<u>תורת המשחקים השיתופיים – תרגיל 6</u>

תהי N קבוצת שחקנים במשחק שיתופי. אוסף של תתי קבוצות $\mathcal{B}$ ייקרא מאוזן אם קיים וקטור מאזן $\{\delta_S\}_{S\in\mathcal{B}}$ כך ש $\delta_S > 0$ לכל $S \in \mathcal{B}$ ומתקיים לכל $i \in N$,

$$\sum_{S\in\mathcal{B}:i\in S} \delta_S = 1.$$

בכתה הצגנו את משפט שפלי בונדרבה האומר כי הליבה של משחק (N,V) אינה ריקה אמ"ם לכל אוסף מאוזן $\mathcal{B}$ ווקטור מאזן $\{\delta_S\}_{S\in\mathcal{B}}$ מתקיים ש,

$$\sum_{S\in\mathcal{B}} \delta_S V(S) \le V(N).$$

1. נתון משחק שיתופי (N,V) כאשר $N = \{1,2,3\}$. נניח כי תנאי בונדרבה שפלי מתקיים לאוספים המאוזנים $\{\{1\},\{2,3\}\}$, $\{\{1\},\{2\},\{3\}\}$, $\{\{2\},\{1,3\}\}$ $\{\{3\},\{1,2\}\}$ ו $\{\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\}\}$. (שימו לב כי לאוספים הנ"ל וקטור מאזן יחיד!).

א. הראו כי אם $V(\{1,2\}) + V(\{1,3\}) \ge V(N) + V(\{1\})$ אזי הווקטור $(V(\{1,2\}) + V(\{1,3\}) - V(N), V(N) - V(\{1,3\}), V(N) - V(\{1,2\}))$ נימצא בליבה.

ב. הראו כי אם $V(\{1,2\}) + V(\{1,3\}) < V(N) + V(\{1\})$ ו $V(\{1,3\}) \ge V(\{1\}) + V(\{3\})$ אזי הווקטור $(V(\{1\}), V(N) - V(\{1,3\}), V(\{1,3\}) - V(\{1\}))$ נימצא בליבה.

ג. הראו כי אם $V(\{1,2\}) + V(\{1,3\}) < V(N) + V(\{1\})$ ו $V(\{1,3\}) < V(\{1\}) + V(\{3\})$ אזי הווקטור $(V(\{1\}), V(N) - V(\{1\}) - V(\{3\}), V(\{3\}))$ נימצא בליבה. לכן ניתן להסיק כי במשחקים עם שלושה שחקנים מספיק לבדוק עם תנאי שפלי-בונדרבה מתקיים רק לארבעת האוספים הנ"ל בכדי לדעת עם הליבה ריקה או לא.

2. משחק שיתופי (N,V) ייקרא סימטרי אם קיימת פונקציה $v:\{1,\dots,n\} \to R$ כך שלכל קואליציה $S \subseteq N$ לא ריקה, $V(S) = v(|S|)$. כלומר הערך של כל קואליציה תלוי רק בגודלה.

א. הראו כי אם,

$$V(S) \le \frac{|S|}{n} V(N)$$

לכל קואליציה לא ריקה S אזי הליבה של המשחק (N,V) אינה ריקה.
(הראו כי הווקטור $(\frac{V(N)}{n}, \dots, \frac{V(N)}{n})$ הינו בליבה).

ב. (רשות) הראו בעזרת שפלי בונדרבה או בכל דרך אחרת גם את הכיוון ההפוך. כלומר הראו כי אם הליבה של משחק (N,V) לא ריקה, אזי אי-השיוויון מתקיים.

3. יהי (N,V) משחק שיתופי ויהי $x \in C(N,V)$ איבר בליבה של המשחק. הראו כי לכל שחקן $i \in N$ קיימת קואליציה $S \subseteq N \setminus \{i\}$ שאינה מכילה את שחקן i, עבורה $x_i \le V(S \cup \{i\}) - V(S)$