תורת המשחקים הסיטופיים

תרגיל בית 5

עומר מזמון
313329666

1. שרטטו גרפית את הליבה של המשחקים הבאים:

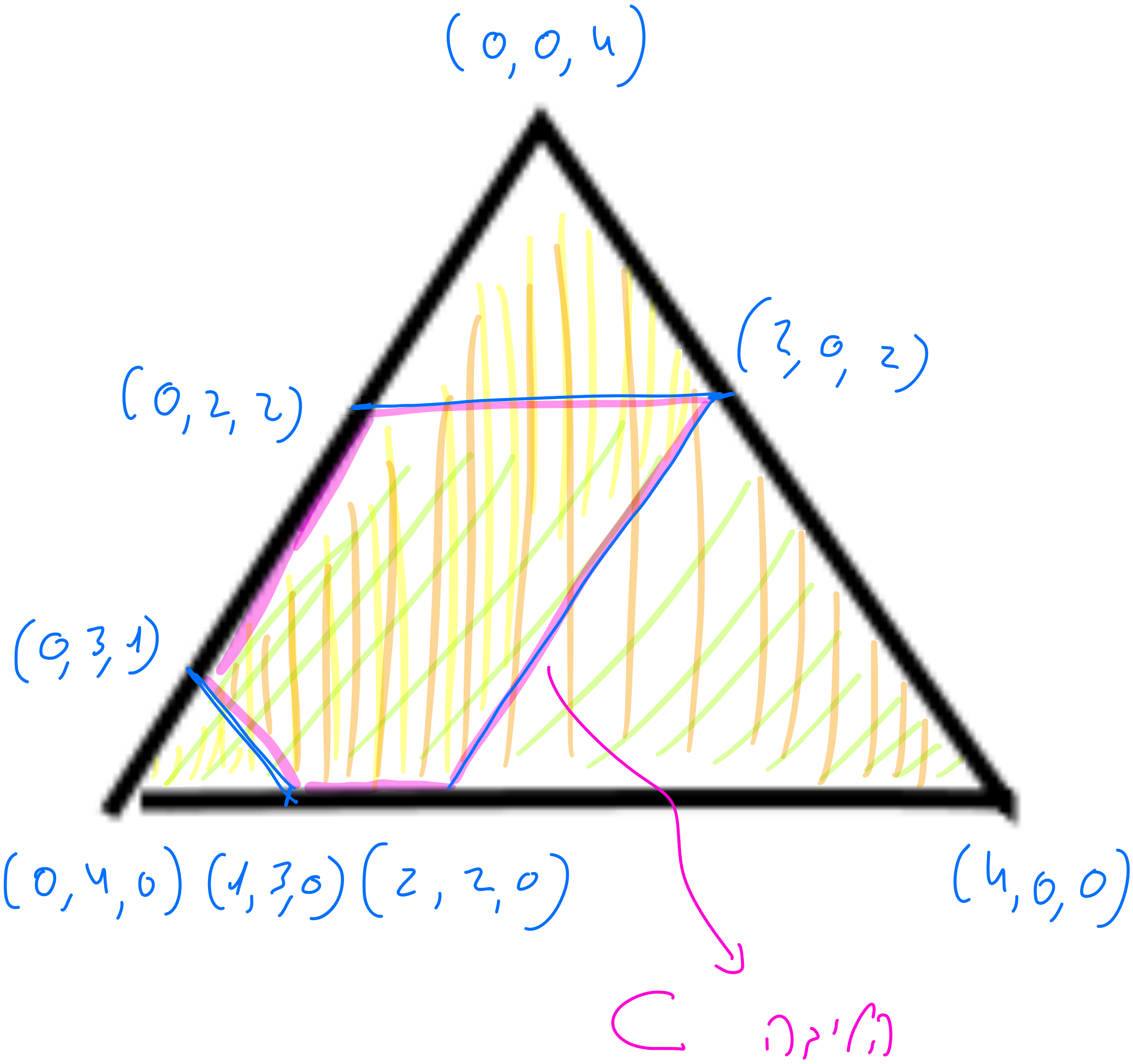
א. v(1)=v(2)=v(3)=0, v(1,2)=v(2,3)=2, v(1,3)=1,v(1,2,3)=4

ב. v(1)=v(2)=1, v(3)=2, v(1,2)=v(2,3)=v(1,3)=3, v(1,2,3)=5

ג. v(1)=0,v(2)=v(3)=1, v(1,2)=v(1,3)=2, v(2,3)=v(1,2,3)=3

א:

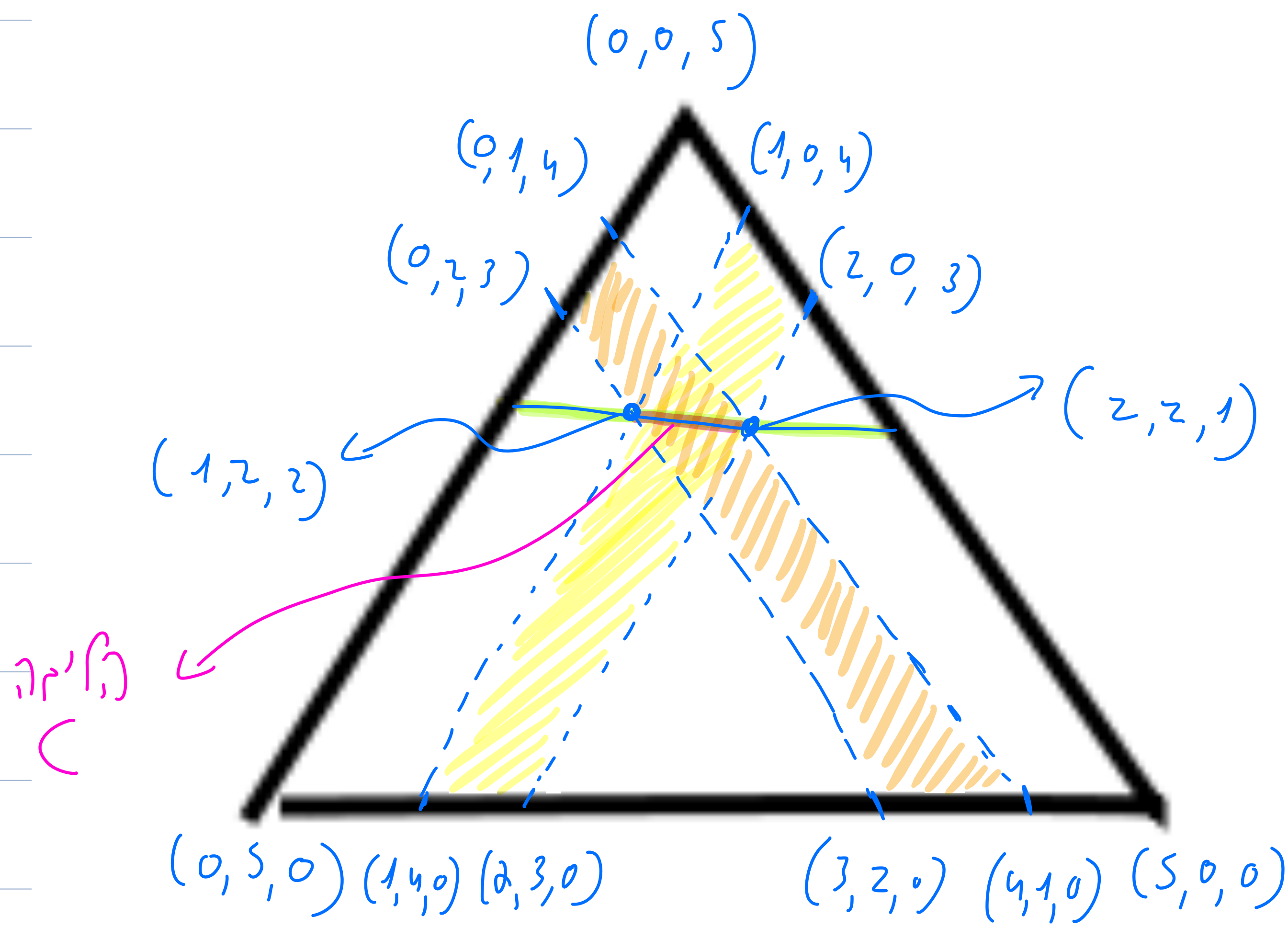
$x_1 \le 2,\ x_2 \le 3,\ x_3 \le 2$



ב)

v(1)=v(2)=1, v(3)=2, v(1,2)=v(2,3)=v(1,3)=3, v(1,2,3)=5

$1 \le x_1 \le 2$, $1 \le x_2 \le 2$, $x_3 = 2$



ג

$$v(1)=0, v(2)=v(3)=1, \underbrace{v(1,2)=v(1,3)=2}_{\Downarrow}, \underbrace{v(2,3)}_{\Downarrow}=v(1,2,3)=3$$

$$x_3, x_2 \leq 1 \qquad x_1 \leq 0$$

בשילוב הגבולות של סכומים פרטיים נקבל:

$$x_1=0, \quad x_2=x_3=1$$

אבל אז לא מתקיימת יעילות:

$$x_1+x_2+x_3=2 \neq 3$$

ולכן הליבה ריקה ואין מה לשפר.

2. נתון המשחק הקואליציוני הבא $v(1) = v(2) = v(3) = 0$,
$v(1,2,3) = c$, $v(1,2) = v(1,3) = v(2,3) = 1$.

מהו הערך המינימלי של c עבורו הליבה של המשחק אינה ריקה?

ראשית, נכתוב את ג האילוצים ל $x \in C$:

(a) $x_1, x_2, x_3 \geq 0$

(b) $x_1 + x_2 \geq 1$, $x_1 + x_3 \geq 0$, $x_2 + x_3 \geq 0$

(c) $x_1 + x_2 + x_3 = c$

נשים לב כי לכל $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$, בהינתן האילוץ (c) מתקיים שקילות בין האילוצים הבאים:

$$x_i + x_j \geq 1 \iff x_k \leq c - 1$$

ולכן ניתן לכתוב את מערכת האילוצים כך:

(a) $x_1, x_2, x_3 \geq 0$

(b) $x_1, x_2, x_3 \leq c - 1$

(c) $x_1 + x_2 + x_3 = c$

לפי תנאי (b), לכן ש $x \in C$ מתקיים ש:

$$c = x_1 + x_2 + x_3 \leq 3c - 3$$

$$2c \geq 3$$

$$c \geq 1.5$$

נראה שעבור $C=1.5$ הליגה לא ריקה:

נסתכל על הווקטור $X = (1/2, 1/2, 1/2)$:

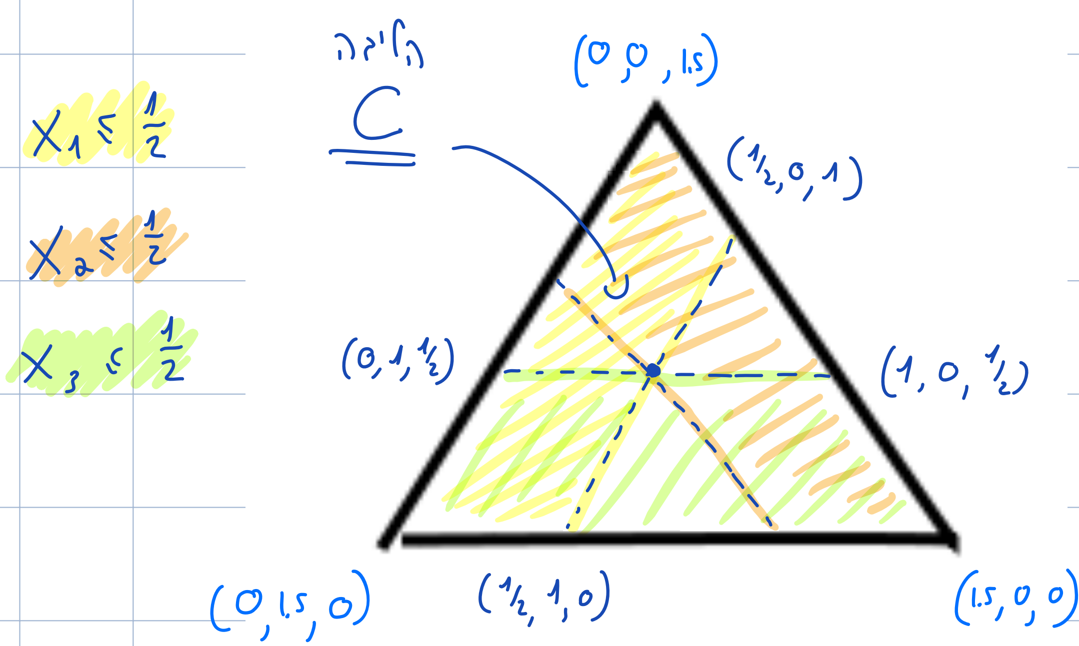
אילוצים (a) ו-(c) בבירור מתקיימים, ואילו

(b) מתקיים בשוויון שכן $\forall i\in[3]: x_i = C-1 = 1/2$

ולכן $x\in C$ והליגה לא ריקה.

להלן תיאור גרפי של הליגה במקרה $C=1.5$, כאשר

מישור התרחישים הוא $x_1+x_2+x_3=C=1.5$:



3. משחק (N,v) ייקרא מונוטוני חזק אם לכל שתי קואליציות $S,T \subseteq N$ כך ש $S \subset T$ מתקיים ש $v(S) < v(T)$. תנו דוגמא למשחק מונוטוני חזק עבורו הליבה ריקה.

נסתכל על המשחק משאלה 2 עם $1 < c < 1.5$:

$$V(1) = V(2) = V(3) = 0$$

$$V(1,2) = V(2,3) = V(1,3) = 1$$

$$V(1,2,3) = c$$

המשחק מונוטוני כי $S \subset T \Rightarrow V(S) < V(T)$,

אך כפי שהראינו בשאלה 2, במקרה זה הליבה ריקה.

4. נתונים שני משחקים שיתופיים (N,V) ו (N,W) עם אותה קבוצת שחקנים $N=\{1,\ldots,n\}$ ופונקציות תשלום V,W. נניח כי קיים וקטור $b\in\mathbb{R}^N$ וקבוע חיובי $a>0$ כך ש לכל קואליציה S מתקיים:

$$V(S)=aW(S)+\sum_{i\in S} b_i$$

הראו כי $C(V)=aC(W)+b$.

$x\in C(N,W)$

$\Downarrow$

$\forall \phi\neq S\subseteq N:\quad (1)\ W(S)\leq x(S)=\sum_{i\in S} x_i$

$(2)\ \sum_{i=1}^{n} x_i = W(N)$

$\Downarrow\ a>0$

$\forall \phi\neq S\subseteq N:\quad (1)\ aW(S)\leq a\,x(S)=a\sum_{i\in S} x_i$

$(2)\ a\sum_{i=1}^{n} x_i = a\cdot W(N)$

$\Downarrow$

$$\forall \emptyset \neq S \subseteq N: \quad (1)\ aW(S)+b(S) \leq aX(S)+b(S) = a\sum_{i\in S} X_i + \sum_{i\in S} b_i$$

$$(2)\quad a\sum_{i=1}^{n} X_i + \sum_{i=1}^{n} b_i = a\cdot W(N)+b(N)$$

$$\Downarrow$$

$$\forall \emptyset \neq S \subseteq N: \quad (1)\ V(S) \leq aX(S)+b(S)$$

$$(2)\quad aX(N)+b(N) = V(N)$$

$$\Downarrow$$

$$aX+b \in C(N,V)$$

כלומר, הראינו $aC(N,W)+b \subseteq C(N,V)$.

כעת, נשים לב כי אם לכל $S \subseteq N$:

$$V(S) = aW(S)+b(S)$$

אזי לכל $S \subseteq N$:

$$W(S) = \frac{1}{a}V(S) - \frac{1}{a}b(S)$$

כלומר,

$$w(S) = \tilde{a} V(S) + \tilde{b}(S)$$

כאשר $\tilde{a} = \frac{1}{a} > 0$, $\tilde{b} = -\frac{b}{a}$

לכן ניתן לחזור על ההוכחה לעיל כדי להראות שמתקיים:

$$\tilde{a} C(N,V) + \tilde{b} = \frac{1}{a} C(N,V) - \frac{b}{a} \le C(N,w)$$

ע"י כפל ב- a והוספת b לשני האגפים נקבל:

$$C(N,V) \le a C(N,w) + b$$

כלומר בסה"כ

$$C(N,V) = a C(N,w) + b$$