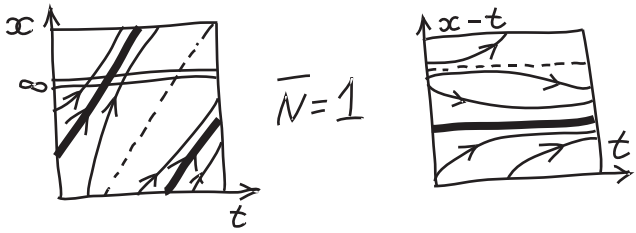
Тогда дифференциальное уравнение эволюции превращается в гладкое поле направлений на торе-произведении

$$T^2 = S^1_t \times S^1_x.$$



Применяя к этой динамической системе на торе теорию Пуанкаре (см., например, «Дополнительные главы теории ОДУ»), мы находим, что существует «число вращения» Пуанкаре $\overline{N}$.

Когда оно рационально, эта система имеет аттрактором замкнутую на торе кривую, которая и описывает периодический ход процесса.



Замечание. Я. Б. Зельдович решил эту задачу за неделю до смерти. Он не знал теории Пуанкаре, а просто изобрёл её. Но он не успел опубликовать свою теорию.

Интересно, что ни один математик не указал до того этих применений теории Пуанкаре. Дело в том, что теория Зельдовича основана на смелом изменении топологической структуры фазового пространства: он заменил аффинную прямую $\mathbb{R}$ проективной прямой $\mathbb{R}P^1$, диффеоморфной окружности.

Математики избегают таких перестроек моделей (исключая, разве, применяемый изредка переход от плоскости Евклида к плоскости Лобачевского), предпочитая исследовать точно поставленный математически вопрос.

Напротив, в физике давно бытует мнение, что «гомологии или когомологии — это те же физические поля, только с особенностями определённого вида на бесконечности».

Приведу, впрочем, пример, мало известный даже и физикам: пространство Лобачевского (в модели Кэли—Клейна) при продолжении за абсолют бесконечно удалённых точек становится (релятивистским) миром де Ситтера.

В каждой точке дополняющего круг модели Кэли—Клейна до проективной плоскости мира де Ситтера пересекаются две прямые, касающиеся «абсолюта», ограничивающего плоскость Лобачевского модели. Эти две прямые определяют световые геодезические релятивист-

ского мира де Ситтера: они разделяют времяподобные и пространственно-подобные направления.

Этот (дополнительный к плоскости Лобачевского) мир де Ситтера топологически представляет собой лист Мёбиуса (который именно так и был открыт Мёбиусом — его можно описать как дополнение к окрестности одной точки на проективной плоскости).

Фонтаны Бернулли Никологорского моста

На мосту через Москву-реку в селе Успенском было (до апреля 2007 года) двенадцать дыр для стока дождевой воды, скапливавшейся на краю асфальта, у тротуаров.

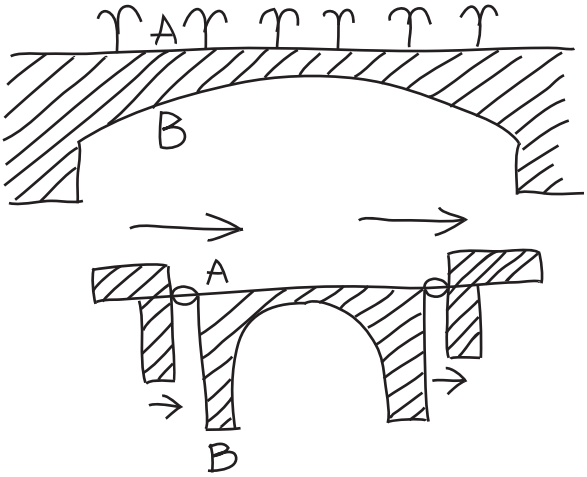
В 1980 году в сильную грозу велосипедист (В.И.А.), проезжавший по этому мосту, хотел заглянуть в одну из этих дыр, посмотреть, как стекает дождевой поток.

Но ничего туда не стекало — напротив, из каждой дыры вверх бил фонтан воды (метра в 3 высотой).

Чем объясняются эти 12 фонтанов?

Решение. Закон Бернулли «скорость больше — давление меньше» объясняет, в чём дело.

Выше моста вдоль реки дул сильный ветер, а ниже мост его загораживал. Поэтому у верхнего отверстия *A* трубы для стока воды скорость ветра была бóльшей, чем у нижнего, обращённого к реке, отверстия *B*.



Возникающее внизу бóльшее давление и создало тот напор, который заставил бить наблюдённые фонтаны.

Замечание 1. Описанная выше история была рассказана В.И.А. во время поездки с Николиной Горы

в Ново-Дарьино в пересекавшей упомянутый мост машине Н. Н. Андреева (инициатора написания настоящей книжки). Слушателем был телевизионный интервьюер А. Н. Марутян.

Мост и открывающийся с него вид (запечатлённый даже Левитаном) был показан в результирующей передаче канала «Культура» («Острова»). При этом видно, что В. И. А. что-то рассказывает — но звук был на это время отключён, так что нежелательной ссылки на мало кому известный закон Бернулли телевизионщикам удалось избежать.

В существование наблюдавшихся на мосту фонтанов мало кто верил уже в 1980 году (вдоль реки должен дуть очень сильный ветер, чтобы они были видны), а сейчас их больше нет: дыры заделали при ремонте моста весной 2007 года.

Замечание 2. Через несколько минут после пересечения моста справа от шоссе появился ещё один объект, вызвавший интересный рассказ, также исключённый телевизионщиками.

А именно, шоссе пересекало там речку Слезню, на которой чуть выше моста был устроен пруд (принадлежащий совминовскому посёлку «Успенское»). Вдоль берега этого благоустроенного пруда тянутся деревянные мостки для загорающих. Рассказ состоял в том, что это — те самые мостки, с которых упал в воду Б. Н. Ельцин (хотя легенда хочет, чтобы «его сбросили в Москву-реку с высокого моста у Успенского»).

Высота описанного выше моста у Успенского — метров 10, и падение, действительно, было бы неприятным. Но с мостка над Слезней до воды меньше метра.

К сожалению, в фильм «Островов» этот мосток над Слезней не включён. Зато Марутян отыскал (пользуясь изготовленной мною картой) расположенное километрах в 15 от Слезни клюквенное болото (недалеко от села Дмитровского, дворца Патриарха Алексия под Истрой

и церкви, у которой Лжедмитрий встречал ехавшую из Польши Марину). Зарастающее сфагнумом ледниковое озеро посреди этого болота доставляет мне ежегодно несколько вёдер чудесной клюквы, а выглядит оно в фильме Марутяна вполне по-карельски.

На этом болоте, наряду с клюквой, столь же обильна людоедка-росянка — эта болотная трава питается живыми насекомыми, которые приклеиваются к её листочкам. Листочек тогда сворачивается (в виде мышеловки) и переваривает попавшуюся мушку.

Ещё лет сорок назад со мной делили купанье в этом ледниковом озере лоси и кабаны окрестного леса, но теперь кабанов съели, а лоси дожидаются, чтобы я увёз свою клюкву на велосипеде.

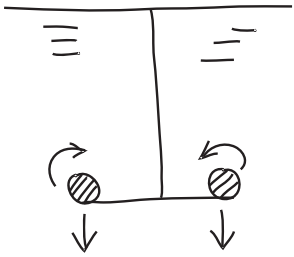
Формообразование в трёхлитровой банке

Капните каплю чернил или туши в неподвижно стоящую трёхлитровую банку с водой (*избегая начального толчка, т.е. осторожно «подвесив» каплю на поверхности воды*).

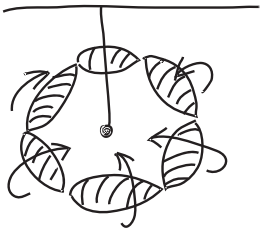
Как она будет тонуть?

Решение. Вначале «подвешенная» капля, расплывшаяся вдоль поверхности в виде маленького плоского круга, соберётся в его центре и провалится (на пару сантиметров) вниз.

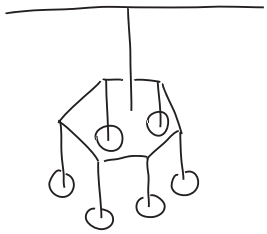
Сопротивление воды расплющит падающую вниз каплю, так что она превратится в окрашенный тор, вращающийся вдоль меридианов. Снизу этот тор затянут тонкой плёнкой чернил, из центра которой вверх тянется заметный след пролёта капли.



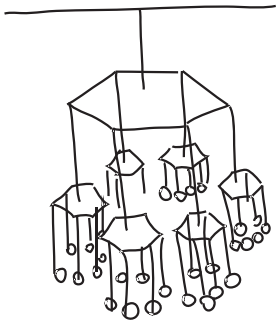
Затем движение падающего тора становится неустойчивым, и он теряет симметрию. Обычно симметричный «бублик» деформируется в кольцевую связку из шести «сосисок», каждая из которых напоминает исходную каплю (хотя и продолжает вращаться).



Через некоторое время все эти 6 «вращающихся капель» проваливаются вниз, как это сделала вначале исходная капля. Образуется своеобразная «люстра» из шести подвешенных торов.



Дальнейшая эволюция этих торов — такая же, как у первого: люстра становится двухэтажной.



Если делать всё это аккуратно, дав вначале воде хорошо отстояться, чтобы она была неподвижной, и не поднося даже рук близко к банке с водой, чтобы избежать возникновения движения воды из-за градиентов температуры, то можно наблюдать в обычной трёхлитровой банке целых 6 этажей, прежде чем многие сотни торов достигнут дна.

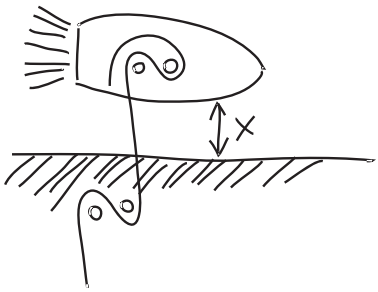
Строгого математического доказательства описанная картина, кажется, ещё не имеет, но она хорошо наблюдается в экспериментах.

Например, Р. Том, рассказавший об этом и мне, прочёл описание этих явлений в старинной книге Д'Арси Томпсона «Об образовании форм» (где эти «люстры» соседствовали с описаниями роста разных кораллов).

Задача Лидова о прилунении ракет

Технология причаливания корабля к пристани состоит в том, что в последний момент матрос бросает на берег канат, а затем, спрыгнув туда сам, наматывает этот канат на кнехт и вручную притягивает судно, выбирая руками метр-два каната

Объяснить, почему необходимость подобного ручного причаливания обуславливается теоремой единственности, работающей здесь против нас.



Решение. Дело в том, что интегральные кривые дифференциального уравнения $dx/dt = -x$ с начальными условиями $x(0) = 1$ и $x(0) = 0$ явно пересекаются на любом компьютерном графике: при $t = 30$ (или даже 10) между этими кривыми не вставишь и атома.

Обычные принципы теории управления движением требуют выбирать скорость приближения к берегу, dx/dt, при помощи петли обратной связи, то есть выбирая скорость в зависимости от оставшегося расстояния, $dx/dt = f(x)$.

Имея это в виду и предполагая функцию f гладкой (или хотя бы удовлетворяющей условию Липшица), мы выводим из теоремы единственности, что время причаливания должно быть бесконечным.

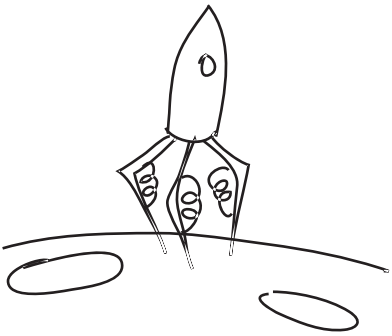
Или же следует полагаться на ненулевую скорость приближения в последний момент, то есть удар о пристань (ради чего её край и обвешивается использован-

ными автопокрышками, даже в случае, когда заключительный шаг причаливания выполняется вручную).

Замечание. Мой близкий друг М. Л. Лидов был ведущим баллистиком, рассчитывающим орбиты искусственных небесных тел, спутников, лунных экспедиций и т. п.

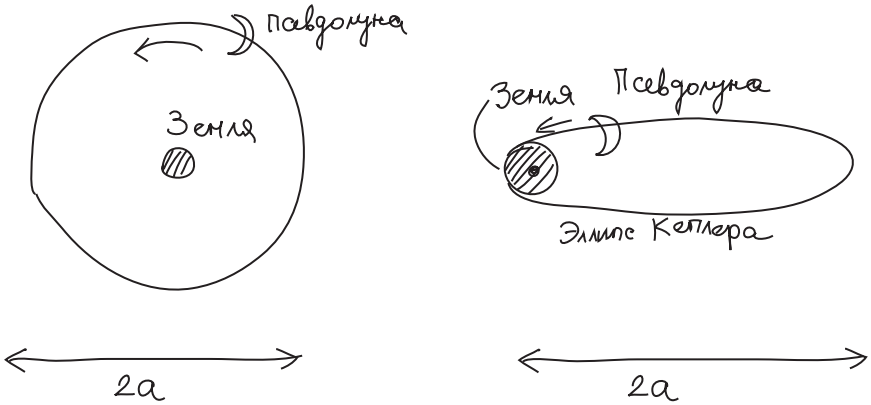
Однажды, примерно около 1960 года, он сказал мне: «Теорема единственности твоего курса теории обыкновенных дифференциальных уравнений совершенно не верна, несмотря на совершенно строгое её доказательство» («в котором, — добавил он, — я не сомневаюсь»). В качестве подтверждения он рассказал эту задачу.

Причина, по которой Лидов знал все эти детали причаливания кораблей, состояла в том, что ему нужно было сажать ракеты на поверхность Луны. Управляемая мягкая посадка противоречит и здесь теореме единственности. Выбранный практически метод состоит в демпфировании заключительного удара за счёт недолгих осцилляций колен «ног» треноги ракеты.



Лидову принадлежит много замечательных достижений в космической баллистике. Например, он исследовал эволюцию «псевдолуны» — спутника Земли с орбитой размеров орбиты Луны, при условии что наклонение этой орбиты к плоскости эклиптики (в которой Земля вращается вокруг Солнца) не мало (как у настоящей Луны, где оно около пяти градусов), а, напротив, велико.

При наклонении около 80° анализ Лидова привёл его к выводу, что такая псевдолуна упала бы на Землю примерно за 4 года (вследствие быстрого роста эксцентриситета орбиты вследствие возмущающего влияния Солнца).



Этот удивительный результат Лидова не противоречит теореме Лапласа о неизменности среднего расстояния a эволюционирующей траектории возмущаемого (здесь — притяжением Солнца) кеплерова эллипса от притягивающего центра (здесь — Земли).

Даже при падении псевдолуны на Землю её *среднее* расстояние от Земли остаётся прежним ($a \approx 380\,000$ км). Но эксцентриситет этого эллипса Кеплера за четыре года вырастет столь сильно, что этот эллипс начнёт пересекать Землю (не являющуюся материальной точкой, а имеющую радиус около 6400 км).

Наступления и отступления ледников

Согласно теории Лагранжа вековых возмущений планетных орбит плоской задачи n планет, вектор Лапласа z, соединяющий Солнце с центром мгновенного кеплерова эллипса каждой планеты, представляет собой сумму n равномерно вращающихся с угловыми скоростями ω_k векторов плоскости движения фиксированных длин a_k ($k = 1, \ldots, n$):

$$z = \sum_{k=1}^{n} a_k e^{i\omega_k t}$$

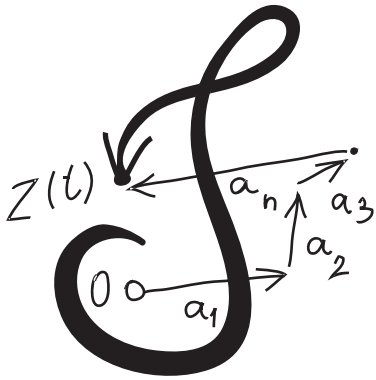
(в терминах комплексной координаты z на плоскости движения).

Величина эксцентриситета, пропорциональная $|z|$, и направление перигелия, $\varphi(t) = \arg z$, сложным образом меняются со временем.

Лагранж предположил, что существует его среднее движение

$$\Omega = \lim_{t\to\infty} \frac{\varphi(t)}{t},$$

и предложил вычислить это среднее значение угловой скорости движения перигелия.



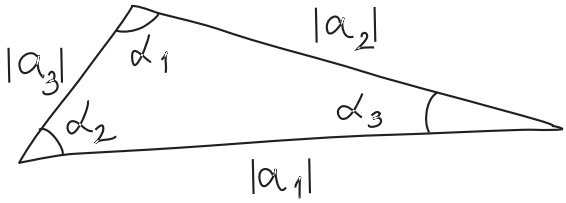
Эволюция вектора Лапласа $z(t)$ является одной из причин наступления ледников, так как, когда этот век-

тор велик, кеплеров эллипс получается сильно эксцентричным. В этом случае планета больше времени проводит вдали от Солнца, и средняя температура на ней падает.

Например, количество энергии, доставляемой солнечными лучами на широте Петербурга колеблется (за какой-нибудь десяток тысячелетий) между количествами, получаемыми на широте Таймыра и на широте Киева.

Замечание. Если один из складываемых векторов длиннее суммы остальных (т. е. $|a_j| > \sum\limits_{k \neq j} |a_k|$), то средней угловой скоростью движения перигелия будет угловая скорость этого слагаемого, a_j (Лагранж).

Оказывается, в реальной солнечной системе дело обстоит именно так для большинства планет. Но для Земли и для Венеры имеется по несколько слагаемых примерно одной длины, так что задача становится содержательной уже для случая трёх планет, когда числа $|a_1|$, $|a_2|$, $|a_3|$ являются длинами сторон треугольника:



В этом случае задача была решена Г. Вейлем, и ответ имеет вид среднего арифметического

$$\Omega = p_1\omega_1 + p_2\omega_2 + p_3\omega_3 \qquad (*)$$

с весами, пропорциональными углам упомянутого треугольника:

$$p_j = \alpha_j/\pi.$$

Это значение средней угловой скорости (не зависящее притом от начальных положений вращающихся векторов) получается при почти всех (в смысле меры Лебега) значениях угловых скоростей ω_j (достаточна, например,

их арифметическая независимость, т. е. отсутствие резонансов

$$m_1\omega_1 + m_2\omega_2 + m_3\omega_3 = 0$$

с целыми векторами $m \neq 0$).

При наличии резонансов ответ может зависеть от начальных положений, но в среднем такой же (при усреднении по всевозможным начальным положениям вращающихся векторов).

При бóльшем трёх числе n не слишком длинных слагаемых (т. е. $|a_j| < \sum\limits_{k \neq j} |a_k|$) ответ также даётся аналогичным (*) средним арифметическим угловых скоростей, но роль углов треугольника переходит к следующим «обобщённым углам» p_k.

Рассмотрим $(n-1)$-мерный тор T^{n-1} с угловыми координатами φ_k, $k \neq j$. Составим зависящий от точки φ тора вектор

$$\xi(\varphi) = \sum_{k \neq j} a_k e^{i\varphi_k}.$$

Для некоторых j-опасных точек φ длина этого вектора меньше числа $|a_j|$: $|\xi(\varphi)| < |a_j|$.

Вес p_j представляет собой меру множества j-опасных точек φ (выраженную в таких единицах, чтобы мера всего тора была 1).

В случае $n = 3$ это определение приводит к весам $p_j = \alpha_j/\pi$, как легко сосчитать.

Утверждение, что сумма весов $p_1 + \ldots + p_n$ равна 1 при любом n верно, но не сразу очевидно (хотя и достаточно взять близкие к ω независимые угловые скорости ω_k, чтобы доказать это тождество между описанными выше весами p_j).

Подробное решение задачи о среднем движении перигелиев описано Г. Вейлем в двух длинных статьях, и ниже воспроизведена только его идея. Для простоты рассмотрим случай трёх слагаемых, $n = 3$.

Рассмотрим трёхмерный тор T^3 с угловыми координатами φ_1, φ_2, φ_3, и на нём векторное поле вращений с угловыми скоростями ω_1, ω_2, ω_3:

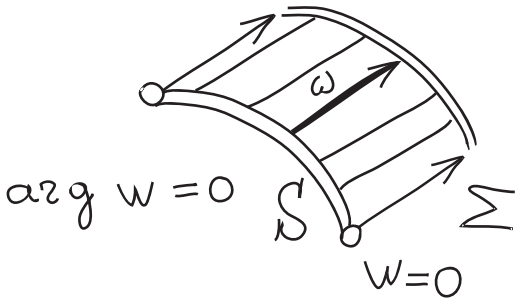
$$\dot{\varphi}_1 = \omega_1, \qquad \dot{\varphi}_2 = \omega_2, \qquad \dot{\varphi}_3 = \omega_3.$$

Каждой точке тора сопоставим комплексное число

$$w(\varphi) = a_1 e^{i\varphi_1} + a_2 e^{i\varphi_2} + a_3 e^{i\varphi_3}.$$

Аргумент этого комплексного числа корректно определён (с точностью до кратного 2π слагаемого) там, где $w(\varphi) \neq 0$.

Точки φ тора, где $w(\varphi) = 0$, образуют в нём замкнутую кривую, ограничивающую поверхность S, на которой комплексное число w положительно (и где $\arg w(\varphi) = 0$).



Эта поверхность коориентирована (направлением роста аргумента). Отложим от каждой точки этой поверхности S вектор угловых скоростей,

$$\omega = \omega_1 \frac{\partial}{\partial \varphi_1} + \omega_2 \frac{\partial}{\partial \varphi_2} + \omega_3 \frac{\partial}{\partial \varphi_3}.$$

Все отложенные векторы определяют 3-цепь Σ в торе T^3 (возможно, самопересекающуюся и не гладкую). Определим на торе T^3 функцию f, значение которой в каждой точке φ равно кратности прохождения построенной цепи Σ через эту точку (на рисунке $f = 0$ всюду, кроме заштрихованной области, где $f = 1$).

Среднее движение Ω является теперь (с точностью до множителя 2π) временным средним построенной функции f вдоль орбит динамической системы $\varphi(t) = \varphi(0) + \omega t$.

Из независимости частот следует эргодичность этой (сохраняющей меру Лебега) динамики, а значит — совпадение временного среднего с пространственным.

Пространственное среднее зависит от вектора частот ω, при помощи которого построена цепь и усредняемая функция f на торе.

Но эта зависимость от вектора ω является линейной (например, это следует из представления интеграла от функции f в виде потока поля ω через поверхность S).

Значит, для вычисления пространственного среднего достаточно посчитать его значения для трёх базисных векторов вида $\omega = \partial/\partial\varphi_k$ (не заботясь более об эргодичности соответствующего полю потока).

Последнее вычисление уже несложно, например, можно воспользоваться тем, что если вращается только одно слагаемое, то среднее вращение суммы равно 0, если оно короче вектора суммы двух других слагаемых.

Если же вращающееся слагаемое A_3 длиннее этого вектора суммы, то среднее вращение совпадает с угловой скоростью этого вращающегося слагаемого, ω_3.

Поэтому среднее (по всем направлениям неподвижных слагаемых A_1 и A_2) совпадает с долей тех направлений φ_1 и φ_2 этих слагаемых, при которых $|A_1 + A_2| < |A_3|$, каковая доля и доля α_3/π угла против стороны $|A_3| = |a_3|$ треугольника со сторонами $|a_1|$, $|a_2|$ и $|a_1|$ в сумме углов этого треугольника.

Замечание об эргодической теории

Намеченное выше вычисление среднего движения перигелиев выполнено Г. Вейлем при помощи идей «эргодической теории», позволяющих свести дело к нахождению пространственных средних подходящей функции

на фазовом пространстве T^3 динамической системы $\varphi \mapsto \mapsto \varphi + \omega t$ на торе.

Пространственные средние часто легче вычислять, чем временные. На этой идее основана вся статистическая физика. Совпадение временных средних (вдоль орбит хаотических динамических систем) с пространственными средними (по всему фазовому пространству) кажется физикам само собой разумеющимся, и они всегда применяют эту «эргодическую» гипотезу (со времён Л. Больцмана).

Но математики знают, что такое совпадение средних имеет место не всегда: система должна быть «эргодической», и даже эргодичность не гарантирует совпадение средних при всех начальных условиях динамики (хотя и обеспечивает его для почти всех начальных условий).

В специальном случае равномерного движения $\varphi \mapsto \mapsto \varphi + \omega t$ по тору T^n (с независимыми частотами ω_k) Г. Вейль доказал совпадение временного и пространственного среднего каждой непрерывной (или хотя бы интегрируемой по Риману) функции $f\colon T^n \to \mathbb{R}$ на торе объёма 1:

$$\lim_{T\to\infty}\left(\frac{1}{T}\int\limits_0^T f(\varphi+\omega t)\,dt\right) = \int\limits_{T^n}\!\!\ldots\!\int f(\varphi)\,d\varphi.$$

Пример. Пусть f — характеристическая функция (измеримой по Риману) области X на торе

$$\begin{cases} f(\varphi) = 1 & \text{при } \varphi \in X, \\ f(\varphi) = 0 & \text{при } \varphi \in T^n \setminus X. \end{cases}$$

Тогда стоящий в левой части интеграл выражает время, которое отрезок $0 \leqslant t \leqslant T$ орбиты динамической системы $\varphi \mapsto \varphi + \omega t$ проводит в области X.

Предел в левой части есть поэтому доля времени, которое орбита проводит в области X за весь бесконечный период $t \geqslant 0$.

Интеграл же в правой части равен для характеристической функции области X объёму этой области. Если всё фазовое пространство (у нас T^n) имеет объём 1, то этот интеграл выражает также долю объёма фазового пространства, занимаемую областью X.

Совпадение стоящего слева временного среднего характеристической функции со стоящим справа её пространственным средним называется равнораспределённостью орбит изучаемой динамической системы по фазовому пространству. Если динамика системы обладает этим свойством равномерного распределения (для любой области X, измеримой по Риману), то движущаяся точка проводит в различных частях фазового пространства времена, пропорциональные объёмам этих частей.

Из равномерного распределения орбит динамической системы в фазовом пространстве вытекает совпадение временных и пространственных средних всех (по меньшей мере измеримых по Риману) функций. Это следует из того, что такую функцию можно аппроксимировать линейной комбинацией характеристических функций нескольких областей.

Одновременно с доказательством равномерного распределения динамической системы $\varphi \mapsto \varphi + \omega t$ с непрерывным временем на торе T^n Г. Вейль доказал аналогичную теорему о равномерном распределении для динамической системы с дискретным временем

$$g\colon T^n \to T^n, \qquad g(\varphi) = \varphi + \lambda.$$

Орбиты этой динамики равномерно распределены на торе T^n, если вектор поворота λ обладает следующим свойством рациональной независимости компонент: целочисленная линейная комбинация

$$m_1\lambda_1 + \ldots + m_n\lambda_n + m_0$$

обращается в 0, если и только если вектор $m \in \mathbb{Z}^{n+1}$ равен нулю.

Пример. При $n = 1$ преобразование g есть поворот окружности, а условие независимости состоит в том, что угол этого поворота несоизмерим с развёрнутым углом (с 2π).

Эргодическая теория геометрических прогрессий

Рассмотрим первые цифры членов геометрической прогрессии чисел 2^t, $t = 0, 1, 2, \ldots$:

$$1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 1,\ 3,\ 6,\ 1,\ 2,\ 5,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

Какую долю составляют в этой последовательности единицы? В первом десятке членов последовательности 3 *единицы, требуется найти предел* $p_1 = \lim_{T\to\infty}$ (*число начинающихся с* 1 *чисел* 2^t *среди первых* T *членов прогрессии*).

Решение. Рассмотрим десятичные логарифмы членов нашей прогрессии: $\lg 2^t = t\lambda$, где $\lambda = \lg 2$.

Первая цифра положительного числа z равна k, если число z лежит в интервале $k10^a \leqslant z < (k+1)10^a$, где a — целое число. Иными словами, $a + \lg k \leqslant \lg z < a + \lg(k+1)$, то есть дробная часть числа $\lg z$ лежит в полуинтервале длины $p_k = \lg(k+1) - \lg k = \lg(1 + 1/k)$.

Число $\lambda = \lg 2$ иррационально (в противном случае имело бы место равенство $10^{p/q} = 2$, т. е. $10^p = 2^q$, что при $p > 0$ невозможно, поскольку 2^q не делится на 5).

По теореме Г. Вейля последовательность $\{t\lambda\}$, $t = 0, 1, 2, \ldots$ точек на окружности дробных долей $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ равномерно распределена. Доля времени, которое орбита проводит в интервале $[0, \lg 2)$ окружности дробных долей, равна, из-за равномерной распределённости, длине этого интервала: $p_1 = \lg 2 \approx 0{,}30$.

С единиц начинается около 30% членов геометрической прогрессии чисел 2^t.

Замечание. Такое же рассуждение с пространственным средним доставляет долю двоек, p_2, долю троек, p_3, и т. д.:

$$p_k = \lg(k+1) - \lg k = \lg\left(1 + \frac{1}{k}\right):$$

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$100p_k$	30	18	12	10	8	7	6	5	4

Вместо геометрической прогрессии со знаменателем 2 можно было бы рассматривать другие геометрические прогрессии, a^t (например, взять $a = 3$) — доля p_k чисел прогрессии, начинающихся с k, всё равно будет такая же, как для прогрессии 2^t. Важно только, чтобы знаменатель a не был рациональной степенью числа 10: сдвиг $\lambda = \lg a$ в динамической системе на окружности дробных долей должен быть иррациональным числом, чтобы орбита была равномерно распределена на окружности.

Замечание. В США принято называть эту теорему Вейля «законом Бедфорда», в честь физика, заметившего (около 1930 г.), что первые страницы таблиц логарифмов в библиотеке грязнее последних. Он объяснял это тем, что «случайные числа» всегда чаще начинаются с 1, чем с бóльших цифр, поэтому числа начальных страниц чаще приходится логарифмировать.

Но Бедфорд ошибался: например, в статистиках длин рек или высот гор с единиц начинаются столько чисел, сколько с девяток.

Здесь действует обычный «эпонимический принцип»: никакое открытие не носит имени первооткрывателя, всё приписывается друзьям тех, кто даёт имя (например, Америка не называется Колумбией).

Английский физик М. Берри назвал этот эпонимический принцип «принципом Арнольда», добавив к нему ещё и второй: «принцип Берри».

Этот *эпонимический принцип Берри* гласит: «принцип Арнольда применим к самому себе» (т. е. не Арнольдом изобретён).

Мальтузианский передел мира

Рассмотрим страны мира и посчитаем, в скольких из них число, выражающее количество населения начинается с цифры k.

Убедитесь, что доля таких стран составляет $p_k = \lg(1 + 1/k)$ (*как для геометрической прогрессии* 2^t *и как в таблице, приведённой на с.* 77).

Решение. Согласно закону Мальтуса, числа, выражающие количество населения страны в последовательные годы, образуют геометрическую прогрессию. Поэтому доля этих чисел, начинающихся с цифры k, составляет p_k.

Согласно эргодическому принципу, временное среднее (с усреднением по состоянию одной страны в разные годы) равно пространственному (среднему по состояниям всех стран мира в нынешнем году).

Замечание. Замените последовательности чисел, выражающих количество населения стран, какими-либо другими последовательностями — например, высотами гор, или длинами рек, или числами страниц книг на любимой книжной полке.

В этих случаях все первые начальные цифры 1, 2, ..., 9 встречаются примерно с одинаковой частотой $p_1 = p_2 = \ldots = p_9 = 1/9$ (в то время как выражающие населения числа начинаются с 1 в семь-восемь раз чаще, чем с 9).

Дело в том, что ни реки, ни горы, ни книги не растут в геометрической прогрессии — а вычисленное выше распределение $p_k = \lg(1 + 1/k)$ характерно именно для геометрических прогрессий.

Удивительно, но площади стран мира (будем ли мы их измерять в квадратных километрах, или в квадратных милях, или в квадратных дюймах) доставляют такое же распределение первых цифр, как геометрические прогрессии.

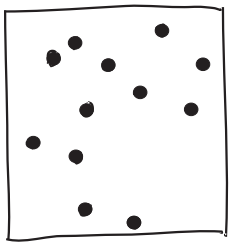
Это явление можно объяснить тем, что страны время от времени объединяются (что приводит к растущей геометрической прогрессии со знаменателем 2 при объединении со страной сходного размера), а время от времени делятся пополам (что порождает убывающую геометрическую прогрессию, где равномерное распределение дробных долей логарифмов тоже имеет место).

Для простейших моделей подобного передела мира появление описанного распределения первых цифр можно доказать, но компьютерные эксперименты[1] показывают, что тот же эффект возникает и в более сложных моделях (например, когда объединяться можно только с соседями), хотя обосновывающие появление распределения $p_k = \lg(1 + 1/k)$ теоремы в этих случаях никем не доказаны.

[1]Проведённые Ф. Аикарди в Систиане (Италия) и М. Хесиной в Торонто (Канада).

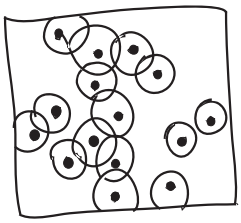
Перколяция и гидродинамика Вселенной

Рассмотрим N точек в какой-либо области евклидова пространства (например, в единичном кубе $I^n \subset \mathbb{R}^n$, скажем, в квадрате на евклидовой плоскости).



Если число r достаточно мало, то шары радиуса r с центрами в этих точках не пересекаются.

Если же радиус r больше, то не только некоторые шары пересекаются, но некоторые пересекающиеся шары даже образуют цепи длины порядка 1, *и по этим цепям можно добраться от одной стороны куба до противоположной.*



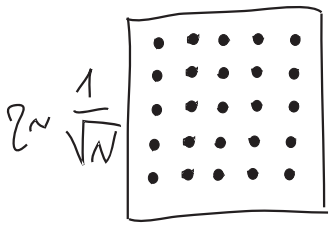
В этом случае говорят, что произошла перколяция: если исходная область заполнена материалом сосуда, в котором имеются N зародышей пороков, и каждый порок вырос до шаровой дыры радиуса r, то, если наступила перколяция, сосуд начнёт течь.

Радиусом перколяции *системы точек называется наименьший радиус r шаров с центрами в этих точках, при котором происходит перколяция.*

Радиус перколяции зависит не только от числа центров перколяции N, но и от геометрии их расположения.

Задача, которую мы сейчас обсудим, состоит в исследовании того, как убывает радиус перколяции r при росте числа точек для разных распределений этих центров перколяции в материале сосуда.

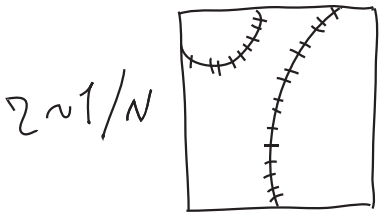
Для правильного решётчатого заполнения трёхмерного куба N центрами расстояние между соседними центрами будет порядка $1/\sqrt[3]{N}$, так что радиус перколяции — порядка $N^{-1/3}$.



Этот вывод сохраняется и для менее регулярного распределения центров, даже случайным образом набросанных в куб: радиус перколяции системы N точек в I^n убывает при $N \to \infty$, как правило, как $C/N^{1/n}$.

Если же N центров перколяции расположены в кубе I^3 не хаотически, а, например, вдоль некоторой гладкой кривой, то радиус перколяции будет гораздо меньше, а именно C/N.

Для расположения N центров перколяции вдоль гладкой поверхности, вложенной в куб I^3, радиус перколяции будет убывать при $N \to \infty$ промежуточным образом между двумя описанными: $r \sim C/N^{1/2}$ (для распределения N центров вдоль k-мерного подмногообразия в I^n то же рассуждение даёт радиус перколяции порядка $1/N^{1/k}$).



Строгие математические доказательства всех перечисленных результатов не просты, прежде всего потому, что нужно точно определять и что такое «случайное заполнение» подмногообразия N центрами перколяции, и какие подмногообразия допускаются.

Но физики, химики и астрономы смело используют подобную «стохастическую геометрию», не очень заботясь о строгих обоснованиях — и получаются впечатляющие нетривиальные выводы.

Например, в космологии важно понять, как распределены во Вселенной галактики: тяготеют ли они к расположению вдоль каких-либо поверхностей или линий, или образуют скопления галактик в отдельных точках — или же равномерно распределены повсюду, как случайно набросанные в куб N точек предыдущего примера?

Ответы на эти вопросы о структуре скоплений галактик могут пролить свет на труднейшие проблемы исследования их происхождения.

Первой особенностью распределения наблюдённых астрономами галактик было наличие огромных пустых мест между ними, где галактик нет.

Эти дыры навели на мысль, что галактики почему-то предпочитают располагаться не наугад, а вдоль некоторых специальных двумерных поверхностей или одномерных кривых (которые, пересекаясь, могут также образовывать сети).

Астрономы и космологи вычислили радиус перколяции системы тысяч наблюдённых галактик. Размерность многообразия, где они скапливаются, получилась из сравнения этого радиуса перколяции с числом N наблюдённых галактик. Радиус перколяции оказался, по порядку величины, C/N^{α}, где $1/2 < \alpha < 1$.

Это означает «многообразие размерности полтора» — по-видимому, это не очень гладкая поверхность, где плотность распределения галактик больше, чем в дополнительных «пустых» областях ($\dim = 2$), но на этой

поверхности выделяются ещё отдельные линии ($\dim = 1$), где плотность ещё больше, чем на поверхности (не исключено ещё и дополнительное повышение плотности около особых точек этих линий ($\dim = 0$)).

Все эти выводы из найденной величины радиуса перколяции подтверждены детальным анализом пространственного распределения галактик (да и «гидродинамикой Вселенной», объясняющей происхождение этих особенностей плотности случайными неоднородностями исходного поля скоростей разлетающихся после «большого взрыва» частей Вселенной).

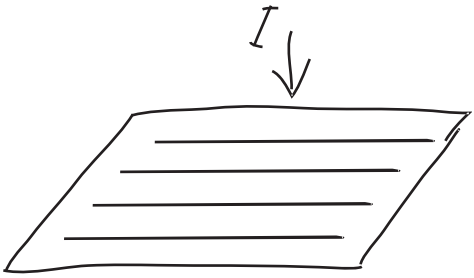
Преимущество математического подхода, основанного на радиусе перколяции, перед непосредственным разглядыванием наблюдённого пространственного распределения состоит в том, что человеку свойственно объединять случайно близкие объекты в более ему удобные структуры (разделяя, например, звёздное небо на субъективно определяемые созвездия — в Китае 7 звёзд ковша Большой Медведицы издавна распределены на два созвездия, состоящие из коней и кареты).

Перколяционный подход заменяет эти субъективно определённые структуры объективной характеристикой распределения изучаемых объектов, не зависящей от произвола исследователя.

Задача Бюффона и интегральная геометрия

Бросим случайно иглу длины 1 *на горизонтальный лист бумаги, разлинованный параллельными прямыми так, что расстояние между соседними прямыми также равно* 1.

Повторим этот опыт много раз ($N \to \infty$). *Как будет расти с* N *число пересечений* M *упавшей иглы с линиями бумаги?*

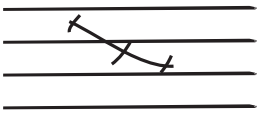


Решение. Ответ удивителен:

$$\lim_{N\to\infty} \frac{M}{N} = \frac{2}{\pi},$$

так что, бросив иглу миллион раз, можно получить неплохое приближение к числу π.

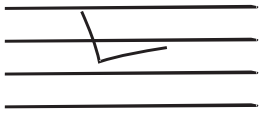
Объяснение этого удивительного ответа состоит в следующем. Понятно, что при $N \to \infty$ число пересечений $M(N) \sim cN$ (с некоторой постоянной c, означающей вероятность падения на линию при одном бросании).



Заменим иглу длины 1 вдвое более длинной иглой. Тогда число пересечений тоже увеличится (в среднем) вдвое. Действительно, удлиняющая половина иглы тоже игла длины 1, и она тоже падает случайно. Поэтому

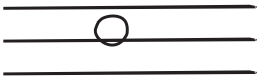
она добавит столько же пересечений, сколько доставляла исходная игла длины 1.

Нет необходимости, чтобы игла длины 2 была прямой. Её можно изогнуть в виде кочерги (в средней точке) — обе половины дадут прежнее число пересечений, а вместе — вдвое больше прежнего.



Из описанных рассуждений вытекает, что, бросая любую плоскую «кривую иглу» длины l, мы получим при $N \to \infty$ асимптотически cNl точек пересечения.

Будем, в частности, бросать окружность диаметра 1. Длина l этой окружности есть π. Асимптотически она доставит после N бросаний $cN\pi$ точек пересечения.



Но такая окружность при любом бросании доставляет две точки пересечения.

Итак, мы убедились, что

$$cN\pi = 2N,$$

т. е. $c = 2/\pi$, что и требовалось доказать.

Описанная здесь задача Бюффона породила целую новую область математики — так называемую интегральную геометрию.

Но источником этой науки послужило не исследование следствий из каких-либо аксиом, а желание понять простые эксперименты, изобретённые, вдобавок, далёкими от математики исследователями.

Сегодня интегральная геометрия — одна из наиболее активных областей теоретической математики. Но она постоянно применяется и в других областях естествознания — например, чтобы изучить сложные трёхмерные

геометрические структуры кристаллов, растений или животных по статистике их случайных двумерных срезов или томограмм (включая исследование случайных проекций, теней при освещении случайно расположенным источником или отражений случайно падающего пучка лучей исследуемым объектом).

Средняя площадь проекции

Найти площадь ортогональной проекции куба с ребром единица на случайную плоскость.

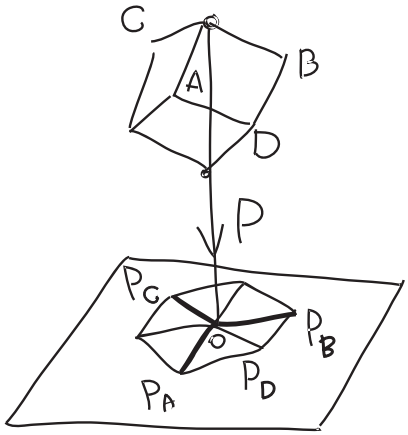
Решение. Рассуждая как в задаче Бюффона, мы приходим к выводу, что эта средняя площадь проекции не зависит от формы проектируемого (выпуклого) тела, а зависит только от площади его поверхности.

Поэтому средняя площадь проекции куба меньше площади его поверхности во столько же раз, во сколько площадь экваториального сечения шара меньше площади его поверхности.

Для шара радиуса 1 площадь экваториального сечения (являющегося кругом радиуса 1) составляет π. Поверхность шара радиуса 1 имеет площадь 4π.

Значит, средняя площадь проекции куба в 4 раза меньше площади его поверхности, равной 6. Итак, средняя площадь проекции единичного куба составляет $3/2$.

Замечание. Наименьшую площадь (равную 1) имеет проекция вдоль ребра. Наибольшую площадь доставляет (шестиугольная) проекция вдоль диагонали куба.



Диагонали граней куба, перпендикулярные направлению проектирования, сохраняют при проектировании свои длины: $|P_AP_B| = |AB| = \sqrt{2}$.

Из равностороннего треугольника OP_AP_D мы находим $|OP_D| = 2(|P_AP_B|/2)/\sqrt{3} = \sqrt{2/3}$ (поскольку $\operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$).

Площадь этого треугольника составляет поэтому

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

Вся площадь проекции P куба равна $6/(2\sqrt{3}) = \sqrt{3}$.

Итак, найденная нами средняя площадь проекции $1\frac{1}{2}$ заключена между наименьшей (равной 1) и наибольшей (равной $\sqrt{3}$) площадями проекций.

Это подтверждает найденный выше ответ очерка «Задача Бюффона и интегральная геометрия». В физике такие контрольные сравнения средних с крайними случаями являются обязательным элементом каждого исследования, и математикам тоже следовало бы их не забывать делать.

Для гладкой границы области поверхности в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ рассмотрим k-мерный объём S_k её ортогональной проекции в случайную k-мерную плоскость.

Оказывается, это (усреднённое по всем k-мерным плоскостям, предполагаемым равновероятными) среднее значение существует — например, у поверхности в $\mathbb{R}^3$ есть средняя площадь проекции и средняя длина проекции.

Эти средние k-мерные объёмы оказываются равными средним по всей поверхности значениям симметрических функций от главных кривизн поверхности.

Они участвуют также в (удивительной) формуле для объёма h-окрестности поверхности

$$V(h) = V_0 + V_1 h + V_2 h^2 + \ldots + V_n h^n$$

(а именно, V_0 — объём поверхности, V_1 — $(n-1)$-мерный объём границы, пропорциональный среднему значению от 1, число V_k пропорционально S_k и выражается через средние значения от произведения k главных кривизн).

В случае $n = 3$, т. е. двумерной гладкой поверхности в трёхмерном евклидовом пространстве, из главных кривизн k_1 и k_2 в каждой точке можно составить *среднюю кривизну* $k_1 + k_2$ и *гауссову кривизну* $K = k_1 k_2$.

В этом случае объём h-окрестности получается

$$V(h) = V_0 + hS + h^2 V_2 + h^3 V_3,$$

где V_2 пропорционально интегралу от средней кривизны по всей поверхности, а V_3 — от гауссовой:

$$V_3 = \frac{4}{3}\pi\left(\iint K\,dS\right).$$

Например, для сферы радиуса R

$$V(h) = \frac{4}{3}\pi(R+h)^3 = \frac{4}{3}\pi R^3 + h\cdot(4\pi R^2) + h^2(4\pi R) + \frac{4}{3}\pi h^3.$$

Здесь

$$k_1 = k_2 = 1/R, \quad k_1 + k_2 = 2/R, \quad k_1 k_2 = 1/R^2,$$

$$\iint (k_1 + k_2)\,dS = 8\pi R,$$

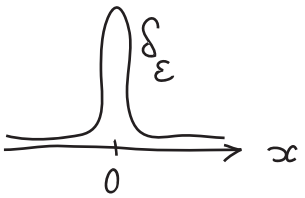
$$\iint (k_1 k_2)\,dS = 4\pi \quad \text{(формула Гаусса—Бонне).}$$

Коэффициент V_3 не зависит здесь от деталей поверхности, а зависит только от её эйлеровой характеристики. Это обстоятельство привело обнаружившего его Германа Вейля к теории характеристических классов и характеристических чисел, обобщающих формулу Гаусса—Бонне, в его работе «Об объёмах труб» по поводу $V(h)$.

Математическое понятие потенциала

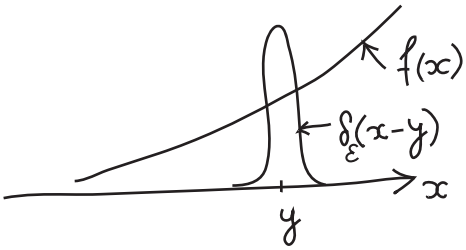
Математическая модель физических «материальных точек» и «точечных зарядов» называется δ-функцией.

Физики говорят, что $\delta(x) = 0$ при любом $x \neq 0$, в то время как $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\,dx = 1$. Разумеется, в математике таких функций не бывает. Но математическое понимание таково: если формула содержит δ-функцию, то, чтобы придать ей смысл, нужно заменить в ней δ-функцию «сглаженным вариантом» $\delta_\varepsilon(x)$, где гладкая неотрицательная функция δ_ε равна 0 всюду вне ε-окрестности точки 0 и имеет единичный интеграл, а потом перейти к пределу при $\varepsilon \to 0$.



Пример. Пусть f — непрерывная функция на прямой. Вычислить $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\delta(x-y)\,dx$.

Решение. Функция $\delta_\varepsilon(x-y)$ аргумента x является сглаженной δ-функцией, перенесённой из 0 в точку y.



Произведение $f(x)\,\delta_\varepsilon(x-y)$ равно 0, когда $|x-y| \geqslant \varepsilon$, так что интеграл достаточно брать в ε-окрестности точки y оси x. Но там функция f мало отличается от чис-

ла $f(y)$. Поэтому

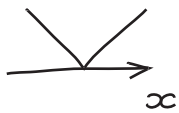
$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\delta_\varepsilon(x-y)\,dx = f(y)\int_{-\infty}^{\infty}\delta_\varepsilon(x-y)\,dx = f(y).$$

Итак, мы доказали равенство

$$f(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\delta(x-y)\,dx.$$

Замечание. Если бы мы были физиками (и отождествляли интегралы с суммами), мы могли бы прочесть полученное равенство так: всякая (непрерывная) функция f аргумента y является «линейной комбинацией» δ-функций аргумента y, перенесённых во все точки x оси y (перенесённая функция аргумента y есть $\delta(x-y)$). Коэффициентами этой линейной комбинации являются значения $f(x)$ разлагаемой функции во всех точках.

Задача. *Вычислить вторую производную функции* $|x|$ *от* x.



Решение. Первая производная $\operatorname{sgn} x$ равна 1 при $x>0$ и -1 при $x<0$. Но она — интеграл от второй производной. Значит, вторая производная равна 0 при $x\neq 0$ и имеет интеграл (от любого $a<0$ до любого $b>0$), равный 2 (приращение функции $\operatorname{sgn} x$). Стало быть,

$$\frac{d^2|x|}{dx^2} = 2\delta(x).$$

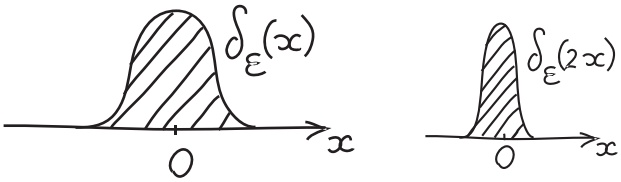
Задача. *Является ли δ-функция однородной?*

Однородная функция f степени k определяется тем, что

$$f(cx) = c^k f(x) \quad \text{для любого } c>0.$$

Пример. Функция $1/x$ однородная, степени $k=-1$.

Решение задачи. Аппроксимируем $\delta(2x)$, рассмотрим $\delta_\varepsilon(2x)$. График этой «δ-образной» функции от x получается из графика функции δ_ε (от x) сжатием вдвое:



Мы заключаем, что значение функции $\delta(2x)$ равно 0 при любом $x \neq 0$, а интеграл этой функции (по всей прямой) вдвое меньше, чем интеграл от δ-функции (равный 1).

Стало быть,

$$\delta(2x) = \frac{1}{2}\delta(x), \qquad \delta(cx) = \frac{1}{c}\delta(x),$$

так что δ-функция — однородная функция степени -1.

Задача. *Является ли однородной δ-функция от n переменных (которая всюду, кроме точки 0 в $\mathbb{R}^n$, равна 0 и имеет интеграл 1).*

Ответ. Эта функция однородна, степени $-n$.

Это доказывается, как сделано выше для $n = 1$. Но можно воспользоваться и полезным легко доказываемым тождеством

$$\delta(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \delta(x_1)\delta(x_2)\ldots\delta(x_n)$$

— ведь произведение однородных функций степеней k и l — однородная функция степени $k + l$.

Оператор Лапласа. Пусть f — гладкая функция в евклидовом пространстве (размерности n). Рассмотрим сферу малого радиуса r с центром в точке x. Среднее значение функции f по этой сфере близко к значению $f(x)$ в её центре, но не совсем совпадает с ним.

Задача. *Какого порядка величина разности между средним значением и значением в центре при $r \to 0$?*

Решение. При $n = 1$ мы получаем среднее

$$\hat{f}(r) = \frac{f(x+r) + f(x-r)}{2}.$$

Разлагая функцию f в ряд Тейлора $f(x+r) = f(x) + rf'(x) + \frac{r^2}{2}f''(x) + \ldots$, мы получаем

$$\hat{f}(r) = f(x) + \frac{r^2}{2}f''(x) + o(r^2),$$

поэтому различие

$$\hat{f}(r) - f(x) = \frac{r^2}{2}f''(x) + o(r^2)$$

имеет второй порядок величины по отношению к радиусу сферы r.

При любом n рассуждение почти такое же. Линейный член ряда Тейлора при усреднении по сфере даёт 0, так как принимает противоположные значения в противоположных точках сферы.

Кубические члены и члены более высокой степени доставляют малую по сравнению с r^2 поправку $o(r^2)$. Следовательно, изучаемая разность имеет второй порядок малости:

$$\hat{f}(r) - f(x) = Kr^2 + o(r^2).$$

Коэффициент K называется значением (в центральной точке x) лапласиана, обозначаемого Δf, при надлежащей нормировке.

Задача. *Вычислить выражение коэффициента K через вторые частные производные функции f.*

Решение. Члены ряда Тейлора, содержащие разные одночлены второй степени (по отношению к приращению аргументов) надо усреднить по сфере радиуса r.

Для простоты вычислений будем считать центром сферы точку 0, а декартовы координаты вектора приращения обозначим через (x, y) (считая $n = 2$).

Средние значения функций x^2 и y^2 на сфере (окружности) одинаковы, а среднее значение функции xy по

этой сфере равно 0 (так как изменение знака координаты x меняет знак функции).

Но среднее значение функции $x^2 + y^2$ по сфере (окружности) $\{x^2 + y^2 = r^2\}$ есть r^2. Поэтому средние значения функций x^2, y^2 и xy по этой сфере равны $r^2/2$, $r^2/2$, 0. Из формулы Тейлора мы получаем квадратичный вклад

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{x^2}{2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{y^2}{2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}xy$$

со средним значением

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{r^2}{4} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{r^2}{4},$$

откуда (при $n = 2$) находим искомое выражение для коэффициента:

$$K = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right).$$

В случае любого числа n декартовых ортонормированных координат $(x_1, \ldots, x_n)$ в евклидовом n-мерном пространстве такое же рассуждение доставляет ответ

$$K = \frac{1}{2n}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}\right)$$

(так как среднее значение функции x_1^2 по сфере $x_1^2 + \ldots$ $\ldots + x_n^2 = r^2$ равно r^2/n).

Задача. *Найти сферически симметричное решение уравнения $\Delta u = \delta$ в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$.*

Решение. В пространстве $\mathbb{R}^n \setminus 0$ сферически симметричная функция u имеет вид

$$u(x_1, \ldots, x_n) = f(r).$$

Уравнение $\Delta u = 0$, применённое к f, даёт обыкновенное дифференциальное уравнение 2-го порядка; у него 2 линейно независимых решения. Одно из них, очевидно, $f \equiv 1$. В качестве второго решения мы найдём сейчас однородную функцию u, для которой $\Delta u = \delta$.

Если функция u однородна степени k, то функция Δu тоже однородна, но степени $k-2$.

Поскольку δ-функция в $\mathbb{R}^n$ однородна степени $-n$, однородная функция u должна иметь степень $2-n$. Мы находим, при $n \neq 2$,

$$f(r) = cr^{2-n}.$$

Постоянную c мы сейчас вычислим. Для этого заметим, что $\Delta u = \operatorname{div} \operatorname{grad} u$. Градиент функции r^{2-n} — сферически симметричное поле, компоненты которого имеют степень однородности $1-n$:

$$\operatorname{grad} r^{2-n} = c_1 x r^{-n}.$$

Коэффициент c_1 определяется поведением этого поля на оси координаты x_1: там $r^{2-n} = x_1^{2-n}$,

$$\frac{dx_1^{2-n}}{dx_1} = (2-n)x_1^{1-n} = (2-n)xr^{-n},$$

так что $c_1 = 2-n$.

Поток векторного поля $\operatorname{grad} r^{2-n}$ через сферу $x_1^2 + \ldots + x_n^2 = r^2$ любого радиуса r равен произведению $(2-n) \times r^{1-n}$ на объём сферы размерности $n-1$ радиуса r, т. е. этот поток есть

$$(2-n) \cdot \omega(n-1)$$

где $\omega(n-1)$ — объём $(n-1)$-мерной сферы радиуса 1:

n	1	2	3
$\omega(n-1)$	2	2π	4π

По теореме Стокса этот поток равен интегралу дивергенции указанного поля по ограниченному указанной сферой шару.

Поэтому

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \operatorname{div} \operatorname{grad} r^{n-2}\, dx_1 \ldots dx_n = (2-n)\,\omega(n-1).$$

Из этого следует, что в $\mathbb{R}^n$ выполнено тождество

$$\Delta r^{n-2} = (2-n)\,\omega\,(n-1)\,\delta\,.$$

Итак, уравнение $\Delta u = \delta$ в $\mathbb{R}^n$ имеет при $n \neq 2$ сферически симметричное решение

$$u = cr^{2-n}, \qquad \text{где} \quad c = \frac{1}{(2-n)\,\omega\,(n-1)}.$$

Это решение называется фундаментальным решением (уравнения Лапласа).

Пример. В трёхмерном пространстве ($n = 3$) фундаментальное решение есть

$$u = \frac{c}{r}, \qquad \text{где } c = -\frac{1}{4\pi}.$$

Это — законы гравитационного поля и электростатического поля Кулона.

При $n = 1$ получается фундаментальное решение $u = cr$, где $c = 1/2$ (то есть $u = |x|/2$).

Задача. *Исследовать фундаментальное решение уравнения Лапласа $\Delta u = \delta$ в евклидовой плоскости.*

Решение. Если бы мы были физиками, то мы сказали бы, что функция $u = cr^{2-n}$, $n = 2$, должна пониматься как предел допредельных функций при $n = 2 + \varepsilon$, $\varepsilon \to 0$.

Мы получили бы

$$r^{2-n} = e^{(2-n)\ln r} = e^{-\varepsilon \ln r} = 1 - \varepsilon \ln r + o(\varepsilon).$$

Константа 1 доставляет гармоническую функцию ($\Delta u = 0$), а линейное по ε слагаемое доставляет функцию $\ln r$, гармоническую в $\mathbb{R}^2$ при $r \neq 0$.

Рассуждая, как выше, легко проверить, что фундаментальное решение имеет вид

$$u = c \ln \frac{1}{r}$$

(вычисление постоянной c подсчётом дивергенции градиента этой функции оставляем читателю).

Замечание. Более «математическое» изложение того же рассуждения состоит в том, чтобы рассматривать решение уравнения $\Delta u = 0$ (для $u = f(r)$) как собственные функции (с собственным числом 0) оператора Δ на пространстве функций.

Разумеется, приведённый выше анализ фундаментальных решений для оператора Лапласа в $\mathbb{R}^n$ доставляет формулы для потенциалов соответствующих силовых полей (гравитационного и электростатического).

Сами поля ($\operatorname{grad} u$) получаются, соответственно, вида

$$F \sim r^{1-n} \sim \frac{\vec{x}}{|x|^n}$$

как при $n \neq 2$, так и в исключительном случае $n = 2$.

В случае $n \neq 2$ этот оператор имеет двукратное собственное число 0 с двумя (изученными выше) собственными векторами.

Но оператор так зависит от параметра n, что при $n = 2$ возникает жорданова клетка второго порядка: собственное число 0 двукратно, но собственное направление единственно.

В этом случае плоскости, натянутые на оба собственных вектора (соответствующих случаю $n \neq 2$ операторов), стремятся при $n \to 2$ к предельному положению. Эта предельная плоскость натянута на собственный и присоединённый векторы жордановой клетки.

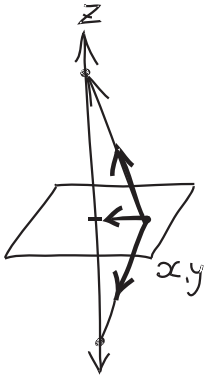
Этот присоединённый вектор ($\ln r$) мы и вычисляли в приведённом выше «физическом» решении.

Гравитационное (или электростатическое) поле на плоскости можно получить из поля в трёхмерном пространстве, рассматривая притягивающие массы или заряды, расположенные цилиндрически (с плотностью $\rho(x, y)$, не зависящей от ортогональной координаты z).

Иными словами, нужно посчитать притяжение точками однородной прямой $x = y = 0$ в $\mathbb{R}^3$ путём инте-

грирования сил притяжений разными точками этой прямой.

Оставляю читателям это простое вычисление, где полезно использовать сразу же симметрию $(x, y, z) \mapsto \mapsto (x, y, -z)$, рассматривая одновременно суммарное притяжение симметричными массами.



Физики формулируют доказанную выше теорему о фундаментальных решениях оператора Лапласа на евклидовой плоскости в виде (математически неверного без пояснений) утверждения $r^0 = \ln(1/r)$.

Описанная выше «δ-функция Дирака» является простейшим частным случаем обобщённых функций, теория которых была построена Н. М. Гюнтером в 1916 году под названием «теории функций от областей»: эти «обобщённые функции» не определяются своими значениями в точках, но определяются своими интегралами по всевозможным областям.

Гюнтер построил эту теорию ради доказательства теорем существования (и единственности) решений уравнений гидродинамики, Навье—Стокса. С наступлением революции Гюнтер стал подвергаться обвинениям в аристократизме своей «антипролетарской» дворянской науки. Чтобы защититься, он организовал семинар для коммунистов и комсомольцев. Его участник, ученик Гюнтера С. Л. Соболев, исследовал его методом обоб-

щённые решения линейного волнового уравнения (где разрывные, обобщённые решения нужны пролетариату, например, в сейсмологии).

Работы Соболева были переведены (с французского) на американский язык Л. Шварцем, построившим этим путём свою «теорию распределений», удостоенную филдсовской медали.

В 1965 году Лоран Шварц рассказал мне, что «филдсовскую медаль дали ему за то, что он исправил ошибки в замечательной работе Соболева». Я эту работу читал и никаких ошибок в ней не видел, а потому попросил указать их.

Шварц ответил: «Соболев опубликовал свои результаты на языке, которого никто не понимал, в городе, где никто не интересовался наукой, да ещё в журнале, который никто не читал».

Хотя я знал, где была опубликована статья Соболева, я это скрыл и попросил назвать язык, город и журнал, и Шварц ответил: «По-французски, в Париже, в Докладах Парижской академии наук» (Comptes Rendus de l'Académie des Sciences).

Вернувшись к 1966 году в Москву, я вытащил Сергея Львовича Соболева из ямы, в которую он заехал на своей машине около рынка в Звенигороде (поехав за молоком), и рассказал ему о теории Шварца.

Сергей Львович ответил: «Лоран — чудесный человек, и очень хорошо относится к нам обоим, но он тебе наврал: в своей работе, награждённой филдсовской медалью, он не только перевёл мою статью, но ещё и добавил свои теоремы о преобразованиях Фурье моих обобщённых решений, которых я и не знал!»

Вопрос о взаимоотношении работ Шварца и Соболева решал тогда Адамар, съездивший ради этого в Москву, чтобы посоветоваться с Сергеем Львовичем. Это ему не удалось, так как С. Л. Соболев был тогда в Лос-Арзамасе (Сарове) заместителем Курчатова. Адамар обратился за

советом к Колмогорову, и тот предпочёл обоим «истинного автора» — Гюнтера (работы которого о «функциях от областей» привели Колмогорова к его теории когомологий).

Дирак ввёл свою δ-функцию около 1930 года. Он писал, что единственный правильный способ создать новую физическую теорию — это, прежде всего, «отбросить все физические представления, которые ведь есть просто вежливый псевдоним для предрассудков предшествующих поколений».

По его словам, начинать нужно с какой-либо содержательной математической теории: «если она по-настоящему красива, то её результаты обязательно найдут, сегодня или завтра, полезные физические приложения».

При своём построении теории спинов электронов Дирак столкнулся со следующей трудностью: физики не могли понять, почему эти спины допускают два значения ($+1/2$ и $-1/2$), хотя описывают одно и то же «вращение электрона».

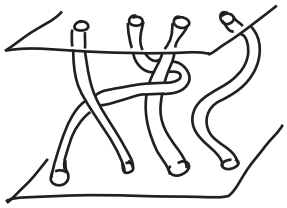
Сущность дела состоит здесь в содержательной топологической теореме: фундаментальная группа группы вращений трёхмерного пространства состоит из двух элементов, т. е. $\pi_1(\mathrm{SO}(3)) \simeq \mathbb{Z}_2$.

Это значит, что поворот на 360° не возвращает соответствующую физическую характеристику вращения на место. Чтобы она вернулась к исходному состоянию, надо продолжить вращение так, чтобы угол поворота составил не 360°, а 720°.

Эта трудная теорема была непонятна физикам и вызывала недоверие к теории спинов.

Тогда Дирак нашёл её (тоже неочевидное) следствие в математической теории кос: он построил «сферическую косу из четырёх волос», доставляющую в группе сферических кос элемент второго порядка. Обычные косы «плоские», их группа есть фундаментальная группа

пространства конфигураций n различных точек на плоскости (для кос из n нитей).



В этой группе плоских кос элементов конечного порядка нет: завязав на конце косы вторую такую же, мы её не развяжем.

А для сферических кос такое развязывание Дираку удалось продемонстрировать физикам в эксперименте (его нити соединяли 3 концентрических сферы и развязались, когда он сжёг среднюю из них).

Чтобы придумать этот физический эксперимент, Дирак использовал понятную ему (красивую и нетривиальную) математическую теорию эллиптических функций.

А именно, рассмотрим на сфере Римана $\mathbb{C}P^1$ четыре (различные) точки. Двулистное накрытие сферы, ветвящееся в этих точках, является двумерным тором (римановой поверхностью функции $y = \sqrt{x^4 + ax^2 + bx}$, т. е. эллиптической кривой). Это обстоятельство определяет представление группы сферических кос из 4 нитей в группу автоморфизмов группы $\mathbb{Z}^2$ гомологий эллиптической кривой.

Вычисляя эти автоморфизмы, Дирак и нашёл сферическую косу из 4 нитей, доставляющую в группе кос элемент второго порядка.

Если бы Дирак не любил этой математики, физики не получили бы теории спинов электронов.

Инверсия в цилиндрических зеркалах метро

Все видели своё отражение в плоском зеркале — отражение левши является правшой, но в остальном изображение сходно с прообразом.

Но кто видел своё отражение в кривом зеркале, тот знает, какое оно смешное.

Рассмотрим, для простоты, цилиндрическое зеркало. Спрашивается, как выглядят отражения различных предметов в нём?

Много цилиндрических зеркал (и стоящих вертикально цилиндров-стоек, и горизонтальных поручней) имеется в каждом вагоне метро. Изображения окружающего мира в этих цилиндрических зеркалах совершенно необычны. Каковы они?

Указание. Проще всего разобраться с отражением одного точечного источника света. Его отражение в цилиндрическом зеркале тесно связано с математической инверсией — операцией, сопоставляющей каждой точке A евклидовой плоскости, на которой фиксирована окружность радиуса r с центром O, точку B, «симметричную относительно этой окружности», лежащую на том же выходящем из центра O луче, что и отражаемая точка A, но на тем бóльшем расстоянии от центра O, чем ближе к центру была точка A:

$$|OA| \cdot |OB| = r^2.$$

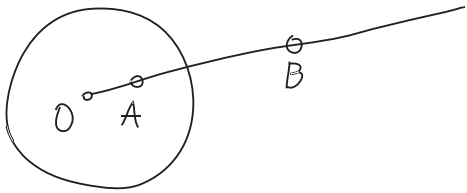


Рис. 1. Инверсия переводит точку A в точку B

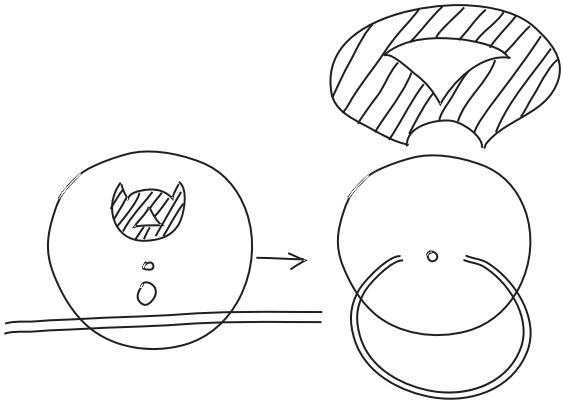


Рис. 2. Инверсия кошки выводит её из клетки, а инверсия прямой закругляет её

Решение. Каждый луч, выходящий из точки A и пересекающий заданную окружность, отражается от неё по закону «угол падения равен углу отражения» (рис. 3).

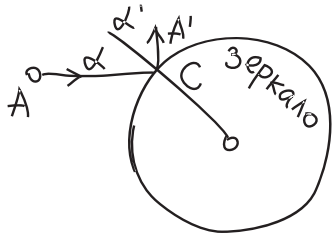


Рис. 3. Отражение луча AC в виде луча CA' (углы α и α' равны)

Для плоского зеркала все лучи, выходящие из источника A отражаются в виде лучей, проходящих при продолжении в зазеркалье через одну и ту же точку A^*. Получается такой же пучок лучей $\{A^*A'\}$, поэтому мы и видим отражение точки A в зазеркальной точке A^* (рис. 4).

Для кривого зеркала прямолинейные лучи, отражённые в разных точках, уже не обязательно проходят через общую точку, даже если их продолжить за зерка-

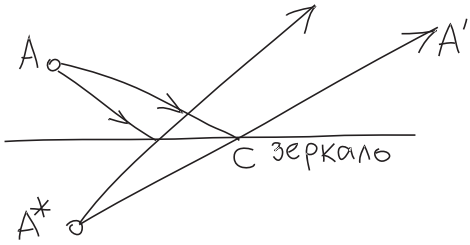


Рис. 4. Отражение луча AC в виде луча CA' в прямом зеркале и точка A^* в зазеркалье

ло[1]. Чтобы в этом разобраться, достаточно разобрать какой-нибудь пример, например — отражение зеркалом-окружностью пучка параллельных лучей, приходящих из одной и той же бесконечно удалённой точки A.

Явные вычисления лучей, отражённых в различных точках кругового зеркала, не очень сложны (для знающих тригонометрию). Но нарисовать эти лучи ещё проще (рис. 5). Дуги CD и CD' имеют одинаковую длину

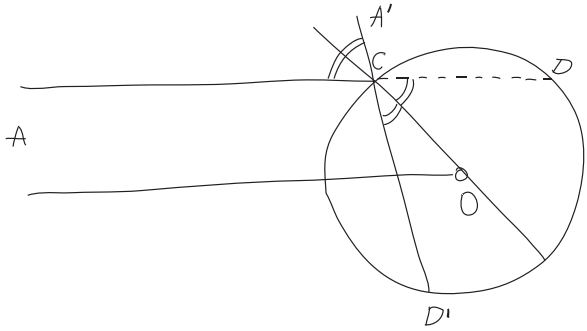


Рис. 5. Построение отражённого окружностью луча CA'

(вследствие закона «угол падения равен углу отражения» в точке отражения C). Это позволяет быстро построить отражённые лучи.

[1]Исключение — лучи, параллельные оси параболического зеркала, они собираются, после отражения в параболе, в одну точку.

Нарисовав эти отражённые лучи достаточно аккуратно, я получил следующую картинку (рис. 6).

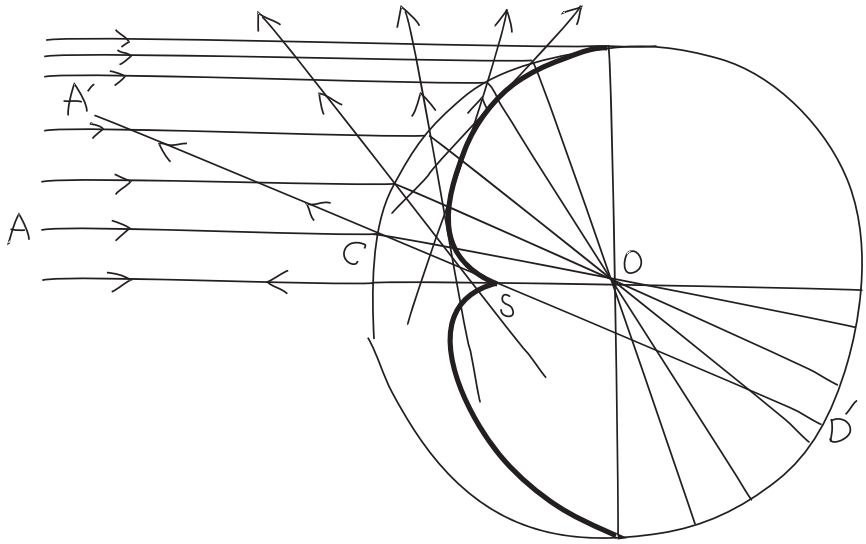


Рис. 6. Семейство отражённых окружностью лучей, приходящих из бесконечности, и его огибающая кривая

Полученное однопараметрическое семейство отражённых прямых на плоскости имеет огибающую (показанную на рис. 6 жирной линией). Это — кривая, в точках которой прямые отражённого семейства лучей пересекаются с бесконечно близкими отражёнными прямыми того же семейства лучей. Эти прямые (продолженные отражённые лучи) касаются построенной огибающей кривой. Можно ещё сказать, что эта кривая образована «фокальными точками» отражённого семейства лучей (фокальные точки в оптике — это точки пересечения бесконечно близких лучей семейства при их продолжении).

Огибающая семейства лучей называется каустикой («жгущей»), так как на ней свет семейства концентрируется (фокусируется), его энергия больше, чем в остальных местах. Именно при помощи каустики систе-

мы зеркал Архимед, согласно легенде, сжёг вражеские корабли, осаждавшие Сиракузы[1].

Во всяком случае, большая часть отражённых лучей идёт так, как если бы они исходили из точек каустики, так что изображение нашей исходной бесконечно удалённой точки A будет казаться размазанной вдоль каустики линией, а не точкой.

Дело, однако, обстоит сложнее, потому что яркость изображения вдоль каустики вовсе не постоянна — некоторые её места ярче (и именно их использовал, для своей системы лучей, Архимед).

А именно, каустика нашего семейства отражённых лучей рисунка 6 — не гладкая кривая: она имеет особую точку S (нетрудно посчитать, что она делит пополам радиус).

Вблизи этой точки семейство (продолженных) лучей концентрируется ещё сильнее, чем даже в остальных точках каустики[2]. Поэтому, хотя изображение светящейся (бесконечно удалённой) точки A и размазано вдоль каустики, особенно ярко светится именно её особая точка S (а остальные точки недостаточно внимательный зритель может и не заметить).

Вследствие всего этого наблюдаемое экспериментатором изображение точки A будет не линией, а единствен-

---

[1]Аристофан в «Облаках» приписывает Сократу ещё более раннее использование каустик в деловых вопросах: он советует своему клиенту выбрать на заседании суда солнечное место и, купив в аптеке линзу, сжечь каустикой солнечных лучей своё долговое обязательство, демонстрируемое суду противником. Аристофан, правда, указывает, что эта прикладная математика и привела Сократа к смертельному приговору сограждан.

[2]Можно посчитать, что эта особенность — полукубическая точка возврата (в окрестности которой каустика задаётся в подходящей гладкой системе криволинейных координат уравнением $y^2 = x^3$). Такая особенность типична (для систем лучей общего положения) и устойчива (не исчезает при малом шевелении семейства), её и использовали Сократ и Архимед.

ной точкой S — точкой наибольшей концентрации отражённых лучей, продолженных в зазеркалье.

Тригонометрические вычисления, которые я оставляю читателю, подтверждают и эти выводы, и их устойчивость: например, для источника света A, расположенного в другом месте, тоже получается каустика продолженных в зазеркалье лучей с особой точкой возврата, которая и воспринимается наблюдателем как изображение A^* точки A в кривом зеркале.

Эта точка A^*, как и S в рассмотренном выше примере с бесконечно удалённой точкой A, лежит на том же луче с началом в центре O зеркала, что и отражаемая точка A. Но положение этой точки на соответствующем радиусе окружности зависит от расстояния точки A от центра окружности (когда это расстояние бесконечно, отражённая точка делит радиус пополам, а когда точка A лежит на отражающей окружности, точка A^* вырождается в A).

Вычисление положения изображения A^* на луче OA при данном расстоянии $|OA| = XR$ приведено на рис. 7.

Радиусы отражающей окружности имеют длины

$$|OR| = |OC| = R.$$

Малый центральный угол α доставляет катеты треугольника OCP:

$$|OP| = R\cos\alpha, \qquad |CP| = R\sin\alpha.$$

Прямоугольный треугольник ACP доставляет асимптотическое выражение малого угла φ:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{|CP|}{|AP|} = \frac{R\sin\alpha}{R(X-\cos\alpha)} \sim \frac{\alpha}{X-1}, \qquad \varphi \sim \frac{\alpha}{X-1}.$$

Прямоугольный треугольник OCP доставляет для угла PCQ выражение $\gamma = (\pi/2) - (\varphi + 2\alpha)$, $\varphi + 2\alpha \sim \dfrac{2X-1}{X-1}\alpha$.

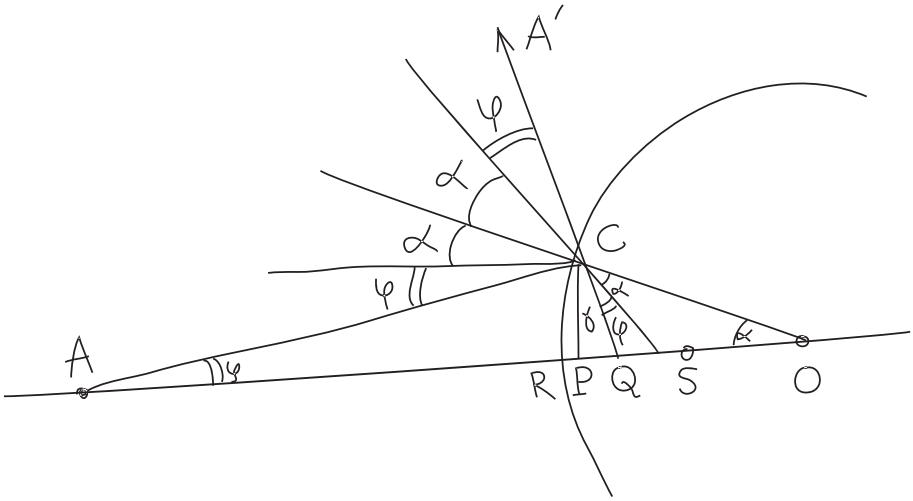


Рис. 7. Пересечение в зазеркалье бесконечно близких прямых AR и AC

Прямоугольный треугольник CPQ доставляет для катета против угла γ выражение

$$|PQ| = |CP| \operatorname{tg} \gamma = |CP| \frac{\cos(\varphi + 2\alpha)}{\sin(\varphi + 2\alpha)}.$$

Найденные выше асимптотики величин $|CP|$ и $\varphi + 2\alpha$ доставляют для поведения расстояния от P до Q при $\alpha \to 0$ выражение

$$|PQ| \sim \frac{R \sin \alpha}{\frac{2X-1}{X-1}\alpha} \to R\frac{X-1}{2X-1}.$$

Расстояние от отражённой точки Q до середины S радиуса OR стремится при этом к

$$|QS| = |PS| - |PQ| \to \frac{R}{2} - R\frac{X-1}{2X-1} = \frac{R}{2(2X-1)}.$$

Отражаемая точка A отстоит от середины S радиуса OR на расстояние

$$|AS| = |AO| - |SO| = R(X - 1/2) = \frac{2X-1}{2}R.$$

Мы заключаем, что расстояния от точки S до отражаемой точки A и до её отражения Q взаимно обратны:

$$|QS| \cdot |AS| = R^2/4.$$

Тем самым мы доказали следующий (удивительный) результат.

Наблюдатель видит в цилиндрическом зеркале инверсию окружающего мира относительно вдвое более тонкого цилиндра, касающегося оси отражающего цилиндра (в наших плоских обозначениях — инверсию в окружности с центром S радиуса $R/2$).

Рис. 8. Отражение в цилиндрическом зеркале — инверсия в (жирной) окружности

Можно было бы подумать, что, глядя на цилиндрическое зеркало (например, на поручни в метро), мы увидим инверсное изображение окружающих предметов.

Что этого не может быть, ясно уже из описания расположения инвертирующей окружности (или цилиндра) по отношению к отражающей окружности на плоскости (или цилиндрическому зеркалу в пространстве). А именно, инвертирующий цилиндр направлен от оси отражающего цилиндра в определённом направлении, в то время как, вследствие симметрии отражающего цилиндра относительно вращений вокруг его оси, все направления ухода от оси вращения должны быть равноправными и никакое из них не может оказаться предпочтительным.

В действительности приведённые выше вычисления устанавливают, что отражение каждого источника света является результатом применения описанной инверсии к точке источника только для точек луча, проходящего через центр отражающей окружности и глаз наблюдателя (формально это выражалось в предполагавшейся в вычислении малости угла φ).

На этом центральном луче зрения изображения A^*, B^*, C^*, D^*, точек A, B, C, D (рис. 9) действительно

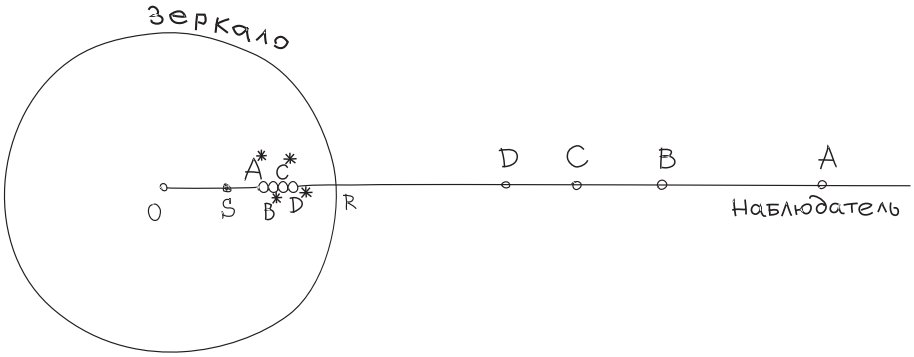


Рис. 9. Изображения $A^*B^*C^*D^*$ точек $ABCD$ центрального луча

инверсны изображаемым точкам, поэтому и вблизи центрального луча зрения отражение приближённо описывается инверсией. Но по мере удаления от центрального луча зрения отражение описывается инверсиями относительно всё более повёрнутых инвертирующих окружностей, так что в целом результат к одной инверсии не сводится.

Добавление. О свойствах инверсии

Хотя многие читатели, вероятно, знают об этих замечательных фактах, я кратко опишу их здесь.

Теорема. *Инверсия переводит окружности, не проходящие через её центр, в окружности, а проходящие через центр — в прямые* (*рис.* 10).

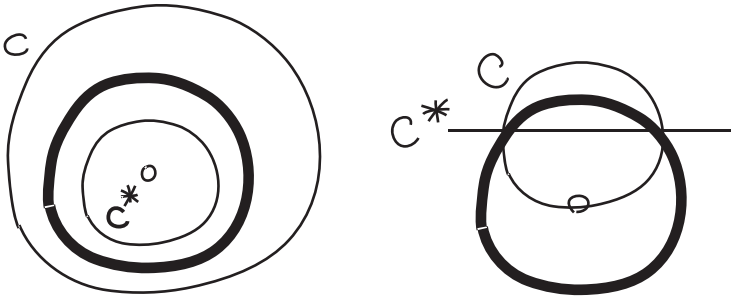


Рис. 10. Инверсия переводит окружность c в окружность c^*, а окружность C в прямую C^*

Доказательство второго утверждения особенно просто, когда окружность C пересекает инвертирующую окружность (рис. 11).

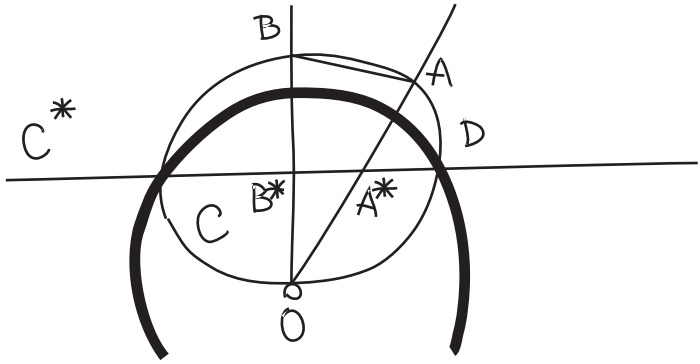


Рис. 11. Инверсия окружности C, проходящей через центр O инвертирующей (жирной) окружности

Прямоугольные треугольники OB^*A^* и OAB подобны, поэтому $|OB^*|/|OA^*| = |OA|/|OB|$, так что $|OA| \cdot |OA^*| = |OB| \cdot |OB^*|$.

Для случая $A = D$ мы находим $|OB| \cdot |OB^*| = R^2$. Это доказывает совпадение образа окружности C при инвер-

сии с прямой C^* (соединяющей обе точки пересечения окружности C с инвертирующей окружностью).

Случай, когда окружность C слишком мала, чтобы пересечь инвертирующую окружность, сводится к разобранному случаю растяжением (гомотетией с центром O). Когда окружность C подвергается такой гомотетии, растягиваясь в α раз, её образ при инверсии тоже подвергается гомотетии с центром O, а именно сжатию в a раз.

Поэтому сжатый образ — прямая, а значит, и до сжатия образ был прямой (только не пересекающей инвертирующую окружность).

Утверждение теоремы об образе окружности c, не проходящей через центр инверсии, особенно легко доказать в том случае, когда эта окружность c не содержит в ограниченном ею круге центр инверсии O (рис. 12).

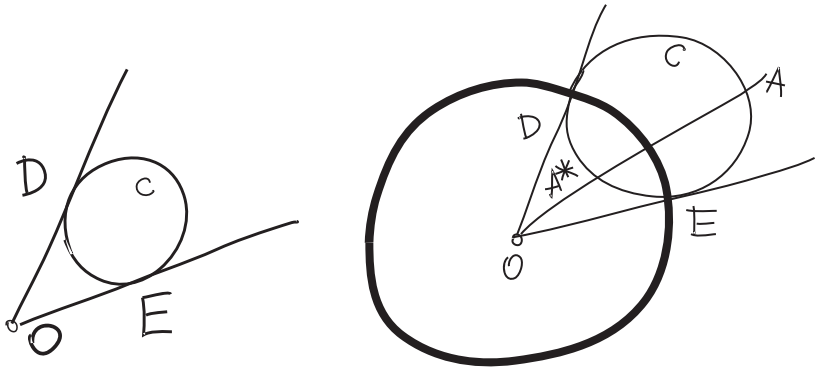


Рис. 12. Инверсия окружности c, не окружающей центр инверсии O

В этом случае к окружности c можно провести из точки O две касательные. Их длины одинаковы: $|OD| = |OE|$. Растягивая (или сжимая) плоскость гомотетией с центром O, мы можем превратить окружность c в гомотетичную специальную окружность, для которой длины касательных $|OD| = |OE| = R$ совпадают с длиной R радиуса инвертирующей окружности (так что

специальная окружность будет пересекать инвертирующую жирную окружность в точках D и E под прямыми углами).

По теореме о секущей OA^*A специальной окружности c мы находим

$$|OA^*| \cdot |OA| = |OD|^2 = R^2.$$

Это тождество означает, что точки A и A^* специальной окружности c переходят при нашей инверсии друг в друга, так что образ специальной окружности совпадает с ней самой.

Возвращаясь к исходной окружности сжатием специальной окружности, мы видим, что образ этой сжатой (исходной) окружности при инверсии получается из специальной окружности гомотетичным растяжением. Значит, этот образ c^* — тоже окружность.

В случае когда окружность c окружает центр O, теорема тоже верна. Но я не знаю столь простого доказательства.

Замечание. Специальная окружность ортогональна инвертирующей. При инверсии каждая из них переходит в себя. Поэтому угол между ними сохраняется при инверсии.

Оказывается, преобразование инвертирования сохраняет и углы между любыми двумя кривыми (с точностью до знака). Это видно, например, из рис. 13, где окружность C, проходящая через центр инверсии O, пересекает инвертирующую окружность в точке D (и переходит при инверсии в прямую DE).

Нормали направлений OD (к инвертирующей окружности) и OB (к инверсированной кривой C^*) в точке пересечения D образуют угол $\alpha = \angle DOB$.

Касательные к инвертируемой окружности в точках O и D образуют равнобедренный треугольник, поэтому углы DOM и ODM равны $\pi/2 - \alpha$.

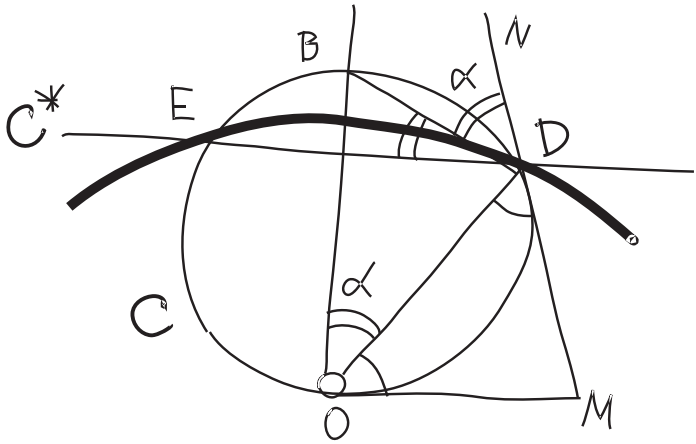


Рис. 13. Сохранение угла (с инвертирующей окружностью) при инверсии

Касательная DB к инвертирующей окружности в точке D проходит через конец B диаметра OB инвертируемой окружности C, так как угол BDO (между касательной и радиусом инвертирующей окружности) прямой.

Следовательно, угол BDN (между касательными к инвертирующей и инвертируемой окружностями в точке их пересечения D) — такой же, как угол $DOB = \alpha$ между направлениями, перпендикулярными к инвертирующей и проинвертированной кривой C^* (он равен $\pi - \pi/2 - (\pi/2 - \alpha) = \alpha$).

Итак, углы между инвертируемой и проинвертированной окружностями, с одной стороны, и инвертирующей окружностью, с другой — в точке D одинаковы.

Из этого следует, что инверсия сохраняет углы всех проходящих через точку D кривых с инвертирующей окружностью, а значит, она сохраняет и угол между любыми двумя кривыми, проходящими через точку D.

Разумеется, сохраняются здесь неориентированные углы: инверсия, подобно обычному отражению, меняет ориентацию отображаемой плоскости и переводит «положительные» углы в «отрицательные» (того же модуля).

Наши рассуждения доказывают сохранение (неориентированных) углов в точках инвертирующей окружности. Но любую (отличную от O) точку плоскости можно поместить на эту окружность (радиуса R) надлежащей гомотетией (с центром O).

Гомотетии сохраняют углы, поэтому такими подобными растяжениями и сжатиями плоскости мы выведем сохранение углов пересечения любых кривых в любой (отличной от центра инверсии O) точке из их сохранения в точках инвертирующей окружности, где это сохранение углов уже доказано выше.

Преобразования, сохраняющие углы, называются конформными. Таким образом, инверсия — конформное преобразование плоскости (с выкинутой точкой O), меняющее ориентации.

Задача. *Пусть $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ — любой многочлен, рассматриваемый как отображение (в себя) евклидовой плоскости $\mathbb{C} \approx \mathbb{R}^2$ с декартовыми ортонормированными координатами (x, y) для точки $z = x + iy$.*

Докажите, что отображение f конформно (в любой некритической точке многочлена f, т.е. там, где его производная отлична от 0).

Решение. Начните с линейного многочлена и используйте затем формулу Тейлора для сведения любого отображения к его (линейному) дифференциалу.

В этих терминах инверсия задаётся формулой

$$f(z) = \frac{1}{\overline{z}},$$

где $\overline{z} = x - iy$, и её конформность вытекает из дифференцируемости:

$$\frac{d(1/z)}{dz} = -\frac{1}{z^2}.$$

Задача. *Конформно ли отображение, переводящее точку $z \in \mathbb{C}$ в z^2, во всех точках плоскости?*

Решение. Перпендикулярные прямые — вещественная и мнимая оси $\{y = 0\}$ и $\{x = 0\}$ плоскости $\mathbb{C} = \{z\}$ — пере-

ходят в полуоси положительных и отрицательных значений z^2, которые вовсе не ортогональны.

Это нарушение конформности сильно искажает вид отображаемых фигур (рис. 14).

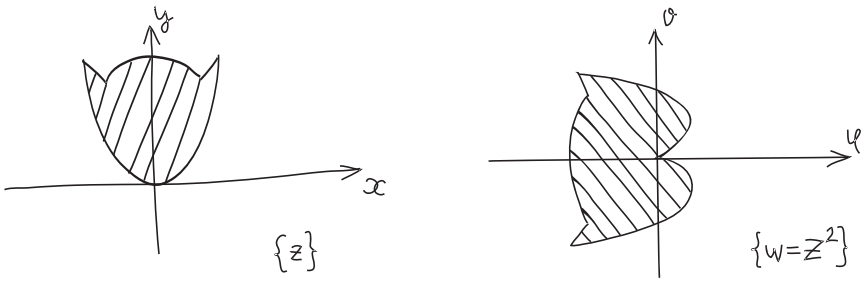


Рис. 14. Неконформное преобразование кошки сделало её гладкий подбородок негладким

Инверсия — конформное преобразование, поэтому отражаемые фигуры более похожи на себя.

Задача. *Образуют ли преобразования инверсии (с разными инвертирующими окружностями) группу?*

Решение. Инверсия меняет ориентации, а ориентаций плоскость имеет только две. Поэтому произведение двух инверсий (сохраняющее ориентацию плоскости) не может быть инверсией.

Сохраняющие ориентацию произведения инверсий (имеющие чётное число сомножителей) уже образуют группу. Это — группа «дробно-линейных» преобразований

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d},$$

фундаментальная для геометрии Лобачевского (где f с вещественными a, b, c, d и $ad - bc = 1$ образуют «группу движений в модели Пуанкаре»).

В этой модели плоскости Лобачевского в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$, в отличие от модели Кэли—Клейна в круге, обсуждавшейся выше, роль прямых играют

не все прямые Евклида, а все прямые и окружности, перпендикулярные «абсолюту» $\operatorname{Im} z = 0$ (рис. 15).

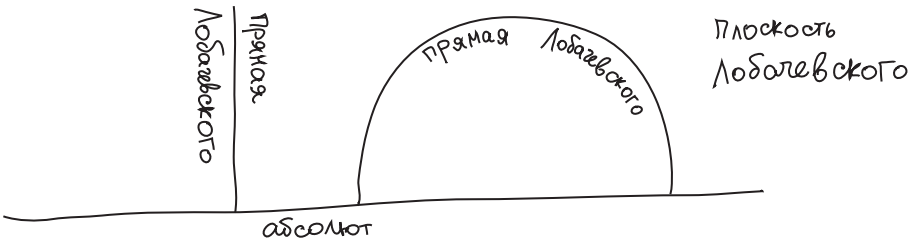


Рис. 15.

Замечательным свойством этой модели является то, что углы Лобачевского в этой модели равны евклидовым углам между соответствующими кривыми верхней полуплоскости.

Удивительно ещё и то, что обе модели — Пуанкаре и Кэли—Клейна — эквивалентны: они доставляют просто разные карты одной и той же плоскости Лобачевского.

Задача. *Найдите диффеоморфизм верхней полуплоскости на внутренность единичного круга, переводящий модель Пуанкаре в модель Кэли—Клейна.*

Адиабатические инварианты

Теория адиабатической инвариантности — это странный пример физической теории, противоречащей на вид легко проверяемым математическим фактам.

Несмотря на такое неприятное свойство этой «теории», она доставила замечательные физические открытия тем, кто не побоялся использовать её выводы (хотя они и были математически необоснованными).

Длившееся пару сотен лет развитие науки привело в конце концов к некоторому соглашению математиков и физиков: математики доказали «теоремы о сохранении адиабатических инвариантов» в некоторых (точно описанных) предположениях.

Гипотезы о возможности существенных ослаблений этих предположений тоже допускают сегодня более или менее точные математические формулировки (ожидающие, однако, доказательств). В настоящем очерке приведено лишь несколько примеров, далеко не исчерпывающих даже доказанные сегодня теоремы об адиабатической инвариантности. (Обзор их см. в книге «Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений», § 20.)

Речь будет сейчас идти о системе дифференциальных уравнений с переменными со временем коэффициентами относительно точки x фазового пространства M:

$$\frac{dx}{dt} = v(x, t), \qquad x \in M. \tag{1}$$

Утверждение об адиабатической инвариантности некоторой величины $I(x, t)$ состоит в том, что она, хотя и не является точным первым интегралом уравнений движения (1), её изменение, тем не менее, мало даже при больших изменениях величины $x(t)$, при условии, однако, что правая часть уравнения (1) «достаточно медленно» меняется с «быстрым временем» t.

Чтобы математически точно сформулировать нужное здесь определение медленности, рассмотрим вместо неавтономной системы (1) семейство динамических систем (с таким же фазовым пространством M), зависящих от параметра λ (пробегающего какое-либо многообразие Λ):

$$\frac{dx}{dt} = v(x, \lambda), \quad x \in M, \quad \lambda \in \Lambda.$$

Условие медленности изменения системы формулируется теперь в терминах зависимости значения параметра λ от времени:

$$\lambda = f(t).$$

Чтобы сделать скорость изменения величины параметра λ малой, рассмотрим, наряду с «быстрым временем» t, ещё и «медленное время» $\tau = \varepsilon t$ (где ε — малый параметр, который будет далее стремиться к 0).

Изменение параметра λ со временем предполагается теперь заданным его зависимостью от медленного времени,

$$\lambda = f(t) = F(\tau), \quad \tau = \varepsilon t,$$

где F — *фиксированная зависимость параметра от медленного времени*.

Адиабатическая инвариантность величины $I(x, \lambda)$ определяется как малость разности

$$|I(x(0), \lambda(0)) - I(x(t), \lambda(t))| < \varkappa$$

для $0 \leqslant \tau \leqslant 1$, т. е. в течение большого интервала быстрого времени, $0 \leqslant t \leqslant 1/\varepsilon$ (за которое фазовая точка смещается на расстояние $|x(t) - x(0)| \sim 1$), при условии что параметр λ меняется достаточно медленно:

$$\lambda = F(\varepsilon t),$$

где ε достаточно мало ($\varepsilon < \varepsilon_0(\varkappa)$).

Трудность дела состоит здесь в том, что описанное условие $\varepsilon < \varepsilon_0(\varkappa)$ малости скорости изменения парамет-

ров (хотя оно и обязательно нужно) не всегда гарантирует ещё малость изменения величины I (которую физики всё же называют «адиабатическим инвариантом») за большое ведь время $1/\varepsilon$.

Найденный сегодня выход состоит в том, что во многих случаях малость приращения величины I имеет место, если зависимость F параметра от медленного времени — достаточно гладкая функция (скажем, $F \in C^2$). Роль гладкости состоит здесь в том, чтобы заменить физическое понятие неинформированности.

Физики говорят, что «лицо, меняющее значение параметра λ в момент t, не должно располагать информацией о положении точки $x(t)$ в фазовом пространстве».

Точно математически сформулировать, что означает это «отсутствие знания», трудно. Но оказалось, его можно заменить требованием гладкости функции F. Если такой гладкости нет, то, выбирая нужные скачки или изломы зависимости параметра λ от времени, можно добиться большого изменения величины I, а гладкость исключает подобные контрпримеры.

Другие попытки дать достаточные условия адиабатической инвариантности состоят в том, что хотя изменение величины $I(x, t)$ за большое время $t \sim 1/\varepsilon$ может оказаться немалым, сильные изменения редки (т. е. наблюдаются только для множества малой меры маловероятных начальных точек $x(0)$ изучаемых траекторий $\{x(t)\}$ в фазовом пространстве).

Ниже я буду употреблять термин «адиабатический инвариант» в описанном выше смысле, основанном на гладкости функции F, предусматривающем вытекающую из этой гладкости малость изменения значения величины I вдоль изучаемой траектории за время $1/\varepsilon$ при всех начальных условиях.

Пример 1. Уравнение малых колебаний математического маятника.

Рассмотрим уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\lambda x, \qquad \lambda > 0. \tag{2}$$

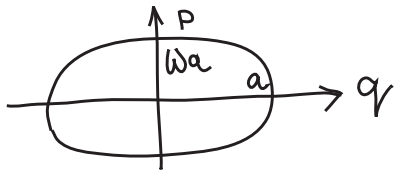
При фиксированном значении параметра λ фазовая кривая представляет собой эллипс

$$\frac{p^2}{2} + \lambda\frac{q^2}{2} = E$$

закона сохранения энергии $H(p,\, q;\, \lambda) = \dfrac{p^2}{2} + \lambda\dfrac{q^2}{2}$ (здесь, как обычно, $p = dx/dt$, $q = t$ и H — функция Гамильтона системы (2): $\dot{q} = \partial H/\partial p$, $\dot{p} = -\partial H/\partial q$).

Решения системы (2) с постоянным $\lambda = \omega^2$ — гармонические колебания,

$$q = a\sin(\omega t), \qquad p = \omega a\cos(\omega t).$$



Эта эллиптическая фазовая кривая ограничивает (на симплектической плоскости с координатами $(p,\, q)$) площадь $S = \pi a \cdot (\omega a) = \omega \cdot (\pi a^2)$. Угловая амплитуда a этого колебания и его энергия $E = \omega^2 a^2$ связаны между собой «соотношением Планка» $E = \frac{\omega}{\pi}S$. Оказывается, *величина фазовой площади*

$$I(p,\, q;\, \omega) = \frac{\pi H(p,\, q)}{\omega} = \pi a^2\omega$$

является адиабатическим инвариантом системы (2).

Эта инвариантность произведения I означает, в частности, что если длина l математического маятника (для которого ведь $\omega^2 = \lambda = l/g$) медленно вырастет вдвое, то сомножитель ω увеличится в $\sqrt{2}$ раз, поэтому сомножитель a^2 в произведении $I = \pi a^2\omega$ уменьшится в $\sqrt{2}$ раз.

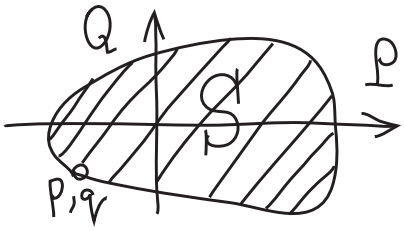
Иными словами, максимальный угол отклонения a уменьшится в $\sqrt[4]{2}$ раз при медленном удвоении длины маятника. А если длина маятника вернётся к исходному значению, то вернётся к исходной величине и амплитуда колебаний.

Поразительной особенностью этой теоремы является то, что результат совершенно не зависит от того, по какому именно закону проходило увеличение длины маятника: нужно только, чтобы функция F, определяющая изменение $\lambda = F(\varepsilon t)$, была гладкой.

Таким образом, в «адиабатическом пределе» две физически независимые величины (a и l) становятся функционально зависимыми. Это необычное физическое явление сразу выделяет адиабатические теории среди многих других.

Доказательство теоремы об адиабатической инвариантности «переменной действия» $S(p, q; \lambda)$ (выражающей через начальную точку (p, q) фазового пространства и значение параметра λ площадь, ограниченную фазовой кривой,

$$S(p, q; \lambda) = \iint\limits_{H(P,Q) \leqslant H(p,q)} dP\, dQ),$$



имеется в учебнике «Математические методы классической механики» (для любой гамильтоновой системы с одной степенью свободы), а также и в «Геометрических методах теории обыкновенных дифференциальных уравнений».

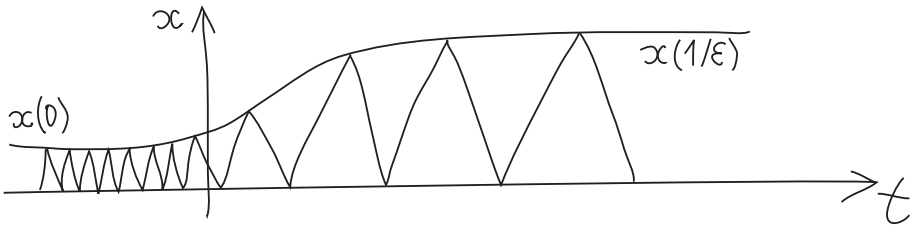
Приведённые ниже примеры доставляют другие аналогичные случаи (где доказательство адиабатической

инвариантности можно провести так же) — их можно вывести и из описанного случая гамильтоновой системы с функцией Гамильтона $H(p, q; \lambda)$ при помощи надлежащего её обобщения, допускающего, например, удары о жёсткие стенки вместо потенциальных силовых полей.

Пример 2. Рассмотрим «бильярдный шар», движущийся между двумя параллельными стенками, расстояние между которыми составляет x. Обозначим скорость движения шара через v и будем считать, что в момент соударения скорость относительно стенки меняет знак.

В этом случае адиабатическим инвариантом является произведение $I = x|v|$ (пропорциональное, конечно, площади, ограниченной соответствующей замкнутой фазовой кривой при постоянном значении параметра λ). Адиабатическая инвариантность означает здесь малость изменения (за большое время порядка $1/\varepsilon$) произведения $I = x|v|$.

Иными словами, когда расстояние между стенками вырастет вдвое, скорость движения шара между ними примерно вдвое уменьшится (по каком бы гладкому закону $x = F(\varepsilon t)$ ни менялось расстояние в течение времени $t \sim 1/\varepsilon$):



Что отодвигание стенки уменьшает скорость соударяющегося с ней шара, понятно, но теория адиабатической инвариантности произведения $|v|x$ доставляет удивительно точное описание этого уменьшения.

Замечание. Хотя эта теория применима только при $t \sim 1/\varepsilon$, в случае аналитической зависимости ($x = F(\tau)$,

$\tau = \varepsilon t$) расстояния между стенками от времени можно исследовать даже приращение адиабатического инварианта за бесконечное время

$$I(x(+\infty), |v(+\infty)|) - I(x(-\infty), |v(-\infty)|).$$

Описание этого приращения (которое оказывается при $\varepsilon \to 0$ экспоненциально малым) доставляется исследованием поведения голоморфной функции F в комплексных точках τ (его нашёл А. М. Дыхне, **ЖЭТФ 38**, № 2, 1960, 570—578).

Пример 3. Рассмотрим в трёхмерном евклидовом пространстве магнитное поле B и движение заряженной частицы со скоростью v. Обозначим через $v_\perp$ нормальную B компоненту скорости.

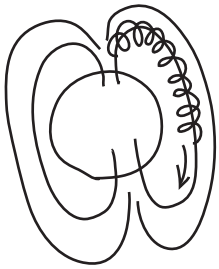
Если бы поле было постоянным, частица описывала бы вокруг прямой силовой линии ларморовскую спираль, вращаясь от неё на постоянном расстоянии r (называемом ларморовским радиусом и зависящем от векторов B и v в начальной точке траектории).

Адиабатическим инвариантом оказывается в этом случае величина $v_\perp^2/|B|$.

Под адиабатическим пределом можно здесь понимать, по желанию, либо предел при $|v| \to 0$, либо предел при $|B| \to \infty$ (важно лишь, чтобы стремился к 0 ларморовский радиус). В случае гладкости поля B можно доказать малость изменения указанного выше адиабатического инварианта в течение большого времени.

В частности, всё это применимо к объяснению полярных сияний: заряженные частицы в своём ларморовском спиралевидном движении вокруг силовых линий магнитного поля Земли доходят, ближе к магнитным полюсам, до района больших значений напряжённости магнитного поля $|B|$. Сохранение адиабатического инварианта приводит в этом случае к отражению адиабатически движущейся частицы от «магнитной пробки», и она возвращается вдоль (другой) магнитной линии ко

второму полюсу (за микросекундное время).



Около пробок образуются скопления ожидающих отражения частиц — эти-то «облака» заряженных частиц и наблюдаются как полярные сияния.

Математически точное описание этой ситуации возможно, но довольно длинно, и я не привожу его здесь. Зато следующий вариант сходной теории легко сформулировать точно.

Пример 4. Рассмотрим гладкую поверхность M с фиксированной римановой метрикой. Рассмотрим на этой поверхности кривую постоянной геодезической кривизны $\varkappa$.

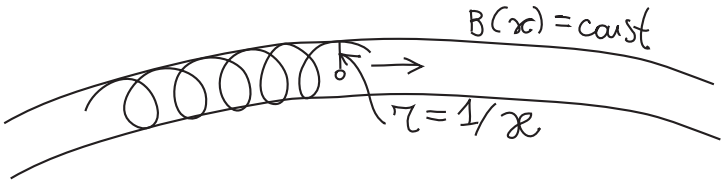
В случае евклидовой плоскости M это — замкнутая (при $\varkappa > 0$) окружность, радиуса $r = 1/\varkappa$. Если теперь геодезическая кривизна меняется вдоль кривой ($\varkappa = B(x)$, $x \in M$), то функция $B\colon M \to \mathbb{R}$ определяет «ларморовские окружности» на поверхности M, т. е. спиралевидное движение по переменной «ларморовской окружности» с движущимся вдоль M центром и переменным радиусом.

Физически можно называть это движение движением вдоль M заряженной частицы (в «перпендикулярном поверхности M» магнитном поле B).

Это движение допускает адиабатическое описание, когда радиусы ларморовских окружностей малы (физически можно рассматривать либо сильные магнитные поля, $B \to \infty$, либо малые начальные скорости, $|v| = |dx/dt|$).

Если функция B гладкая, то адиабатическим инвариантом оказывается просто геодезическая кривизна её соответствующей ларморовской окружности переменного радиуса (в физических терминах это $|v|^2/|B|$).

В частности, такая кривая большой зависящей от точки геодезической кривизны на поверхности M осциллирует между двумя близкими линиями уровня непостоянной функции B, если кривизна велика.



Если же функция B представляет собой постоянную, то соответствующие ларморовские окружности большой геодезической кривизны $\varkappa$ всё равно осциллируют в кольце между двумя линиями уровня адиабатического инварианта, только вместо функции $B\colon M \to \mathbb{R}$ нужно рассмотреть гауссову кривизну $K\colon M \to \mathbb{R}$.

Разница в этих двух теориях состоит, однако, в том, что при стремлении ларморовского радиуса к нулю малая скорость движения центра ларморовской окружности вдоль кольца между двумя линиями уровня адиабатического инварианта имеет разный порядок величины (при $B \neq \mathrm{const}$ эта скорость гораздо больше).

В обоих случаях адиабатический инвариант мало меняется не только за время $|\varepsilon|$, но и за бесконечное время (это следует из «теории КАМ»).

Возвращаясь к маятнику примера 1, заметим, что адиабатическая инвариантность отношения его энергии к его частоте кажется противоречащей возможности раскачиваться на качелях: при сколь угодно малой амплитуде изменения эффективной длины качелей, l, нижнее положение равновесия становится неустойчивым в случаях параметрического резонанса (когда период измене-

ния l кратен целому числу полупериодов собственного колебания невозмущённых качелей).

Это замечание доставляет «контрпример» к утверждению об адиабатической инвариантности отношения энергии к частоте потому, что частота, медленно поколебавшись, возвращается к исходному невозмущённому значению, а амплитуда раскачавшихся качелей за это время выросла.

Но никакого противоречия здесь нет, потому что для реализации раскачки, необходима «обратная связь», т. е. знание того, следует ли увеличивать или уменьшать значение параметра l при наблюдающейся в данный момент фазе мгновенных собственных колебаний.

Гладкость закона F изменения параметра $\lambda = F(\varepsilon t)$, предположенная в теореме об адиабатической инвариантности переменной действия $S(p, q; \lambda)$, исключает возможность такой обратной связи. Но если этой гладкости не предполагать, то математические контрпримеры к физическому утверждению об адиабатической инвариантности становятся возможными.

Дальнейшие обобщения теории адиабатических инвариантов описаны в книге «Геометрические методы теории обыкновенных дифференциальных уравнений», § 20, где указаны и многочисленные литературные ссылки.

Универсальность показателя Хэка длин рек

В энциклопедиях для многих рек указаны и длина реки l, и площадь её бассейна, S. Спрашивается, как связаны эти два числа?

Решение. Если бы бассейн реки был кругом с центром в середине прямой реки, то выполнялось бы соотношение $l = cS^{1/2}$ (подсказываемое и размерностями этих величин).

Согласно американским данным, статистика (по большому числу рек: и больших, и малых, и равнинных, и горных) приводит в большинстве случаев к бóльшей длине:

$$l \approx cS^{\alpha},$$

где $\alpha \approx 0{,}58$ («параметр Hack'а»).

Бóльший половины показатель Хэка α объясняется фрактальной извилистостью реки, делающей её более длинной, чем диаметр её бассейна.

Но почему показатель α универсален и имеет именно такое значение — не ясно (хотя и делались попытки вывести его из уравнений Навье—Стокса гидродинамики, неустойчивость решений которых делает реки извили-

стыми). Вот данные для дюжины рек Подмосковья:

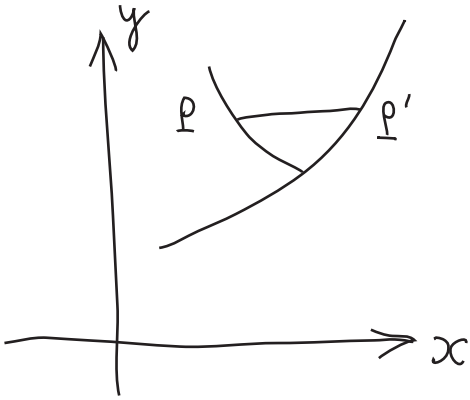
Река	Длина (км)	Площадь (км^2)	$\alpha \approx \ln l / \ln S$
Москва	502	17640	0,64
Протва	275	4640	0,66
Воря	99	1160	0,65
Дубна	165	5474	0,56
Истра	112	2120	0,61
Нара	156	2170	0,65
Пахра	129	2720	0,62
Сходня	47	259	0,69
Волгуша	40	265	0,60
Пехорка	42	513	0,59
Сетунь	38	187	0,69
Яуза	41	452	0,59

Среднее значение полученных здесь 12 показателей α составляет 0,63.

Резонансы в Шуховской башне, в уравнении Соболева и в баках вращающихся ракет

Занимаясь в 1958 году 13-й проблемой Гильберта, я изучал представление функции, заданной на плоской кривой, в виде суммы двух функций, каждая из которых зависит только от одной из координат:

$$u(P) = f(x) + g(y).$$



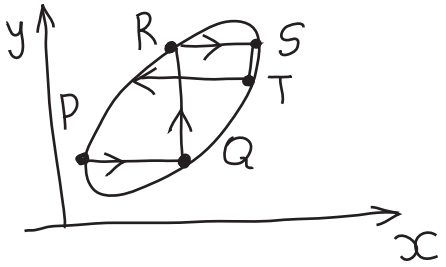
Мне удалось исследовать эту задачу, если кривая — дерево. Например, выберем на дереве точку P и разложим известное значение $u(P)$ в сумму любых двух слагаемых, $f(x) + g(y)$. Тогда в точке P' мы знаем значение слагаемого g, и находим значение слагаемого f, поскольку значение суммы известно.

И вот, оказалось, что любое дерево можно расположить в $\mathbb{R}^3$ так, что для любой непрерывной функции u на нём аналогичным методом можно построить представление в виде суммы трёх непрерывных функций, каждая из которых зависит только от одной из координат (x, y, z):

$$u(P) = f(x) + g(y) + h(z).$$

Решив эту проблему Гильберта, я решил обобщить доказанную теорему, заменив дерево любой кривой. Ес-

ли кривая (на плоскости) имеет цикл, то на нём возникает динамическая система $P \to Q \to R \to S \to \ldots$



И оказалось, что возможность нужного представления зависит от свойств этой динамики (отображения цикла на себя): если у этой динамической системы есть периодические траектории, то представление возможно не всегда, а если их нет, то вопрос зависит и от гладкости разлагаемой функции u, и от арифметических свойств диофантовых задач на заданной замкнутой кривой.

Доказав десятки теорем в этой области (которая эквивалентна исследованию задачи Дирихле для волнового уравнения), я написал об этом статью. Рецензенты указали мне, что этой задачей до меня занимались ученики С. Л. Соболева (Р. А. Александрян, Н. Н. Вахания), и даже сам Соболев (работа которого, однако, засекречена до сих пор, так как он применял свои теоремы к исследованию полёта вращающихся снарядов с жидким содержимым).

Мне Сергей Львович тогда же рассказал, что известно и что нет — здесь я коротко опишу этот рассказ.

Ещё Коши рассматривал вопрос о жёсткости выпуклых поверхностей. Например, тоненькая оболочка выпуклого яйца устойчиво сохраняет свою форму, пока на ней нет никакой трещины. Но стоит нарушить её вдоль хотя бы коротенькой дуги — и нетривиальные деформации становятся возможными.

Самолёты и ракеты ограничены, однако, не выпуклыми поверхностями — например, для присоединения крыльев к фюзеляжу обязательно нужны гиперболические переходные области.

Поэтому вопрос о жёсткости в гиперболическом случае важен в прикладном отношении.

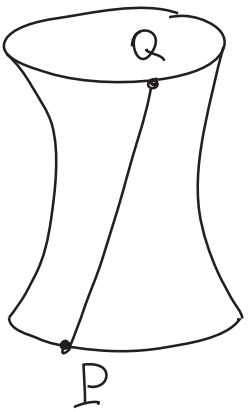
Простейшей моделью (для линейных, т. е. очень малых, деформаций) является здесь как раз задача Дирихле для волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = 0, \qquad u(x,\,y) = f(x) + g(y),$$

(и её многомерные обобщения).

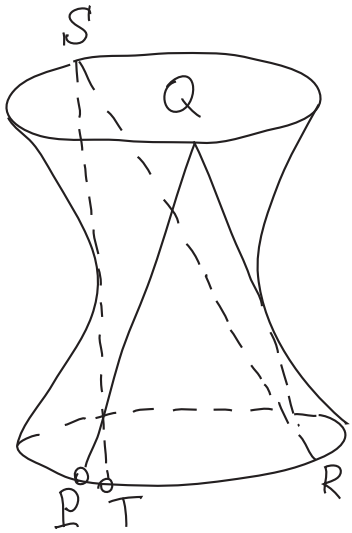
Соответствующая работа С. Л. Соболева (1943 года) была ещё секретной, но его обобщающая эту работу статья о так называемом уравнении Соболева уже появилась, и он добыл мне разрешение посмотреть в закрытом отделе Института механики соответствующие эксперименты, исследовавшие жёсткость гиперболических поверхностей.

В качестве такой поверхности брался цилиндр, вроде консервной банки — я видел сотни тонкостенных цилиндров гиперболической кривизны разных размеров, и некоторые из них стойко сохраняли форму при нажатии на них, а другие прямо дышали в руках (хотя разница, составлявшая 1—2%, на вид и не была заметна).



Оказалось, что здесь важны следующие резонансы. Из точки P нижнего основания выходит асимптотическая кривая PQ (если поверхность — гиперболоид, вроде башни Шухова на Шаболовке, то эта асимптотическая линия — отрезок прямой, в башне Шухова он выполнен из стали).

Выйдя из точки Q верхнего основания по второй асимптотической линии, мы вернёмся (в точке R) на нижнее основание.



Возникающее отображение $P \to R$ нижнего основания в себя может иметь периодические точки $T = P$ (что на «башне Шухова» соответствует замкнутой конечной ломаной $PQRST$ из составляющих башню стержней). Этот «резонанс» и приведёт к неустойчивости (в которой поверхность изогнётся в малой окрестности указанной ломаной из характеристик).

Исследование таких неустойчивостей было похоже и на мою работу о задаче Дирихле для волнового уравнения, и на изучение резонансов в планетных движениях, которым я стал тогда заниматься (ради исследования устойчивости солнечной системы, где резонансы тоже опасны, вызывая, например, щели в кольцах Сатурна, подобные дополнительным интервалам в множестве Кантора).

Работы С. Л. Соболева о резонансах колебаний в жидкости в тонкостенных баках ракет с собственными колебаниями корпуса ракеты позволили Б. И. Рабиновичу

предложить С. П. Королёву способ, как избежать этих резонансов (засунув в банки с горючим нужные препятствия), и ракеты перестали ломаться.

С тех пор прошло много лет, и я даже получил из США письма, где меня упрекали в напрасных восхвалениях Сергея Львовича Соболева (по поводу этих его работ об «уравнении Соболева»).

А именно, современные американские физики (московского, впрочем, происхождения) указали мне, что «уравнение Соболева» было уже опубликовано в 1910 году одним математиком, исследовавшим его таким же методом, как С. Л. Соболев, и получившим много интересных результатов: он написал это уравнение не ради исследования колебания топлива в баках вращающейся ракеты, а для исследования метеорологических особенностей атмосферы Юпитера (с его «красным пятном» — циклоном многосотлетнего возраста), где вращение Юпитера является одним из основных факторов.

Как ни удивительно, это уравнение Соболева было до него исследовано А. Пуанкаре.

Ради построения своей теории С. Л. Соболев изобрёл обобщение гильбертова пространства функций, L_2. В его обобщении эрмитова форма не была положительно-определённой, как у Гильберта, а была скорее релятивистской, имея, как в метрике Лоренца, один квадрат другого знака.

Исследуя этот вопрос в эвакуации в Казани, Соболев обратился за советом к соседу, тоже эвакуированному из Москвы, и тот помог ему. Но этот помощник заметил: «Зачем такая нелепая аксиома — один квадрат другого знака. Нужно рассматривать сразу любое конечное их число!»

Когда сосед написал свою работу об этом обобщении гильбертова пространства, он попросил Сергея Львовича дать точную ссылку на свою работу (где квадрат другого знака один), чтобы поместить его в свою библиографию.

Но Соболев ответил — «ни в коем случае, эта работа не только не опубликована, но и совершенно секретна».

Мне он рассказал об этом, уже борясь за рассекречивание этой работы — сейчас я могу о ней рассказать. Но пространства Соболева получили тем временем наименование «П-пространства» по имени обобщившего их соседа, который их теорию и опубликовал (без ссылки на Соболева).

«П-пространствами» они называются по имени Льва Семёновича Понтрягина.

Хотя все эти давние исследования сегодня стали уже классическими, я упомяну всё же один вопрос из этой области, который я мечтал исследовать в конце 50-х годов, но который, насколько мне известно, всё ещё не решён.

Рассмотрим какое-нибудь гладкое вложение $T^2 \subset \mathbb{R}^3$ тора в трёхмерное евклидово пространство. Такое вложение называется *жёстким*, если всякое близкое (изометрическое) вложение получается из него (малым) движением евклидова пространства.

Вопрос состоял в том, бывают ли не жёсткие вложения (и каких больше — жёстких или нежёстких)?

Я слышал, будто сегодня доказана жёсткость стандартного вложения тора вращения (между двумя параллельными плоскостями, касающимися его по окружностям).

Но это не исключает нежёсткости других вложений (например, как-либо заузленных): насколько я знаю, этот вопрос не решён даже для бесконечно малых деформаций.

Теория вращения твёрдого тела и гидродинамика

Моряки встретились к XVIII веку со следующей трудностью определения своего места на карте: для ориентирования измерялись координаты звёзд на небесной сфере в момент измерения, и использовать эти измерения можно было, только зная точно, в какой именно момент измерения производились.

Сигналов точного времени по радио тогда ещё не передавали, поэтому для определения времени приходилось пользоваться хронометрами. Но хронометр, особенно в длительном плавании, склонен начинать сильно врать. Сказываются и качка, и вращение Земли, и вариации поля тяготения, влияющие на период собственных колебаний маятника, и даже климатические условия (тропическая жара удлиняет маятник, а морозы укорачивают).

Английское адмиралтейство объявило поэтому большую премию за решение проблемы определения точного времени. Эйлер придумал остроумный путь решения этой проблемы: использовать в качестве часов Луну.

Движение четырёх (открытых Галилеем) спутников Юпитера к тому времени уже пытались использовать вместо часов. Но для этого нужен, кроме хорошей теории вовсе не простого движения спутников, хороший телескоп, так как «циферблат» этих часов уж очень мал: Юпитер далеко, и спутники не всегда хорошо видны.

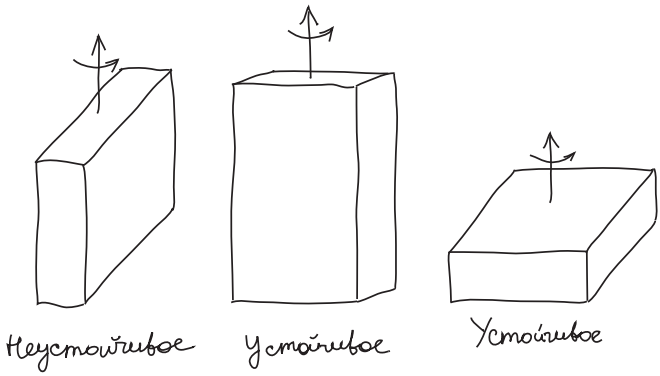
Луна гораздо ближе, наблюдать её легко, так что задача была бы решена, если бы была построена достаточно точная теория малых колебаний Луны около своего центра тяжести (с учётом возмущений, вносимых прежде всего Солнцем и Землёй в сложном орбитальном движении Земли вокруг Солнца и Луны вокруг Земли).

Вот эту-то теорию Эйлер и решил создать. Его замечательная работа на эту тему была опубликована в 1765 году — он рассматривал не только Луну, но и движе-

ние любого твёрдого тела вокруг своего центра тяжести, прежде всего по инерции, а потом и вследствие возмущающих влияний других тел.

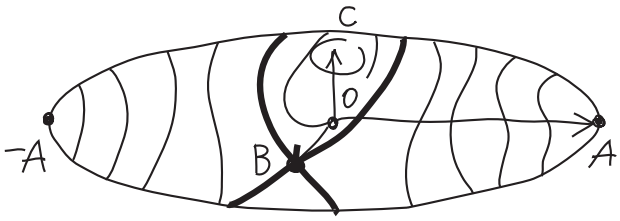
Замечательный результат этих исследований Эйлера доставляет, прежде всего, полное решение задачи об инерциальном движении произвольного твёрдого тела вокруг своего центра тяжести. Эта задача оказалась «вполне интегрируемой гамильтоновой системой», и Эйлер нашёл нужную полную систему первых интегралов в инволюции.

Из его результатов вытекало, например, что стационарные вращения вокруг всех трёх осей эллипсоида инерции твёрдого тела существуют, но вращение вокруг средней оси инерции неустойчиво, в то время как и вращение вокруг большой оси инерции, и вращение вокруг малой оси инерции устойчивы.



Это значит, что, например, спичечный коробок, брошенный так, что он вращается вокруг длинной или вокруг короткой оси, так и будет вращаться, а если бросить его, закружив вокруг средней оси, то он будет кувыркаться хаотически (что я не раз демонстрировал студентам на лекции — здесь лучше всего бросать упакованную книгу, а не кирпич, и шесть граней бросаемого тела лучше выкрасить по-разному, чтобы неустойчивость была сразу видна).

Топологическая причина различия состоит в разнице поведения линий пересечения эллипсоида со сферами с центром в начале координат.



Около конца A большой полуоси эллипсоида расстояние до центра эллипсоида максимально, и линии, где это расстояние немного меньше длины большей полуоси OA, являются окружающими точку максимума A замкнутыми кривыми на поверхности эллипсоида. При малом отклонении направления оси вращения от направления OA соответствующий вектор переходит от вектора OA на одну из таких замкнутых кривых, близких к точке A, и начинает совершать вблизи OA малые колебания, так что движение, хотя и перестаёт быть стационарным вращением, остаётся к нему близким.

Точно так же, около конца C малой оси расстояние до центра O достигает минимума, и линии, где оно лишь немного превышает минимальное расстояние $|OC|$, — замкнутые кривые на поверхности эллипсоида, близкие к точке C. Соответствующее возмущённое вращение остаётся близким к стационарному.

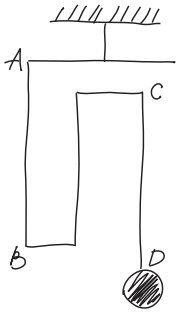
Напротив того, около конца B средней оси функция расстояния до центра эллипсоида O имеет седловую точку. Линия уровня, где расстояние точно равно $|OB|$, представляет собой две (пересекающиеся в точке B) окружности, а линия уровня, близкого к $|OB|$, состоит из двух замкнутых кривых, далеко уходящих от точки B (вплоть даже до противоположного конца, $-B$, средней оси). При возмущении стационарного вращения вокруг оси OB возникает совершенно непохожее на него

«кувыркание», в результате которого тело может даже перевернуться почти что вверх ногами.

Луна сейчас благополучно совершает малые колебания, будучи повёрнута к Земле всегда в основном одной стороной и лишь немного колеблясь около этого «маятникового» положения. Напротив того, искусственные спутники Земли, в зависимости от того, как ими управляют, могут совершать все описанные Эйлером движения, так что теория Эйлера и сегодня является основой расчёта борьбы с кувырканием спутников.

Теория Эйлера позволяет детально разобрать колебания Луны около своего обычного положения, так что, наблюдая фазу этих колебаний, можно использовать её как стрелку часов и узнать момент наблюдения.

Адмиралтейство, однако, наградило не Эйлера, а часовщика, решившего проблему определения времени совершенно иным путём. А именно, он предложил подвешивать маятник AD трёхзвенным подвесом $ABCD$.



Стержни AB и CD имеют вдвое меньший коэффициент теплового расширения, чем соединяющий их стержень BC. В результате тепловое удлинение стержней AB и CD опускает груз D на столько же, на сколько поднимает его тепловое удлинение стержня BC. Поэтому эффективная длина маятника AD при тепловом расширении стержней не меняется, а потому не меняется и период колебаний этого маятника: хронометр стал нечувствительным к изменению температуры!

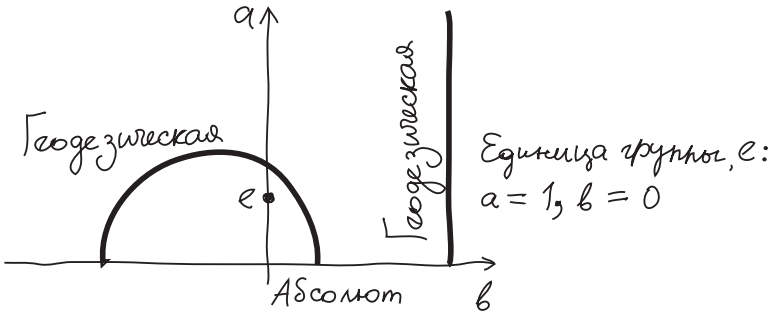
Разбирая к её двухсотлетию статью Эйлера о вращении Луны, я заметил в 1965 году, что рассуждения Эйлера доказывают гораздо больше, чем он указал. А именно, вся теория Эйлера почти без изменений переносится на исследование геодезических линий на многообразиях групп Ли, снабжённых левоинвариантной (или правоинвариантной) римановой метрикой.

Если начать с группы SO(3) вращений трёхмерного евклидова пространства, то эти геодезические доставляют движения твёрдого тела относительно его центра тяжести, изученные Эйлером. Но теорию Эйлера можно применять и к другим группам, и получающиеся из его результатов заключения вовсе не очевидны.

В качестве очень простого примера можно взять двумерную группу аффинных преобразований прямой, $x \mapsto ax + b$. Считая преобразования сохраняющими ориентацию ($a > 0$), мы можем отождествить эту группу с полуплоскостью $\{a, b\colon a > 0\}$. В этом случае левоинвариантная метрика Эйлера доставляет в точности модель Пуанкаре геометрии Лобачевского,

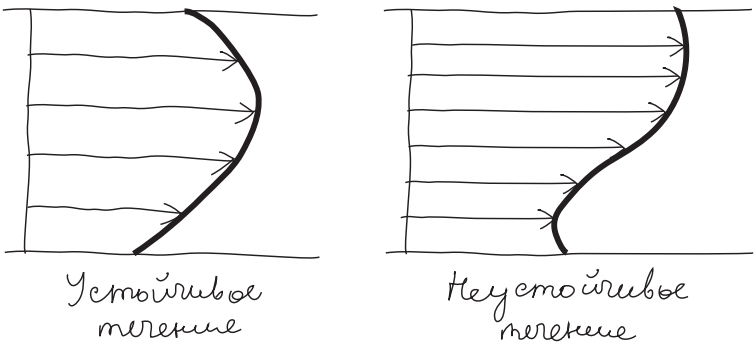
$$ds^2 = \frac{da^2 + db^2}{a^2},$$

так что теория Эйлера превращается в геометрию Лобачевского. Роль стационарных вращений Эйлера играют в этом случае те прямые и окружности евклидовой полуплоскости $a > 0$ с декартовыми координатами (a, b), которые перпендикулярны линии «абсолюта», $a = 0$.



В качестве гораздо более богатого примера применения теории эйлерова вращения твёрдого тела рассмотрим группу $\mathrm{SDiff}\, M$ «несжимаемых» диффеоморфизмов многообразия M (т. е. диффеоморфизмов $M \to M$, сохраняющих некоторый элемент объёма τ на M). Геодезические правоинвариантной метрики на этой группе представляют собой (эйлеровы) течения несжимаемой жидкости вдоль многообразия M.

Эйлерова теория устойчивости стационарных движений твёрдого тела превращается в этом случае в обобщение теоремы Рэлея об устойчивости двумерных течений несжимаемой жидкости, когда профиль скоростей не имеет точек перегиба.



Течения с точками перегиба оказываются в этом случае аналогичными стационарным вращениям твёрдого тела вокруг средней оси инерции — общая теорема устойчивости Эйлера применяется в обоих случаях одинаково, но при переходе от трёхмерной группы $\mathrm{SO}(3)$ к бесконечномерной группе $\mathrm{SDiff}\, M$ из теоремы Эйлера получается (обобщённая) теорема Рэлея.

На устойчивость геодезических многообразия оказывает большое влияние его «секционные кривизны по двумерным направлениям». А именно, отрицательность кривизны вызывает экспоненциальное с течением времени разбегание геодезических (с близкими начальными условиями). Теория Эйлера позволяет вычислить эти

секционные кривизны (для групп с левоинвариантными или правоинвариантными метриками).

Применив эти вычисления к группам несжимаемых диффеоморфизмов поверхностей, я получил много двумерных направлений сильно отрицательной кривизны. Например, применяя эти оценки к двумерной гидродинамике на поверхности тора (и к течениям пассатного типа), я убедился, что первоначально малые возмущения начального поля скоростей вырастают примерно в 10^5 раз (от километрового размера грозы до изменений погоды планетарного масштаба) за время порядка месяца.

Это означает, что динамический прогноз погоды на сильно превышающее неделю время будет оставаться невозможным, как бы сильно ни были усовершенствованы и компьютеры, и методы вычислений, и регистрирующие исходное состояние погоды датчики. Действительно, слегка изменив начальные скорости в каждом кубическом километре (даже так, чтобы средние по соседнему десятку кубических километров при этом не менялись), мы придём к такому новому начальному условию, которое датчики не отличат от старого, но которое приведёт тайфун через пару недель не в Новый Орлеан, куда он должен был попасть по старому сценарию, а, скажем, в Бомбей.

Можно только поражаться, насколько значительными оказываются приложения фундаментальных теорий и идей Эйлера даже в тех случаях, когда сам он ограничился при их изложении первым содержательным случаем (группы SO(3) в нашем примере), а все далёкие обобщения получены лишь недавно.

Оглавление

Предисловие 3
Эксцентриситет кеплеровой орбиты Марса 5
Спасение хвостового оперения самолётов 7
Возвращение по синусоиде 8
Интеграл Дирихле и оператор Лапласа 9
Закон Снеллиуса преломления лучей 11
Глубина воды и картезианская наука 13
Капля воды, преломляющая свет 15
Наибольший угол отклонения луча 16
Радуга 17
Миражи 19
Время прилива, явление Гиббса и томография 22
Вращение жидкости 25
Какая сила гонит велосипед вперёд? 27
Эллипсы Гука и Кеплера и их конформные преобразования . . 29
Устойчивость перевёрнутого маятника и швейная машинка Капицы 34
Космический полёт заглушки от фотокамеры 38
Угловая скорость стрелки часов и «самораспространяющаяся псевдообразованность» Фейнмана 40
Планетные кольца 43
Симметрии (и принцип Кюри) 46
Ошибочные теоремы Куранта 48
Некорректные задачи механики 51
Рациональные доли потоков 53
Путешествие к центру Земли 55
Средняя частота взрывов (Я. Б. Зельдович) и мир де Ситтера . 57
Фонтаны Бернулли Нологорского моста 61
Формообразование в трёхлитровой банке 64
Задача Лидова о прилунении ракет 66
Наступления и отступления ледников 69
Эргодическая теория геометрических прогрессий 77
Мальтузианский передел мира 79
Перколяция и гидродинамика Вселенной 81
Задача Бюффона и интегральная геометрия 85
Средняя площадь проекции 88
Математическое понятие потенциала 91
Инверсия в цилиндрических зеркалах метро 103
Адиабатические инварианты 119
Универсальность показателя Хэка длин рек 129
Резонансы в Шуховской башне, в уравнении Соболева и в баках вращающихся ракет 131
Теория вращения твёрдого тела и гидродинамика 137