תורת המשחקים הסיטפיים

תרגיל בית 2

עומר מזמון
313329666

1. שאלה מבחינה: נתונה בעיית שידוכים (ללא רווקות) בה מספר הנשים והגברים זהה. נניח כי גבר מסוים m נמצא בתחתית רשימתה של כל אישה. הראו כי בכל שידוך יציב m משודך לאותה אישה. באופן דומה הראו כי אם m נימצא בראש רשימתה של כל אישה אזי בכל שידוך יציב m יהיה משודך לאותה אישה, מיהי אישה זו?

א. יהי M_W השידוך היציב המיטבי לגבי ציבור הנשים. נסמן $M_W(m) = w$, כאשר m הוא הגבר הנמצא בתחתית סדר העדפות של כל הנשים. מאופטימליות שידוך הנשים עבור הנשים נקבל כי אישה w יכולה לזכות לכל היותר במועמד פחות טוב בכל שידוך יציב אחר, אך m הוא הגבר הכי פחות מועדף עליה ולכן היא תהיה משודכת ל-m בכל שידוך יציב.

ב. יהי $m \in M$ גבר המועדף של כל הנשים, ותהי $w \in W$ האישה המועדפת של m. נניח בשלילה שקיים שידוך יציב M שבו $w \neq w' = M(m)$. נסמן $m' = M(w)$. כעת, הזוג m, w מהווה זוג חוסם, שכן $m \succ_w m'$ ו- $w \succ_m w'$, בסתירה ליציבות השידוך M.

2. השתמשו באופטימאליות שידוך חיזור הגברים μ_M בכדי להראות כי שידוך זה הינו הגרוע ביותר לנשים. כלומר ב μ_M כל אישה w משודכת לבן הזוג אותו היא הכי פחות מעדיפה מבין כל הגברים בני ההשגה עבורה.

טענה (הוכחנו בכיתה): μ_M אופטימלי לגברים. כלומר, לכל גבר $m \in M$ מתקיים ש $\mu_M(m)$ היא האישה בת ההשגה המועדפת עליו (אם קיימת כזו).

תהי $w \in W$. נסמן את קב' הגברים בני ההשגה של w ב- M_w. צריך להראות שאם $\mu_M(w) \in M$ (כלומר, אם w משודכת לגבר ולא נשארה לבד) אזי הוא הגבר הכי פחות מועדף עליה ב M_w.

נניח שאכן $\mu_M(w) \in M$, ונסמן $\mu_M(w) = m$. נניח בשלילה שקיים $m \neq m' \in M_w$ כך ש $m' \prec_w m$. נסמן ב- μ את השידוך היציב שבו $\mu(w) = m'$. בנוסף, נסמן $\mu(m) = w'$.

השידוך μ יציב ולכן (m,w) לא יכול להיות זוג חוסם. כלומר, צריך להתקיים $w \prec_m w'$ או $m \prec_w m'$. מהנחת השלילה לא מתקיים $m \prec_w m'$ ולכן חייב להתקיים $w \prec_m w'$, אך זאת סתירה לאופטימליות חיזור הגברים עבור הגברים.

לכן הגענו לסתירה.

3. הראו באמצעות התכונות של חיזור הגברים והנשים שבכל שידוך יציב מספר השידוכים (גבר לאשה) קבוע ולכן גם מספר הרווקים מכל מין קבוע.

<u>טענה 1</u>: אם גבר $m \in M$ רווק ב-M_M, אזי הוא רווק בכל שידוך יציב M. זה נובע ישירות מהאופטימליות של שידוך הגברים: אם גבר רווק ב-M_M ולא רווק ב-$M_M \neq M$, אזי קיים אשה כך השגה עבורו אך לא שודך לה ב-M_M, בסתירה לאופטימליות של M_M.

<u>טענה 2</u>: אם אישה $w \in W$ רווקה בשידוך יציב כלשהו M, אזי היא רווקה ב-M_M. זה נובע ישירות מכך ש-M_M הוא השידוך הגרוע ביותר עבור הנשים (שאלה 2), שכן אם אישה לא רווקה ב-M_M אך רווקה ב-M זה אומר שהשידוך M_M עדיף לה על פני M, בסתירה לכך ש-M_M הוא השידוך הגרוע ביותר לפי הנשים.

נסמן ב-$n(M)$ את מספר השידוכים (גבר ואישה) בשידוך M.
מהטענות הנ"ל לכל שידוך יציב M מתקיים:

$$n(M_M) \underset{(1)}{\leq} n(M) \underset{(2)}{\leq} n(M_M)$$

כלומר $n(M_M) = n(M)$ לכל שידוך יציב M.

4. שאלה מבחינה: השתמשו בשאלה 3 בכדי להראות שאם גבר מסוים m הינו רַוָּק בשידוך יציב μ אזי m יהיה רַוָּק בכל שידוך יציב.

נניח בשלילה שקיים גבר רווק בשידוך יציב כלשהו μ ואינו רווק בשידוך חיזור הגברים μ_M.
משאלה 3 מספר הגברים הרווקים ב-μ ו-μ_M חייב להיות זהה, לכן בהכרח קיים גבר אחר שהוא רווק ב-μ_M ולא רווק ב-μ אך בסתירה לאופטימליות של μ_M עבור הגברים.

כמו כן, לא יתכן שגבר יהיה רווק ב-μ_M ולא רווק בשידוך יציב כלשהו אחר μ, שכן זו סתירה לאופטימליות של μ_M עבור הגברים.

ולכן בסך הכל יהיה רווק ב-μ וגם כל גבר אמ"מ הוא רווק ב-μ_M, כלומר קבוצת הגברים הרווקים (לא) משתנה בין שידוכים יציבים.