



מתרגל: נאדר כרייני

מרצה: פרופ"ח איתי אריאלי

בחינה בתורת המשחקים השיתופיים (097317)

11/02/2022

מועד א' – סמסטר חורף – תש"פ

הערות, הבהרות והנחיות:

1. משך הבחינה: 3 שעות.
2. חומר עזר: אסור להשתמש בשום חומר עזר.
3. מבנה הבחינה:
 - א. הבחינה מורכבת מארבע שאלות פתוחות, כל שאלה שווה 25 נקודות. עליכם לענות על כל השאלות.
 - ב. לכל שאלה יכול להיות סעיף אחד או יותר. נדרש לענות על כל הסעיפים לקבלת ניקוד מלא. אין בחירה בין הסעיפים השונים. ייתכן כי חלק מהסעיפים תלויים אחד בשני (אך לא בהכרח).
4. ניתן להסתמך על משפטים שנלמדו בכתה אך יש לצטט אותם במדויק. על התשובות להיות מנומקות היטב.
5. שימו לב כי בחלק מהשאלות נדרש לנמק את התשובה, באמצעות הסבר המבוסס על חומר הקורס. תשובה לא מנומקת תפחית מהניקוד המלא של השאלה.

בהצלחה !

שאלה 1:

נתונה בעיית השמה $(A, H, h, (\prec_a)_{a \in A})$ כאשר קבוצת הסוכנים היא $A = \{1, \dots, n\}$, קבוצת הבתים היא $\{h_1, \dots, h_n\}$ וביתו של סוכן $i \in A$ הוא $h(i) = h_i$. נסתכל על תהליך ההשמה הבא. הסוכנים עומדים בתור לפי מספרם ומגיעים אחד אחרי השני. בכל שלב הסוכן שתורו בוחר את הבית המועדף עליו ביותר שעדיין לא נבחר עד כה. אבל אם ביתו של הסוכן תפוס ואין בית פנוי שהסוכן מעדיף על ביתו שלו, הוא בוחר בביתו שלו ומגרש משם את הסוכן שנמצא שם. במקרה זה הסוכן המגורש חוזר לסוף התור. התהליך מסתיים כשהתור נגמר.

- הראו כי התהליך מסתיים לאחר מספר סופי של שלבים ובסופו מתקבלת השמה.
- האם ההשמה המתקבלת בסוף התהליך מקיימת סבירות פרטית תמיד?
- האם ההשמה המתקבלת בסוף התהליך מקיימת יעילות תמיד? בסעיפים ב' ו ג' יש להוכיח את הטענה או לספק דוגמה נגדית.

שאלה 2:

תהי $d = (\frac{5}{4}, \frac{1}{8})$ נקודת אי הסכמה בתחום:
 $C = \{(x_1, x_2) : (x_1 - 1)^2 + 4x_2^2 \leq 2\}$
מצאו את פתרון נש לבעיית המיקוח (C, d) .

שאלה 3:

נסתכל על המשחק הבא (N, V) עם $n = 11$ שחקנים: לכל $S \subseteq N$,
 $V(S) = (|S| - 1)^2$ אם $1 \in S$ או $V(S) = 0$ אם $1 \notin S$. כאשר $|S|$ מייצג את הגודל של הקבוצה S .

- הראו כי הליבה של המשחק אינה ריקה.
- מצאו מהו התשלום המקסימלי ששחקן 2 יכול לקבל בוקטור כלשהו בליבה של המשחק. כלומר מצאו מהו $\max\{x_2 | x \in C(V)\}$. הוכיחו תשובתכם.
- מצאו מהו התשלום המינימלי ששחקן 1 יכול לקבל בוקטור כלשהו בליבה של המשחק. כלומר מצאו מהו $\min\{x_1 | x \in C(V)\}$. הוכיחו תשובתכם.

שאלה 4:

נתון משחק שיתופי (N, V) כאשר $|N| = n \geq 2$. לכל זוג שחקנים שונים $j, i \in N$ יהי $sh_i(N \setminus \{j\}, V)$ ערך שפלי של שחקן i בתת המשחק $(N \setminus \{j\}, V)$ בו קבוצת השחקנים היא $N \setminus \{j\}$ ופונקציית הערך זהה לזו במשחק המקורי. לכל שחקן $i \in N$ נגדיר

$$\varphi_i(N, V) = \frac{1}{n} \left(V(N) - V(N \setminus \{i\}) + \sum_{j \in N \setminus \{i\}} sh_i(N \setminus \{j\}, V) \right)$$

הראו באמצעות האקסיומות או בכל דרך אחרת כי $\varphi_i(N, V) = sh_i(N, V)$.