תורת המשחקים השיתופיים

תרגיל בית 3

עומר מזמין
313329666

1. (שאלה מבחינה) נתונה בעיית שידוכים עבורה λ ו μ שני שידוכים יציבים. יהי $\lambda \wedge_M \mu$ ההתאמה המתאימה לכל גבר m את האשה אותה הוא **פחות** מעדיף מבין $\lambda(m)$ ו $\mu(m)$ (אם $\lambda(m) = \mu(m) = w$ אז $\lambda \wedge_M \mu(m) = w$). הראו כי $\lambda \wedge_M \mu$ הינו שידוך יציב.

ראינו כי $\lambda \vee_w \mu$ הינו שידוך יציב. נראה כי מתקיים $\lambda \wedge_M \mu = \lambda \vee_w \mu$ ולכן $\lambda \wedge_M \mu$ גם הוא שידוך יציב.

אם $\lambda = \mu$ הטענה טריוויאלית. אחרת, יהי $m \in M$ שעבורו $\lambda(m) \neq \mu(m)$. נניח בה"כ $\lambda \vee_w \mu(m) = \mu(m)$ (כלומר $\lambda(\mu(m)) \succ_{\mu(m)} m = \mu(\mu(m))$).

נראה כי מתקיים $\lambda(m) \succ_m \mu(m)$ ולכן נסיים, כיוון שזה יגרור $\lambda \wedge_M \mu(m) = \mu(m)$:

נסמן $w = \mu(m)$. כעת,

$$\lambda \vee_w \mu(m) = w \Rightarrow m \succ_w \lambda(w) \Rightarrow w \in W_+$$

(קב' הנשים המעדיפות את $\mu(w)$ עפ"נ $\lambda(w)$)

$$\Rightarrow m \in M_- \Rightarrow \lambda(m) \succ_m \mu(m)$$

(מתוך שאלה 2) (קב' הגברים המעדיפים את $\lambda(m)$ עפ"נ $\mu(m)$)

□

2. נתונה בעיית שידוכים (M,W) עם יחסי העדפות חזקים ומספר זהה של גברים ונשים (ללא רווקות). נתונים שני שידוכים יציבים μ,λ. תהי M_+ קבוצת הגברים המעדיפים את בת זוגן ב μ על פני בת זוגן ב λ, ותהי W_- קבוצת הנשים המעדיפות את בן זוגן ב λ על פני בן זוגן ב μ. הוכיחו כי לכל גבר $m \in M_+$ מתקיים ש $\mu(m) \in W_-$.

$$M_+ = \{ m \in M \mid \mu(m) \succ_m \lambda(m) \}$$

$$W_- = \{ w \in W \mid \lambda(w) \succ_w \mu(w) \}$$

נניח בשלילה שקיים $m \in M_+$ כך ש $\mu(m) \notin W_-$.
נסמן $w = \mu(m)$. מכך ש $m \in M_+$ מתקיים:

$$(1) \quad w = \mu(m) \succ_m \lambda(m)$$

לכן בפרט $\lambda(m) \neq w$. מכך ש $w \notin W_-$ מתקיים:

$$(2) \quad m = \mu(w) \succ_w \lambda(w)$$

(אם $\lambda(w) = m$ אז $\lambda(m) = w$ וזה לא יתכן בגלל (1))

מ $(1)+(2)$, ומכך ש $\lambda(w) \neq m$, נובע כי (m,w) מהווה זוג חוסם בשידוך λ בסתירה לכך שהוא יציב.

3. נתונה בעיית השמה. הראו באופן פורמלי כי כל ווקטור בליבה מקיים יעילות ורציונאליות פרטית.

נתונה בע"ה השמה $(A, H, h, (\propto_a)_{a\in A})$.
הקצאה μ נמצאת בליבה אם לכל קואליציה $S \subseteq A$
ולכל הקצאה $\nu: S \to h(S)$, $\mu|_S \neq \nu$ קיים $a \in A$
כך ש $\nu(a) \not\propto_a \mu(a)$.

תחילה, אם μ נמצאת בליבה אז לכל $a \in A$, הקואליציה
$S = \{a\}$ מקיימת את התנאי לגבי S ביחס $\nu = h|_{\{a\}}$.
כלומר, או ש $h(a) = \mu(a)$ או ש $h(a) \propto_a \mu(a)$, ולכן
בסה"כ לכל $a \in A$ מתקיים $h(a) \underline{\propto}_a \mu(a)$, כלומר
μ מקיימת רציונליות פרטית.

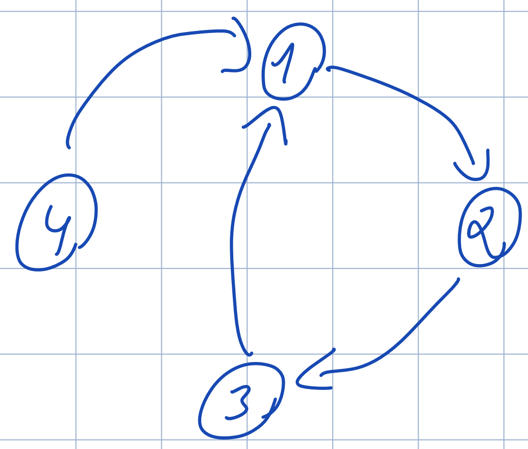
בנוסף, עבור הקואליציה $S = A$ התנאי של הגדרת הליבה מתקיים,
כלומר לכל $\nu: A \to h(A) = H$, $\mu \neq \nu$ קיים $a \in A$
כך ש $\nu(a) \not\propto_a \mu(a)$, כלומר מתקיימת פרטו-יעילות.

4. נתון כי מספר הסוכנים ומספר הבתים במודל החלפת הבתים הוא n=4.
העדפות הסוכנים ניתנות ע"י $\succ_{a_1}: h_2, h_4, h_3, h_1$, $\succ_{a_2}: h_3, h_4, h_2, h_1$, $\succ_{a_3}: h_1, h_4, h_3, h_2$, $\succ_{a_1}: h_1, h_4, h_3, h_2$. מצאו וקטור בליבה.

$\succ_{a_1}: h_2, h_4, h_3, h_1$,
$\succ_{a_2}: h_3, h_4, h_2, h_1$
$\succ_{a_3}: h_1, h_4, h_3, h_2$
$\succ_{a_4}: h_1, h_4, h_3, h_2$

פתרון לפי אלגוריתם ה TTC:

שלב 1:



קיים מעגל $\{1,2,3\}$ לכן נקבל $m(a_1) = h_2$
$m(a_2) = h_3$
$m(a_3) = h_1$

שלב 2:

נשארנו רק עם $\{4\}$ ולכן נקבל $m(a_4) = h_4$
וסיימנו.