תורת המשחקים השיתופיים

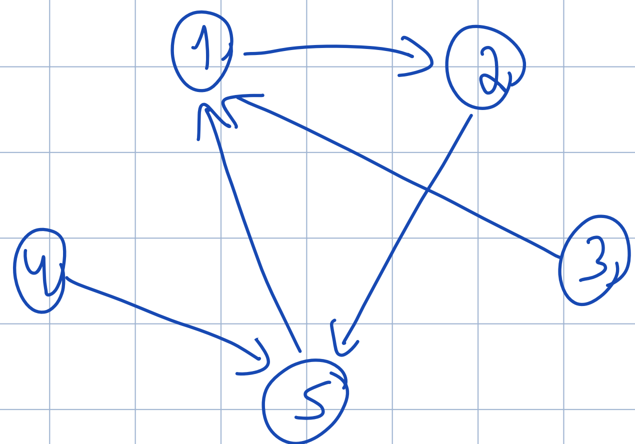
תרגיל בית 4

עומר מזמין
313329666

1. נתון כי מספר הסוכנים ומספר הבתים במודל החלפת הבתים הוא n=5.
העדפות של חמשת הסוכנים ניתנים באופן הבא: $\succ_{a_1}: \cancel{h_2}, h_4, h_5, h_3, h_1$,
$\succ_{a_2}: \cancel{h_5}, h_3, h_4, h_2, h_1$, $\succ_{a_3}: \cancel{h_1}, \cancel{h_4}, h_3, h_2, h_5$, $\succ_{a_4}: \cancel{h_5}, \cancel{h_1}, \cancel{h_4}, h_3, h_2$
$\succ_{a_5}: h_1, h_3, h_5, h_4, h_2$ מצאו וקטור בליבה.

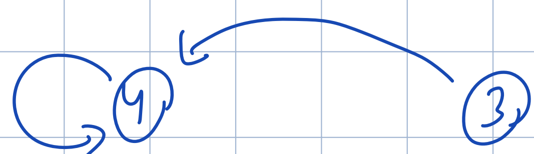
נשתמש באלגוריתם ה TTC:

שלב 1:



קיים מעגל {1,2,5} ולכן נקבל $\mu(a_1)=h_2$, $\mu(a_2)=h_5$
$\mu(a_5)=h_1$

שלב 2:



קיים מעגל {4} ולכן נקבל $\mu(a_4)=h_4$

שלב 3: נשארנו רק עם 3 ולכן נקבל $\mu(a_3)=h_3$
וסיימנו.

2. (שאלה מבחינה) נתונה בעיית השמה כלשהי. נשתמש באלגוריתם הבא למציאת השמה. נגדיר יחס העדפה לכל בית בצורה כלשהי תחת המגבלה שסוכן i הינו מועדף ביותר על הבית שנימצא ברשותו h_i.
לאחר מכן נפעיל את אלגוריתם שידוך חיזור הגברים בכדי למצוא השמה μ.

א. האם ההקצאה המתקבלת הינה רציונלית-פרטית. כלומר האם לכל סוכן i יתקיים ש $\mu(i) \geq_i h_i$.

ב. מצא דוגמא ליחסי העדפות המקיימים את התכונה לעיל, (כלומר כל סוכן נימצא בראש רשימתו של הבית שנימצא ברשותו) אך ההקצאה המתקבלת משידוך חיזור הגברים אינה בליבה.

א. אלגוריתם שידוך הגברים הוא אופטימלי עבור הגברים, כלומר לכל גבר $m \in M$ מתקיים ש $\mu(m)$ היא האישה ברת ההשגה, הכי מועדפת עליו.
בשאלה שלנו, לכל גבר a_i האישה h_i היא ברת השגה.
לאור כיוון שההשמה λ המקיימת $\forall i \in [n]: \lambda(a_i) = h_i$ יציבה (אין זוג חוסם כי כל אישה h_i מקבלת את הגבר המועדף עליה).
לכן אם נפעיל את שידוך הגברים נקבל הקצאה μ שבה כל גבר a_i יקבל אישה המועדפת עליו יותר מ h_i (או שיקבל את h_i אם זו האישה המועדפת עליו ביותר).
לכן מתקיים $\forall i \in [n]: \mu(a_i) \underset{a_i}{\succeq} h_i$ כלומר מתקיימת רציונליות פרטית.

ב. נסתכל על יחסי ההעדפות הבאים:

$a_1: h_3 \succ h_2 \succ h_1$ | $h_1: a_1 \succ a_2 \succ a_3$

$a_2: h_1 \succ h_3 \succ h_2$ | $h_2: a_2 \succ a_3 \succ a_1$

$a_3: h_1 \succ h_2 \succ h_3$ | $h_3: a_3 \succ a_1 \succ a_2$

ההקצאה המתקבלת ע"י אלגוריתם חיזור הגברים:

	h_1	h_2	h_3
שלב 1:	$a_2, \cancel{a_3}$		a_1
שלב 2:	a_2	a_3	a_1

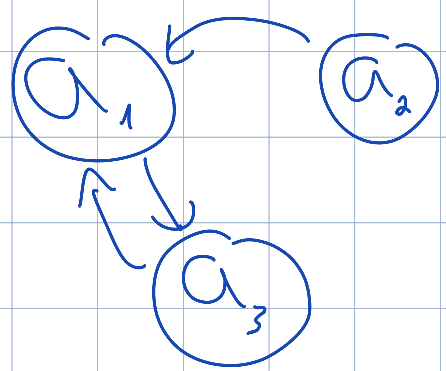
ולכן הזיווג שמתקבל הוא $\mu(a_1)=h_3, \mu(a_2)=h_1, \mu(a_3)=h_2$

נעשה כעת, ההקצאה המתקבלת ע"י אלג' TTC היא:

שלב 1:

$\lambda(a_1) = h_3$

$\lambda(a_3) = h_1$



שלב 2: נותר רק a_2 ולכן $\lambda(a_2) = h_2$

קיבלנו כי $\mu \neq \lambda$, והליבה היא $\{\lambda\}$, ולכן μ לא בליבה.

3. הראו כי הליבה מורכבת מווקטור יחיד.

תהי λ ההקצאה המתקבלת מאלג' TTC. הראינו קודם כי λ בליבה. נניח בשלילה שקיימת הקצאה $\lambda \neq \mu$ שגם היא בליבה.

נגדיר A_k, C_k באותו אופן שהוגדרו בהרצאה.

נראה באינדוקציה שלכל סיבוב $k=1,2,\dots$, לכל סוכן $a \in C_k$ מתקיים $\mu(a)=\lambda(a)$, וזאת בסתירה לכך ש- $\lambda \neq \mu$:

<u>בסיס האינדוקציה $(k=1)$:</u> נניח בשלילה $\lambda(C_1) \neq \mu(C_1)$. אזי לא ייתכן ש- μ מקיימת סטביליות קואליציונית כי הקואליציה C_1 חוסמת אותה: בקואליציה C_1 קיים מעגל שבו כל סוכן הכי מעדיף את הבית של הסוכן שהוא מצביע אליו, ולכן אם $\mu(C_1) \neq \lambda(C_1)$ קיים סוכן שניתן לשפר את מה שקבלו ב- μ ע"י לפחות במעגל את הסוכנים באחרים (זאת כיוון שב- λ כל סוכן ב- C_1 מקבל את הבית הכי מועדף עליו). לכן בהכרח מתקיים $\mu(C_1) = \lambda(C_1)$.

<u>הנחת האינדוקציה:</u> נניח ש- $\mu(C_j) = \lambda(C_j)$ לכל $j=1,\dots,k$.

צעד האינדוקציה: נניח בשלילה ש $\lambda(C_{k+1}) \neq \mu(C_{k+1})$.

אזי לא ייתכן ש μ מקיימת יציבות קואליציונית כי הקואליציה C_{k+1} חוסמת אותה: בקואליציה C_{k+1} קיים מעגל שבו כל סוכן הכי מעדיף את הבית של הסוכן שהוא מעדיף מבין כל הבתים שנותרו $H_{left} = h(A) \setminus \bigcup_{j=1}^{k} \lambda(C_j)$

היות שהנחנו כי שלכל $j=1,\dots,k$ מתקיים $\mu(C_j) = \lambda(C_j)$, נקבל כי $\mu(C_{k+1}) \subseteq H_{left}$, ולכן מהגדרת λ מתקיים שלכל $a \in C_{k+1}$ מתקיים $\lambda(a) \succsim_a \mu(a)$. מהנחת השלילה קיים $a \in C_{k+1}$ עבורו $\lambda(a) \neq \mu(a)$, כלומר $\lambda(a) \succ_a \mu(a)$

ולכן מסה"כ הקואליציה C_{k+1} חוסמת את μ בסתירה לכך ש- μ יציבה.